الشعبية الديمقراطية الجزائرية الجمهورية

République Algérienne Démocratique et Populaire

العلمي والبحث العالي التعليم وزارة

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université Mohamed El Bachir El Ibrahimi - B.B.A

Faculté des Maths et Informatique

Département de Maths

جامعة البشير الابراهيمي "برج بوعريريج"

كلية الرياضيات والاعلام الالي

قسم الرياضيات

Cours
Introduction aux systèmes Dynamiques I

Spécialité : Mathématiques

« Systèmes dynamiques »

Niveau: 1ème Master

Présenté par : Berbache Aziza

Année Universitaire 2020/2021

TABLE OF CONTENTS

1.0 SYSTÈMES NON LINÉAIRES: THÉORIE LOCALE

1.1 QUELQUES CONCEPTS ET DÉFINITIONS PRÉLIMINAIRES

1.1.1 Systèmes différentel

Definition 1. *On appele système différentiel un système de la form*

$$\dot{X} = f(X) \quad \text{où } f : E \to \mathbb{R}^n \tag{1.1}$$

E est un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $\dot{X} = \left(\frac{dx_1}{dt}, \frac{dx_2}{dt}, \frac{dx_3}{dt}, ...\right)$

- *Si f une application linéare on dit que le système (1.1) est linéare. Sinon on dit que le système (1.1) est non linéare*
- *Si f ne dipend pas explicitement de t on dit que le système (1.1) est autonome et on note $\dot{X} = f(X)$*
- *Si f dipend pas explicitement de t on dit que le système (1.1) est non autonome et on note $\dot{X} = f(X, t)$*

Example 2. *Les systèmes*

$$\begin{cases} \dot{x} = x + 1 \\ \dot{y} = 2x + y \end{cases} \text{ est linéare autonome}$$

$$\begin{cases} \dot{x} = x + \ln t \\ \dot{y} = 2x + y \end{cases} \text{ est linéare non autonome}$$

$$\begin{cases} \dot{x} = x^2 + 1 \\ \dot{y} = 2x + y \end{cases} \text{ est non linéare autonome}$$

$$\begin{cases} \dot{x} = xy + \sin t \\ \dot{y} = 2x + y^2 + t \end{cases} \text{ est non linéare non autonome}$$

Noton que la solution générale d'un équation différentiele $\dot{x} = f(x)$ est

$$\int_0^t \dot{x}(s)ds = \int_0^t f(s)ds \Rightarrow x(t) - x(0) = \int_0^t f(s)ds \Rightarrow x(t) = x(0) + \int_0^t f(s)ds$$

Definition 3. *une fonction X définie sue un intervalle $I_X \subset \mathbb{R}$ a valeur dans $\mathbb{R}^n$ est appelée solution de (1.1) lorsque les propriétes suivant sont vérifiées*

i) $X \in C^1(I_X), I_X \neq \emptyset$

ii) $\dot{X} = f(X)$

Remark 4. *La solution $X(t)$ existe pour l'équation (1.1) si f intégrable*

La continuité de f pour l'équation (1.1) ne soit pas suffisant pour l'unicité de la solution

Example 5. *soit l'équation*

$$\begin{cases} \dot{x} = \sqrt{|x|} \\ x(0) = 0 \end{cases} \tag{1.2}$$

on a $f(x) = \sqrt{|x|}$ est continue en 0 donc sur $\mathbb{R}$

Example 6. *On remarque facilement que $x(t) \equiv 0$ est une solution de (1.2) de plus on*

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \sqrt{x} \Rightarrow \int \frac{dx}{\sqrt{|x|}} = dt \Rightarrow 2\sqrt{|x|} = t + c \Rightarrow |x| = \frac{1}{4}(t+c)^2 \\ x(0) &= 0 \Rightarrow c = 0 \Rightarrow |x| = \frac{1}{4}(t)^2 \end{aligned}$$

donc (1.2) admet deux solution puisque la fonction f n'est pas dérivable en 0

1.1.2 Differentiabilité

La notation de la fonction differentiable est un généralisation au fonction de plsieur variables de la fonction dérivable au fonction d'une variable réelle

Definition 7. *La fonction $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ est différentiable en $x_0 \in \mathbb{R}^n$ s'il existe une transformation linéaire $Df(x_0) \in L(\mathbb{R}^n)$ qui satisfait*

$$\lim_{|h| \to 0} \frac{|f(x_0 + h) - f(x_0) - Df(x_0)h|}{|h|}$$

La transformation linéaire $Df(x_0)$ est appelée la dérivée de f en x_0.

if $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ est différentiable en $x_0 \in \mathbb{R}^n$, alors les dérivées partielles, $\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right) i, j = 1, ..., n$, existent toutes en x_0 et pour tout $x \in \mathbb{R}^n$,

$$Df(x_0)x = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_j}(x_0)\, x_j$$

Ainsi, si f est une fonction différentiable, la dérivée Df est donnée par la matrice jacobienne $n \times n$

$$Df = \left[\frac{\partial f}{\partial x_j}\right]$$

Example 8. *Trouver le dérivé de la fonction*

$$\begin{pmatrix} f_1(x,y) \\ f_2(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + xy \\ x^2 + y^3 \end{pmatrix}$$

au point (1,2)

$$\begin{aligned} Df(x,y) &= \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+y & x \\ 2x & 3y^2 \end{pmatrix} \\ Df(1,2) &= \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 12 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Definition 9. *Supposons que V_1 et V_2 sont deux espaces véctoriels normés avec normes $||.||_1$ et $||.||_2$ respectivement. alors*

$$F : V_1 \to V_2$$

est continue en $x_0 \in V_1$ si pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un $\delta > 0$ tel que $x \in V_1$ et $||x - x_0||_1 < \delta$ implique que

$$||F(x) - F(x_0)||_1 < \varepsilon$$

Et F est dit continue sur l'ensemble $E \subset V_1$ s'il est continue à chaque point $x \in E$. Si F est continue sur $E \subset V_1$, on écrit $F \in C(E)$.

Definition 10. *Supposons que $f : E \to \mathbb{R}^n$ soit différentiable sur E. Alors si $E \in I(E)$ si la dérivée $Df : E \to L(\mathbb{R}^n)$ est continue sur E.*

Theorem 11. *Supposons que E est un sous-ensemble ouvert de $\mathbb{R}^n$ et que $f : E \to \mathbb{R}^n$. Alors $f \in C^1(E)$ si les dérivées partielles, $\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right) i, j = 1, ..., n,$, existent et sont continues sur E.*

Remark 12. *Pour E un sous-ensemble ouvert de $\mathbb{R}^n$, les dérivées d'ordre supérieur $D^k f(x_0)$ d'une fonction $f : E \to \mathbb{R}^n$ sont définies de manière similaire et on peut montrer que $f \in C^k(E)$ si et seulement si les dérivées partielles $\frac{\partial^k f_i}{\partial x_{j_1} ... \partial x_{j_k}}$ avec $i, j_1, ..., j_k = 1, ..., n$, existent et sont continues sur E. De plus, $D^2 f(x_0) : E \times E \to \mathbb{R}^n$ et pour $(x, y) \in E \times E$*

$$D^2 f(x_0)(x, y) = \sum_{j_1, j_2 = 1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_{j_1} \partial x_{j_2}} (x_0)\, x_{j_1} y_{j_2}$$

Des formules similaires sont valables pour $D^k f(x_0) : (E \times ... \times E) \to \mathbb{R}^n$

Remark 13. *Une fonction $f : E \to \mathbb{R}^n$ est dite analytique dans l'ensemble ouvert $E \subset \mathbb{R}^n$ si chaque composante $f_j(x), j = 1, ..., n$, est analytique dans E, c'est-à-dire si pour $j = 1, ..., n$ et $x0 \in E$, $f_j(x)$ a une série de Taylor qui converge vers $f(x)$ dans un voisinage de x_0 dans E.*

Exercise 14. ***Montrer que le problème***

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = x^\alpha \\ x(0) = 0 \end{cases}$$

admet au moins deux solutions différentes si $0 < \alpha < 1$ ***et une unique solution si*** $\alpha = 1$.

Exercise 15. *1-* ***Soient*** $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ ***une application de classe*** $\mathbf{C^1}$ ***et*** $g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ ***l'application définie par***

$$g(u, v) = f\left(\cos u + \sin v, \sin u + \cos v, e^{u-v}\right)$$

a. Montrer que g ***est de classe*** $\mathbf{C}^1$.

b. ***On suppose que*** f ***est différentiable au point*** $M = (1, 1, 1)$ ***de*** $\mathbb{R}^3$ ***et que sa***

différentielle en ce point est

$$Df(M) = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

Déterminer la différentielle de g ***au point*** $P = \left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$***.***

2) Calculer la dérivée de fonction suivante

$$f(x, y) = \begin{pmatrix} x - 4x^2y^2 \\ -y + 2x^2y + y^2 \end{pmatrix}$$

a) Trouver les zéros de la fonction c'est-à-dire les les points $X_0 \in \mathbb{R}^2$ ***"où*** $f(X_0) =$

0.

b) Calculer $Df\,(0, 1)\,X$ *et* $D^2f\,(0, 1)\,X$

1.2 LE THÉORÈME FONDAMENTAL DE L'EXISTENCE-UNICITÉ

Definition 16. *Supposons que* $f \in C(E)$ *où* E *est un sous-ensemble ouvert de* $\mathbb{R}^n$*. Alors* $x(t)$ *est une solution de l'équation différentielle* (1.1) *sur un intervalle* I

- *si* $x(t)$ *est dérivable sur* I
- *et si pour tout* $t \in I, X(t) \in E$ *et*

$$\dot{x}(t) = f(x(t)).$$

Et étant donné $x_0 \in E; x(t)$ *est une solution du problème de la valeur initiale*

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

sur un intervalle I

- *si* $t_0 \in I, x(t_0) = x_0$
- *et* $x(t)$ *est une solution de l'équation différentielle* (1.1) *sur l'intervalle* I*.*

Definition 17. *Soit E un sous-ensemble ouvert de $\mathbb{R}^n$. On dit qu'une fonction $f : E \to \mathbb{R}^n$ satisfait une condition de Lipschitz sur E s'il existe une constante positive K telle que pour tout $x, y \in E$*

$$|f(x) - f(y)| < K\,|x - y|\,.$$

La fonction f est dite localement Lipschitzienne sur E si pour chaque point $x_0 \in E$ il existe un voisinage de x_0, $N_\delta(x_0) \subset E$ et une constante $K_0 > 0$ telle que pour tout $x, y \in N_\varepsilon(x_0)$

$$|f(x) - f(y)| < K_0\,|x - y|\,.$$

Par un voisinage d'un point $x_0 \in \mathbb{R}^n$.

Remark 18. *$N_\varepsilon(x_0)$ c'est la boule ouverte de centre x_0 et de rayon ε*

$$N_\varepsilon(x_0) = \{x \in \mathbb{R}^n : |x - x_0| < \varepsilon\}.$$

dans $\mathbb{R}$

$$N_\varepsilon(x_0) = \left]x0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon\right[\,.$$

Example 19. *la fonction $x \to f(x) = x^2$ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ mais f n'est pas lipschitzienne puisque on a pour $k \geq 0, x = k+1, y = k$:*

$$\left|(k+1)^2 - (k)\right| = 2k + 1 > k\,|k + 1 - k| = k.$$

Lemma 20. *Soit E un sous-ensemble ouvert de $\mathbb{R}^n$ et soit $f : E \to \mathbb{R}^n$. Alors, si $f \in C^1(E)$, f est localement Lipschitzienne sur E.*

1.2.1 Méthode de Picard des approximations successives

Cette méthode est basé sur le fait que $X(t)$ est une solution du problème de la valeur initiale

$$\begin{cases} \dot{X} = f(X) \\ X(0) = X_0 \end{cases}$$

si et seulement si $X(t)$ est une fonction continue qui satisfait l'équation intégrale

$$X(t) = X(0) + \int_0^t f(X(s))ds$$

Les approximations successives de la solution de cette équation intégrale sont définies par la suite de fonctions

$$\begin{cases} u_0(t) = x_0 \\ u_{k+1}(t) = x_0 + \int_0^t f(u_k(s))ds \end{cases} \tag{1.3}$$

pour $k = 0, 1, 2, ...$

Example 21. *Trouver la solution du problème*

$$\begin{cases} \dot{y} = 1 + y(t) \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

par la méthode de pécard.

Solution 22. *On a la formule*

$$\begin{cases} y_0(t) = 0 \\ y_{k+1}(t) = \int_0^t f(y_k(s))ds \end{cases}$$

donc

$y_1(t) = \int_0^t f(y_0(s))ds = \int_0^t ds = t$
$y_2(t) = \int_0^t f(y_1(s))ds = \int_0^t (s+1)\, ds = \frac{1}{2}t\,(t+2)$
$y_3(t) = \int_0^t f(y_2(s))ds = \int_0^t \left(\frac{1}{2}s\,(s+2)+1\right) ds = \frac{1}{6}t\,(t^2+3t+6)$
$\vdots$
$y_n(t) = t + \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{6}t^3 + ... = e^t - 1$

Dans ce qui suite on définie sur un espace des fonctions continues sur un intervalle $I = [-a, a]; C(I)$. La norme sur $C(I)$

$$\|u\| = \sup_{I} |u(t)|$$

La convergence dans cette norme équivaut à une convergence uniforme.

Definition 23. *Soit V un espace véctoriel normé. Alors une suite $\{u_k\} \subset V$ est appelée une suite de Cauchy si pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un N tel que $k, m > N$ implique que*

$$\|u_k - u_m\| < \varepsilon.$$

L'espace V est dit complet si toute suite de Cauchy dans V converge vers un élément dans V.

Remark 24. *Si $I = [-a, a]$, alors $C(I)$ un espace véctoriel normé complet.*

Theorem 25. *(Le théorème de l'existence-unicité fondamentale). Soit E un sous-ensemble ouvert de $\mathbb{R}^n$ contenant x_0 et supposons que $f \in C^1(E)$. Alors il existe un $a > 0$ tel que le problème de la valeur initiale*

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \tag{1.4}$$

a une solution unique $x(t)$ sur l'intervalle $[-a, a]$.

Proof. **L'existence:** Puisque $f \in C^1(E)$, il résulte du lemme qu'il existe un voisinage $N_\varepsilon(x_0) \subset E$ et une constante $K > 0$ telle que pour tout $x, y \in N_\varepsilon(x_0)$,

$$|f(x) - f(y)| < K_0 |x - y|.$$

Soit $b = \frac{\varepsilon}{2}$. Alors la fonction continue $f(x)$ est bornée sur l'ensemble compact

$$N_0 = \{x \in \mathbb{R}^n : |x - x_0| < b\}.$$

Soit

$$M = \max_{x \in N_0} |f(x)|.$$

Soit les approximations successives $u_k(t)$ définies par (1.3). En supposant alors qu'il existe un $a > 0$ tel que $u_k(t)$ soit défini et continu sur $[-a, a]$ et satisfait

$$\max_{x\in[-a,a]} |u_k(t) - x_0| \leq b \tag{1.5}$$

il s'ensuit que $f(u_k(t))$ est définie et continue sur $[-a, a]$ et donc que

$$u_{k+1}(t) = x_0 + \int_0^t f(u_k(s))ds$$

est défini et continu sur $[-a, a]$ et satisfait

$$|u_{k+1}(t) - x_0| \leq \int_0^t |f(u_k(s))|\, ds \leq \max_{x\in N_0} |f(x)| \int_0^t ds = Mt \leq Ma$$

pour tout $t \in [-a, a]$. Ainsi, en choisissant $0 < a < \frac{b}{M}$, il suit par récurrence que $u_k(t)$ est défini et continu et satisfait (1.5) pour tout $t \in [-a, a]$ et $k = 1, 2, 3, ...$de plus, puisque pour tout $t \in [-a, a]$ et $k = 0, 1, 2, 3, ..., u_k(t) \in N_0$, il résulte de la condition de Lipschitz satisfaite par f que pour tout $t \in [-a, a]$

$$\begin{aligned} |u_2(t) - u_1| &\leq \int_0^t |f(u_1(s)) - f(u_0(s))|\, ds \leq K \int_0^t |u_1(s)) - u_0(s))| \\ &\leq Ka \max_{x\in[-a,a]} |u_1(t) - x_0| \leq Kab \end{aligned}$$

de plus, en supposant que

$$\max_{x\in[-a,a]} |u_j(t) - u_{j-1}(t)| \leq (Ka)^{j-1}\, b \tag{1.6}$$

pour un entier $j > 2$, il s'ensuit que pour tout $t \in [-a, a]$

$$\begin{aligned} |u_{j+1}(t) - u_j(t)| &\leq \int_0^t |f(u_j(s)) - f(u_{j-1}(s))|\, ds \leq K \int_0^t |u_j(s)) - u_{j-1}(s))| \\ &\leq Ka \max_{t\in[-a,a]} |u_j(t) - u_{j-1}(t)| \leq (Ka)^j\, b \end{aligned}$$

Ainsi, il s'ensuit par récurrence que (1.6) est vrai pour $j = 2, 3, ...$ En posant $\alpha = Ka$ et en choisissant $0 < a < \frac{1}{K}$, on voit que pour $m > k > N$ et $t \in [-a, a]$

$$\begin{aligned} |u_m(t) - u_k(t)| &= \sum_{j=k}^{m-1} |u_{j+1}(t) - u_j(t)| \leq \sum_{j=N}^{\infty} |u_{j+1}(t) - u_j(t)| \\ &\leq \sum_{j=N}^{\infty} \alpha_j b = \frac{\alpha^N}{1-\alpha} b \end{aligned}$$

Cette dernière quantité s'approche de zéro lorsque $N \to \infty$. Donc, pour tout $c > 0$ il existe un N tel que $m, k > N$ implique que

$$\|u_m - u_k\| \leq \max_{t \in [-a,a]} |u_m(t) - u_k(t)|$$

c'est-à-dire que $\{u_k\}$ est une suite de Cauchy de fonctions continues en $C([-a,a])$. Il résulte du théorème ci-dessus que $u_k(t)$ converge vers une fonction continue $u(t)$ uniformément pour tout $t \in [-a,a]$ comme $k \to \infty$. Et puis en prenant la limite des deux côtés de l'équation (1.3) définissant les approximations successives, on voit que la fonction continue

$$u(t) = \lim_{k \to \infty} u_k(t) \tag{1.7}$$

satisfait l'équation intégrale

$$u(t) = x_0 + \int_0^t f(u(s))ds \tag{1.8}$$

pour tout $t \in [-a,a]$. Nous avons utilisé le fait que l'intégrale et la limite peuvent être interchangées puisque la limite en (1.7) est uniforme pour tout $t \in [-a,a]$. Alors comme $u(t)$ est continue, $f(u(t))$ est continue et par le théorème fondamental du calcul, le membre droit de l'équation intégrale (1.8) est différentiable et

$$u'(t) = f(u(t))$$

pour tout $t \in [-a,a]$. De plus, $u(0) = x_0$ et de (1.5) il s'ensuit que $u(t) \in N_\varepsilon(x_0) \subset E$ pour tout $t \in [-a,a]$. Ainsi $u(t)$ est une solution du problème de valeur initiale (1.4) sur $[-a,a]$. Reste à montrer que c'est la seule solution.

L'unicité: Soient $u(t)$ et $v(t)$ deux solutions du problème de valeur initiale (1.4) sur $[-a,a]$. Alors la fonction continue $|u(t) - v(t)|$ atteint son maximum en un point $t_j \in [-a,a]$. Il s'ensuit que

$$\begin{aligned}
\|u - v\| &\leq \max_{t \in [-a,a]} |u(t) - v(t)| = \left| \int_0^t f(u(s)) - f(v(s))ds \right| \leq \int_0^{|t|} |f(u(s)) - f(v(s))| \, ds \\
&\leq K \int_0^{|t|} |u(s)) - v(s))| \leq Ka \max_{t \in [-a,a]} |u(t) - v(t)| \leq Ka \, \|u - v\|
\end{aligned}$$

Mais $Ka < 1$ et cette dernière inégalité ne peuvent être satisfaites que si $\|u - v\| = 0$. Ainsi, $u(t) = v(t)$ sur $[-a,a]$. Nous avons montré que les approximations successives (1.3) convergent uniformément vers une solution unique du problème de la valeur initiale (1.4) sur l'intervalle $[-a,a]$ où a est tout nombre satisfaisant $0 < a < min\left(\frac{b}{M}, \frac{1}{K}\right)$. $\square$

Remark 26. *Exactement la même méthode de preuve montre que le problème de la valeur initiale*

$$\begin{cases} \dot{X} = f(X) \\ X(t_0) = X_0 \end{cases}$$

a une solution unique sur un certain intervalle $[t_0 - a, t_0 + a]$.

Exercise 27. ***Trouver la solution le problème de valeur initiale***

$$\begin{cases} \ddot{x} = -x \\ x\,(0) = 0 \\ \dot{x}\,(0) = 1 \end{cases}$$

par la méthode de Picard.

1.3 L'INTERVALLE MAXIMAL D'EXISTENCE

Le théorème fondamental d'existence-unicité a établi que si $f \in C^1(E)$ alors le problème de la valeur initiale

$$\begin{cases} \dot{X} = f(X) \\ X(t_0) = X_0 \end{cases} \tag{1.9}$$

a une solution unique définie sur un intervalle $(-a, a)$. Dans cette section, nous montrons que (1.9) a une solution unique $x(t)$ définie sur un intervalle maximal d'existence (α, β). De plus, si $\beta < \infty$ et si la limite

$$x_1 = \lim_{t \to \beta^-} x(t)$$

existe alors $x_1 \in \mathring{E}$, la frontière de E. La frontière de l'ensemble ouvert E, $\mathring{E} = \bar{E} \diagdown E$ où $\bar{E}$ désigne la fermeture de E. Par contre, si la limite ci-dessus existe et $x_1 \in E$, alors $\beta = \infty$, $f(x_1) = 0$ et x, est un point d'équilibre de (1.9). Les exemples suivants illustrent ces idées.

Example 28. *Le problème de la valeur initiale*

$$\dot{x} = x^2, \quad x(0) = 1$$

a la solution $x(t) = \frac{1}{(1-t)}$ *définie sur son intervalle maximal d'existence* $(\alpha, \beta) = (-\infty, 1)$. *De plus,* $\lim_{t \to 1^-} x(t) = \infty$.

Example 29. *Le problème de la valeur initiale*

$$\dot{x} = \frac{-1}{2x}, \quad x(0) = 1$$

a la solution $x\ (t) = \sqrt{1-t}$ *définie sur son intervalle maximal d'existence* $(\alpha, \beta) = (-\infty, 1)$*. La fonction* $f(x) = \frac{-1}{(2x)} \in C^1(E)$ *où* $E = (0, \infty)$ *et* $\mathring{E} = \{0\}$*. Notez que* $\lim_{t\to 1^-} x(t) = 0 \in \mathring{E}$*.*

Lemma 30. *Soit* E *un sous-ensemble ouvert de* $\mathbb{R}^n$ *contenant xo et supposons* $f \in C^1(E)$*. Soient* $u_1(t)$ *et* $u_2(t)$ *des solutions du problème de valeur initiale* (1.9) *sur les intervalles* I_1 *et* I_2*. Alors* $0 \in I_1 \cap I_2$ *et si* I *est un intervalle ouvert contenant* 0 *et contenu dans* $I_1 \cap I_2$*, il s'ensuit que* $u_l(t) = u_2(t)$ *pour tout* $t \in I$*.*

Theorem 31. *Soit* E *un sous-ensemble ouvert de* $\mathbb{R}^n$ *et supposons que* $f \in C^1(E)$*. Alors pour chaque point* $x_0 \in E$*, il existe un intervalle maximal* J *sur lequel le problème de valeur initiale* (1.9) *a une solution unique,* $x(t)$*; c'est-à-dire si le problème de valeur initiale a une solution* $y(t)$ *sur un intervalle* I *alors* $I \subset J$ *et* $y(t) = x(t)$ *pour tout* $t \in I$*. De plus, l'intervalle maximal* J *est ouvert; ie ,* $J = (\alpha, \beta)$*.*

Proof. Par le théorème fondamental d'existence-unicité, le problème de la valeur initiale (1.9) a une solution unique sur un intervalle ouvert $(-a, a)$. Soit (α, β) l'union de tous les intervalles ouverts I tels que (1.9) a une solution sur I. On définit une fonction $x(t)$ sur (α, β) comme suit: Étant donné $t \in (\alpha, \beta)$, t appartient à un intervalle ouvert I tel que (1.9) a une solution $u(t)$ sur I; pour cela donné $t \in I$ définissons $x(t) = u(t)$. Alors $x(t)$ est une fonction bien définie de t puisque si $t \in I_1 \cap I_2$ où I_1 et I_2 sont deux intervalles ouverts quelconques tels que (1.9) a des solutions $u_1(t)$ et $u_2(t)$ sur I_1 et I_2 respectivement , puis par le lemme $u_1(t) = u_2(t)$ sur l'intervalle ouvert $I_1 \cap I_2$. De plus, $x(t)$ est une solution de (1.9) sur (α, β) puisque chaque point $t \in (\alpha, \beta)$ est contenu dans un intervalle ouvert I sur lequel le problème de valeur initiale (1.9) a une solution unique $u(t)$ et puisque $x(t)$ est d'accord avec $u(t)$ sur I. Le fait que J soit ouvert découle du fait que toute solution de (1.9) sur un intervalle $(\alpha, \beta]$. peut être continuée de manière unique à une solution sur un intervalle $(\alpha, \beta + a)$. avec $a > 0$. □

Theorem 32. . *Soit E un sous-ensemble ouvert de $\mathbb{R}^n$ contenant x_0, soit $f \in C^1(E)$, et soit (α, β) l'intervalle maximal d'existence de la solution $x(t)$ du problème de valeur initiale (Supposons que $\beta < \infty$. Alors, étant donné tout ensemble compact $K \subset E$, il existe en $t \in (\alpha, \beta)$ tel que $x(t) \notin K$.*

Proof. Puisque f est continue sur l'ensemble compact K, il existe un nombre positif M tel que $|f(x)| < M$ pour tout $x \in K$. Soit $x(t)$ la solution du problème de valeur initiale (1.9) sur son maximum intervalle d'existence (α, β) et supposons que $\beta < \infty$ et que $x(t) \in K$ pour tout $t \in (\alpha, \beta)$. Nous montrons d'abord que $\lim_{t \to \beta^-} x(t)$ existe. Si $\alpha < t_1 < t_2 < \beta$ alors

$$|x(t_1) - x(t_2)| \leq \int_{t_1}^{t_2} |f(x(s))|\, ds \leq M\, |t_1 - t_2|$$

Ainsi à mesure que t_1 et t_2 s'approchent β par la gauche, $|x(t_1) - x(t_2)| \to 0$ qui, par le critère de Cauchy de convergence dans $\mathbb{R}^n$ implique que $\lim_{t \to \beta^-} x(t)$ existe. Soit $x_1 = \lim_{t \to \beta^-} x(t)$. Alors $xl \in K \subset E$ puisque K est compact. Ensuite, définissons la fonction $u(t)$ sur $(\alpha, \beta]$ par

$$u(t) = \begin{cases} x(t) & \textit{pour } t \in (\alpha, \beta) \\ x_1 & \textit{pour } \ t = \beta \end{cases}$$

Alors $u(t)$ est différentiable sur $(\alpha, \beta]$. En effet,

$$u(t) = x_0 + \int_0^t f(u(s))ds$$

ce qui implique que

$$u'(\beta) = f(u(\beta))$$

c'est-à-dire que $u(t)$ est une solution du problème de valeur initiale (1.9) sur $(\alpha, \beta]$. La fonction $u(t)$ est appelée la suite de la solution $x(t)$ à $(\alpha, \beta]$. Puisque $x_1 \in E$, il découle du théorème fondamental d'existence-unicité que le problème de valeur initiale $x = f(x)$ avec $x(\beta) = x_1$ a une solution unique $x_1(t)$ sur un intervalle $(\beta - a, \beta + a)$. Par le lemme ci-dessus, $x_1(t) = u(t)$ sur $(\beta - a, \beta)$ et $x_1(\beta) = u(\beta) = x_1$. Donc, si nous définissons

$$v(t) = \begin{cases} u(t) & \textit{pour } t \in (\alpha, \beta] \\ x_1(t) & \textit{pour } \ t \in (\beta, \beta + a) \end{cases}$$

alors $v(t)$ est une solution du problème de valeur initiale (1.9) sur $(\alpha, \beta + a)$. Mais cela contredit le fait que (α, β) est l'intervalle maximal d'existence pour le problème de valeur initiale (1.9). Donc si $\beta < \infty$, on déduire que il existe $t \in (\alpha, \beta)$ tel que $x(t) \notin K$. □

Si (α, β) est l'intervalle maximal d'existence pour le problème de valeur initiale (1.9) alors $0 \in (\alpha, \beta)$ et les intervalles $[0, \beta)$ et $(\alpha, 0]$ sont appelés respectivement les intervalles maximaux d'existence à droite et à gauche. Essentiellement, la même preuve donne le résultat suivant.

Theorem 33. . *Soit E un sous-ensemble ouvert de $\mathbb{R}^n$ contenant x_0, soit $f \in C^1(E)$, et soit $(0, \beta)$ l'intervalle maximal d'existence de la solution $x(t)$ de la valeur initiale problème (1.9). Supposons que $\beta < \infty$. Alors étant donné tout ensemble compact $K \subset E$, il existe en $t \in (0, \beta)$ tel que $x(t) \notin K$.*

Corollary 34. . *Sous l'hypothèse du théorème ci-dessus, si $\beta < \infty$ et si*

$$x_1 = \lim_{t \to \beta^-} x(t)$$

existe alors $x_1 \in \mathring{E}$.

Proof. Si $x_1 = \lim_{t \to \beta^-} x(t)$, alors la fonction$u(t) = \begin{cases} x(t) & pour\ t \in [\alpha, \beta) \\ x_1 & pour\ \ t = \beta \end{cases}$ □

est continue sur $[0, \beta]$. Soit K l'image de l'ensemble compact $[0, \beta]$ sous l'application continue $u(t)$; c'est à dire.,

$$K = \{x \in \mathbb{R}^n \diagup x = u(t)\ pour\ un\ certain\ t \in [0, \beta]).\}$$

Alors K est compact. Supposons que $x_1 \in E$. Alors $K \subset E$ et il résulte du Théorème 33 qu'il existe $t \in (0, \beta)$ tel que $x(t) \notin K$. C'est une contradiction et donc $x_1 \notin E$. Mais puisque $x(t) \in E$ pour tout $t \in [0, \beta)$, il s'ensuit que $x_1 = \lim_{t \to \beta^-} x(t) \in E$. Donc $x_1 \in \bar{E} \setminus E$; c'est-à-dire, $x_1 \in \mathring{E}$.

Corollary 35. . *Soit E un sous-ensemble ouvert de $\mathbb{R}^n$ contenant x_0, soit $f \in C^1(E)$, et soit $[0, \beta)$ l'intervalle maximal d'existence de la solution $x(t)$ du problème de valeur initiale (1.9). Supposons qu'il existe un ensemble compact $K \subset E$ tel que*

$$\{y \in \mathbb{R}^n \diagup y = x(t) \text{ pour certains } t \in [0, \beta)\} \subset K.$$

Il s'ensuit alors que $\beta = \infty$; c'est-à-dire que le problème de valeur initiale (1.9) a une solution $x(t)$ sur $[0, \infty)$

Theorem 36. . *Soit E un sous-ensemble ouvert de $\mathbb{R}^n$ contenant x_0 et soit $f \in C^1(E)$. Supposons que le problème de valeur initiale (1.9) ait une solution $x(t, x_0)$ définie sur un intervalle fermé $[a, b]$. Alors il existe un $\delta > 0$ et une constante positive K telle que pour tout $y \in N_\delta(x_0)$ le problème de la valeur initiale*

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x) \\ x(0) = y \end{cases} \tag{1.10}$$

a une solution unique $x(t, y)$ définie sur $[a, b]$ qui satisfait

$$|x(t, y) - x(t, x_0)| < |y - x_0| \, e^{Kt}$$

et

$$\lim_{y \to x_0} x(t, y) = x(t, x_0)$$

uniformément pour tout $t \in [a, b]$.

Lemma 37. . *Soit E un sous-ensemble ouvert de $\mathbb{R}^n$ et soit A un sous-ensemble compact de E. Alors si $f : E \to \mathbb{R}^n$ est localement Lipschitz sur E, il s'ensuit que f satisfait une condition de Lipschitz sur A.*

Proof. (du théorème 36). Puisque $[a, b]$ est compact et que $x(t, x_0)$ est une fonction continue de t, $\{x \in \mathbb{R}^n \diagup x = x(t, x_0) \text{ et } a < t < b\}$ est un sous-ensemble compact de E. Et puisque E est ouvert, il existe un $\varepsilon > 0$ tel que l'ensemble compact $\square$

$$A = \{x \in \mathbb{R}^n \diagup |x - x(t, x_0)| < \varepsilon \text{ } and \text{ } a < t < b\}$$

est un sous-ensemble de E. Puisque $f \in C^1(E)$, alors que f est localement Lipschitizienne dans E; puis par le lemme ci-dessus, f satisfait une condition de Lipschitz

$$|f(y) - f(x)| \leq K |y - x|$$

pour tout $x, y \in A$. Choisissez $\delta > 0$ si petit que $\delta < \varepsilon$ et $\delta < \varepsilon e^{-K(b-a)}$. Soit $y \in N_\delta(x_0)$ et soit $x(t, y)$ la solution du problème de valeur initiale (1.10) sur son intervalle d'existence maximale (α, β). Nous montrerons que $[a, b] \subset (\alpha, \beta)$.

Supposons que $\beta < b$. Il s'ensuit alors que $x(t, y) \in A$ pour tout $t \in (\alpha, \beta)$ car si ce n'était pas vrai alors il existerait un $t^* \in (\alpha, \beta)$ tel que $x(t, x_0) \in A$ for $t \in (a, t^*)$ et $x(t^*, y) \in A$. Mais alors

$$\begin{aligned} |x(t, y) - x(t, x_0)| &= |y - x_0| + \left| \int_0^t f(x(s, y)) - f(x(s, x_0)) ds \right| \\ &\leq |y - x_0| + K \int_0^{|t|} |x(s, y) - x(s, x_0)| \end{aligned}$$

pour tout $t \in (a, t^*]$. Et puis par le lemme de Gronwall, il s'ensuit que

$$|x(t, y) - x(t, x_0)| < |y - x_0| e^{K|t^*|} \leq \delta e^{K(b-a)} \leq \varepsilon$$

puisque $t^* < \beta < b$. Ainsi $x(t^*, y)$ est un point intérieur de A, une contradiction. Ainsi, $x(t, y) \in A$ pour tout $t \in (\alpha, \beta)$. Mais alors par le théorème 32, (α, β) n'est pas l'intervalle maximal d'existence de $x(t, y)$, une contradiction. Ainsi $b < \beta$.

Il est également prouvé que $\alpha < a$. Ainsi, pour tout $y \in N_\delta(x_0)$, le problème de valeur initiale (1.10) a une solution unique définie sur $[a, b]$. De plus, si l'on suppose qu'il y a en $t^* \in [a, b)$ tel que $x(t, y) \in A$ pour tout $t \in [a, t^*)$ et $x(t^*, y) \in A$, une répétition de ce qui précède argument basé sur celui de lemme de Gronwall conduit à une contradiction et montre que $x(t, y) \in A$ pour tout $t \in [a, b]$ et donc que

$$|x(t, y) - x(t, x_0)| < |y - x_0| e^{Kt}$$

et

$$\lim_{y\to x_0} x(t,y) = x(t,x_0)$$

uniformément pour tout $t \in [a,b]$.

Exercise 38. ***Trouver l'intervalle maximal de l'existence*** (α,β) ***pour les problèmes de valeur initiaux suivants et si*** $\alpha > -\infty$ ***ou*** $\beta < \infty$ ***discutent de la limite de la solution*** $t \to \alpha^+$ ***ou t***$\to \beta^-$ ***respectivement:***

$$\begin{cases} \dot{x} = x^2 \\ x(0) = x_0 \end{cases}, \quad \begin{cases} \dot{x} = x^2 - 4 \\ x(0) = 0 \end{cases}, \quad \begin{cases} \dot{x} = x^3 \\ x(0) = x_0 > 0 \end{cases},$$

$$\begin{cases} \dot{x} = x^2 \\ \dot{y} = y + \dfrac{1}{x} \\ x(0) = 1, y(0) = 1 \end{cases}, \quad \begin{cases} \dot{x} = \dfrac{1}{2x} \\ \dot{y} = y^2 \\ x(0) = 1, y(0) = 1 \end{cases}, \quad \begin{cases} \dot{x} = \dfrac{1}{2x} \\ \dot{y} = x \\ x(0) = 1, y(0) = 1 \end{cases}.$$

Exercise 39. . ***Déterminer*** ϕ_t ***pour l'équation***

$$\dot{x} = x^2 - 1$$

2. ***Pour*** $x(0) = 2$ ***trouver l'intervalle maximal de l'existence*** $I(2) = (\alpha,\beta)$

3. ***Si*** $\alpha > -\infty$ ***ou*** $\beta < \infty$ ***montrer que***

$$\lim_{t\to\alpha^+} \phi_t(2) \in \dot{E} \ \ ou \ \lim_{t\to\beta^-} \phi_t(2) \in \dot{E}.$$

1.4 LE FLOT DÉFINI PAR UNE ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE

Definition 40. *Soit E un sous-ensemble ouvert de $\mathbb{R}^n$ et soit $f \in C^1(E)$. Pour $x_0 \in E$, soit $\varphi(t, x_0)$ la solution du problème de valeur initiale (1.10) défini sur son intervalle maximal d'existence $I(x_0)$. De plus pour $t \in I(x_0)$, l'ensemble des ses application φ_t défini par*

$$\varphi_t(x_0) = \varphi(t, x_0)$$

est appelé le flot de l'équation différentielle (1.1) ou le flot défini par l'équation différentielle (1.1).

Example 41. *Considérons l'équation différentielle*

$$\dot{x} = \frac{1}{x-1}$$

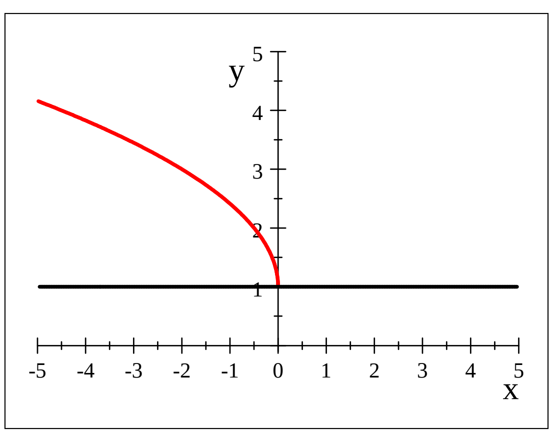
avec $f(x) = \frac{1}{x-1} \in C^1(E)$ et $E = \{x \in \mathbb{R} \diagup x > 1\}$. La solution de cette équation différentielle et de la condition initiale $x(0) = x_0$ est donnée par

$$\varphi(t, x_0) = \sqrt{x_0^2 - 2x_0 + 2t + 1} + 1$$

sur son intervalle maximal d'existence $I(x_0) = \left(x_0 - \frac{1}{2}x_0^2 - \frac{1}{2}, \infty\right)$

$$x_0^2 - 2x_0 + 2t + 1 > 0$$

La région Ω pour ce problème est illustrée à la figure .



La région Ω

Theorem 42. *Soit E un sous-ensemble ouvert de $\mathbb{R}^n$ et soit $f \in C^{1(}E)$. Alors Ω est un sous-ensemble ouvert de $\mathbb{R} \times E$ et $\varphi \in C^1(\Omega)$.*

Proof. Si $(t_0, x_0) \in \Omega$ et $t_0 > 0$, alors selon la définition de l'ensemble Ω, la solution $x(t) = \varphi(t, x_0)$ du problème de valeur initiale (1.10) est définie sur $[0, t_0]$. Ainsi, comme dans la démonstration du théorème 32, la solution $x(t)$ peut être étendue à un intervalle $[0, t_0 + \varepsilon]$ pour certains $\varepsilon > 0$; c'est-à-dire que $\varphi(t, x_0)$ est défini sur l'intervalle fermé $[t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon]$. Il découle alors du théorème 36 qu'il existe un voisinage de x_0; $N_\delta(x0)$, tel que $\varphi(t, y)$ est défini sur $[t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon] \times N_\delta(x_0)$; c'est-à-dire $(t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon) \times N_\delta(x_0) \subset \Omega$. Par conséquent, Ω est ouvert dans $\mathbb{R} \times E$. Il découle du théorème 36 que $\varphi \in C^1(G)$ où $G = (t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon) \times N_\delta(x_0)$. Une preuve similaire pour $t_0 \leq 0$, et puisque (t_0, x_0) est un point arbitraire dans Ω, il s'ensuit que $\varphi \in C^1(\Omega)$ □

Remark 43. *Le théorème 42 peut être généralisé pour montrer que si $f \in C^r(E)$ avec $r > 1$, alors $\varphi \in C^r(\Omega)$ et que si f est analytique dans E, alors φ est analytique dans Ω.*

Theorem 44. . *Soit E un ensemble ouvert de $\mathbb{R}^n$ et soit $f \in C^1(E)$. Alors pour tout $x_0 \in E$, si $t \in I(x_0)$ et $s \in I(\varphi_t(x_0))$, il s'ensuit que $s + t \in I(x_0)$ et*

$$\varphi_{s+t}(x_0) = \varphi_s(\varphi_t(x))$$

Proof. Supposons que $s > 0, t \in I(x_0)$ et $s \in I(\varphi_t(x_0)$. Soit l'intervalle maximal $I(x_0) = (\alpha, \beta)$ et définissons la fonction $x : (\alpha, s + t] \to E$ par

$$x(t) = \begin{cases} \varphi(r, x_0) & if\ \alpha < r < t \\ \varphi(r - t, \varphi_t(x_0)) & if\ \ t < r < s + t. \end{cases}$$

□

Alors $x(r)$ est une solution du problème de valeur initiale (1.10) sur $(\alpha, s + t]$. D'où $s + t \in I(x_0)$ et par unicité des solutions

$$\varphi_{s+t}(x_0) = X(s + t) = \varphi(s, \varphi(t, x_0)) = \varphi_s(\varphi_t(x_{0)}$$

Si $s = 0$, l'énoncé du théorème suit immédiatement. Et si $s < 0$, alors on définit la fonction $x : [s+t, \beta) \to E$ par

$$x(t) = \begin{cases} \varphi(r, x_0) & if\ t < r < \beta \\ \varphi(r - t, \varphi_t(x_0)) & if\ \ s + t < r < t. \end{cases}$$

Alors $x(r)$ est une solution du problème de valeur initiale (1.10) sur $[s+t, \beta)$ et le dernier énoncé du théorème découle de l'unicité des solutions comme ci-dessus.

Theorem 45. *. Sous les hypothèses du théorème 42, si $(t, x_0) \in \Omega$ alors il existe un voisinage U de x_0 tel que $\{t\} \times U \subset \Omega$ Il s'ensuit alors que l'ensemble $V = \varphi_t(U)$ est ouvert dans E et*

$\varphi_{-t}(\varphi_t(x)) = x, \forall x \in U$

$\varphi_t\left(\varphi_{-t}(x)\right) = y, \forall y \in V$

Proof. Si $(t, x_0) \in \Omega$ alors si suit comme dans la démonstration du théorème 42 qu'il existe un voisinage de $x_0, U = N_\delta(x_0)$, tel que $(t-\varepsilon, t+\varepsilon) \times U \subset \Omega$; ainsi, $\{t\} \times U \subset \Omega$. Pour $x \in U$, soit $y = \varphi_t(x)$ pour tout $t \in I(x)$. ensuite $-t \in I(y)$ puisque la fonction $h(s) = \varphi(s+t, y)$ est une solution de (1.1) sur $[-t, 0]$ qui satisfait $h(-t) = y$; c'est-à-dire que φ_{-t} est défini sur l'ensemble $V = \varphi_t(U)$. Il découle alors du théorème 44 que $\varphi_{-t}(\varphi_t(x)) = \varphi_0(x) = x$ pour tout $x \in U$ et que $\varphi_t(\varphi_{-t}(y)) = \varphi_0(y) = y$ pour tout $y \in V$. Il reste à prouver que V est ouvert. Soit $V \subset V^*$ le sous-ensemble maximal de E sur lequel φ_{-t} est défini. V^* est ouvert et $\varphi_{-t} : V^* \to E$ est continu car par le théorème 42, φ_t est continu. Par conséquent, l'image inverse de l'ensemble ouvert U sous l'application continue φ_{-t}, c'est-à-dire $\varphi_t(U)$, est ouverte dans E. Ainsi, V est ouvert dans E. □

Definition 46. *Soit E un sous-ensemble ouvert de $\mathbb{R}^n$, soit $f \in C^1(E)$, et soit $\varphi_t : E \to E$ le flot de l'équation différentielle (1.1) définie pour tout $t \in \mathbb{R}$. Alors un ensemble $S \subset E$ est appelé invariant par rapport au flot φ_t si $\varphi_t(S) \subset S$ pour tout $t \in \mathbb{R}_+$ et S est appelé positivement invariant (ou négativement) par rapport au flot φ_t si $\varphi_t(S) \subset S$ pour tout $t > 0$ (ou $t < 0$).*

Example 47. *Montrer que* $S = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \diagup y = \frac{-x^2}{3} \right\}$ *est invariant par rapport au flot* φ_t *du système*

$$\begin{cases} \dot{x} = -x \\ \dot{y} = y + x^2 \\ (x(0), y(0)) = (C_1, C_2) \end{cases}$$

La solution générale de $\dot{x} = -x$, *est*

$$x(t) = x(0)\, e^{-t} = C_1 e^{-t}$$

on a donc $\dot{y} = y + (C_1 e^{-t})^2$, *la solution de* $\dot{y} = y$, *est* $y = \alpha e^t$

$$\alpha' e^t = \left(C_1 e^{-t}\right)^2 \to \alpha' = C_1^2 e^{-3t} \to \alpha = -\frac{C_1^2}{3} e^{-3t} + a$$

donc :

$$\begin{aligned} y &= \left(-\frac{C_1^2}{3} e^{-3t} + a\right) e^t \\ y(0) &= C_2 \to \left(-\frac{C_1^2}{3} + a\right) = C_2 \to a = \frac{1}{3} C_1^2 + C_2 \end{aligned}$$

alors

$$y = \left(-\frac{C_1^2}{3} e^{-3t} + \frac{1}{3} C_1^2 + C_2\right) e^t$$

donc le flot du système est

$$\varphi_t(x,y) = \begin{pmatrix} x e^{-t} \\ \left(-\frac{x^2}{3} e^{-3t} + \frac{x^2}{3} + y\right) e^t \end{pmatrix}$$

soit (x,y)$\in S \to y = \frac{-x^2}{3}$ *donc*

$$\varphi_t\left(x, \frac{-x^2}{3}\right) = \begin{pmatrix} x e^{-t} \\ \left(-\frac{x^2}{3} e^{-3t} + \frac{x^2}{3} + \frac{-x^2}{3}\right) e^t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x e^{-t} \\ -\frac{1}{3} x^2 e^{-2t} \end{pmatrix}$$

on a $-\frac{1}{3} x^2 e^{-2t} = -\frac{1}{3}\left(x e^{-t}\right)$ *donc* $\varphi_t(S) \subset S$.

1.5 LINÉARISATION

Definition 48. . *Un point $x_0 \in \mathbb{R}^n$ est appelé un point d'équilibre ou point critique de* (1.1) *si $f(x_0) = 0$.*

Un point d'équilibre x_0 est appelé un point d'équilibre hyperbolique de (1.1) *si aucune des valeurs propres de la matrice $Df(x_0)$ ont une partie réelle nulle.*

Le système linéaire

$$\dot{x} = Ax \tag{1.11}$$

avec la matrice $A = Df(x_0)$ est appelé la linéarisation de (1.1) *en x_0.*

Remark 49. *tout point d'équilibre x_0 peut être ramené a l'origine par un simple changement de variable $X = x - x_0$*

Si $x_0 = 0$ est un point d'équilibre de (1.1), alors $f(0) = 0$ et, par le théorème de Taylor,

$$f(x) = Df(0)x + \frac{1}{2}D^2f(0)(x,x) +$$

Il s'ensuit que la fonction linéaire $Df(0)x$ est une bonne première approximation de la fonction non linéaire $f(x)$ près de $x = 0$ et il est raisonnable de s'attendre à ce que le comportement du système non linéaire (1.1) près du point $x = 0$ sera approchée par le comportement de sa linéarisation à $x = 0$.

Definition 50. *On dit que deux systèmes autonomes d'équations différentielles tels que* (1.1) *et* (1.11) *sont topologiquement équivalents dans un voisinage de l'origine s'il existe un homéomorphisme $H : U \to V$ qui transforme de la manier bijective les trajectoires du système* (1.1) *en U en celle du système* (1.11) *en V et préserve leur orientation temporelle en ce sens que si une trajectoire est dirigée de x_1 à x_2 en U, alors sa l'image est dirigée de $H(x_1)$ vers $H(x_2)$ en V.*

-Si l'homéomorphisme H préserve la paramétrisation par le temps, alors les systèmes (1.1) *et* (1.11) *sont dits topologiquement conjugués dans un voisinage de l'origine.*

Example 51. *Soient A et B deux matrices somblables ($A = pBp^{-1}$), alors les systèmes $\dot{x} = Ax$ et $\dot{x} = Bx$ sont topologiquement équivalents*

En effet

$$\dot{x} = Ax = pBp^{-1}x$$

On choisit $y = p^{-1}x = h(x)$ *donc*

$$x = py \Rightarrow \dot{y} = p^{-1}\dot{x} = p^{-1}pBp^{-1}x = Bp^{-1}x = By$$

et la solution

$$y = H(x) = p^{-1}x = p^{-1}e^{At}x_0 = p^{-1}pe^{Bt}p^{-1}x_0 = e^{Bt}y_0$$

donc

$$H(e^{At}x) = p^{-1}e^{At}x = e^{Bt}p^{-1}x = e^{Bt}\left(H(x)\right) \rightarrow H \circ e^{At} = e^{Bt} \circ H$$

Application

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}$$

et

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} = pBp^{-1}$$

donc la base de de A est $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$ *la base de B est la base canonique et Le homéomorphisme* $H(x) = px$ *est simplement une rotation de 45 °*

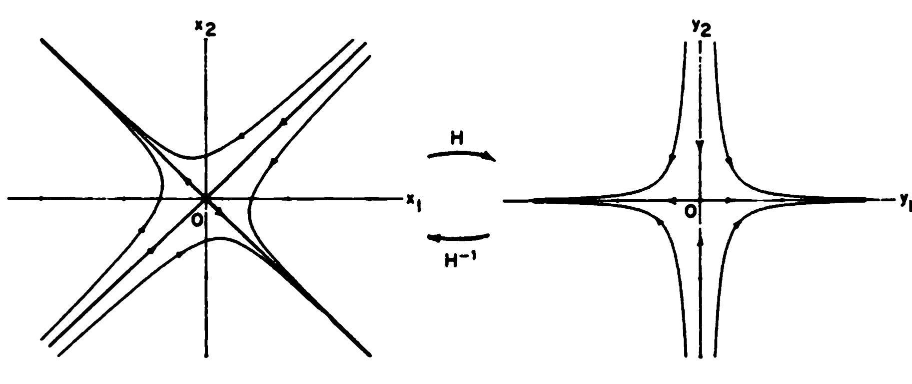


Figure 1

1.6 LE THÉORÈME HARTMAN-GROBMAN

Theorem 52. *Soit E un sous-ensemble ouvert de $\mathbb{R}^n$ contenant l'origine, soit $f \in C^1(E)$, et soit φ_t le flot du système non linéaire (1.1). Supposons que $f(0) = 0$ et que la matrice $A = Df(0)$ n'a pas de valeur propre avec une partie réelle nulle. Alors il existe un homéomorphisme H d'un ensemble ouvert U contenant l'origine sur un ensemble ouvert V contenant l'origine tel que pour chaque $x_0 \in U$, il existe un intervalle ouvert $I_0 \subset \mathbb{R}$ contenant zéro tel que pour tout $x_0 \in U$ et $t \in I_0$*

$$Ho\varphi_t(x_0) = e^{At}H(x_0)$$

c'est-à-dire que H transforme les trajectoires de (1.1) au voisinage de l'origine sur les trajectoires de (1.11) au voisinage de l'origine et préserve la paramétrisation par le temps.

Exercise 53. ***Montrer que l'application continue** $H : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ **définie par***

$$H(x, y) = \begin{pmatrix} x \\ y + \dfrac{x^2}{3} \end{pmatrix}$$

a un inverse continu** $H^{-1} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ **et que le non linéaire système** $\dot{X} = f(X(t))$ **avec

$$f(x, y) = \begin{pmatrix} -x \\ y + x^2 \end{pmatrix}$$

est transformé en système linéaire** $\dot{X} = AX$ **avec** $A = Df(0)$ **par** H **c'est-à-dire si

$Y = H(X)$***, montrer que** $\dot{Y} = AY$**.***

Exercise 54. ***Montrer que l'application continue** $H : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ **définie par***

$$H(x, y, z) = \begin{pmatrix} x \\ y + x^2 \\ z + \dfrac{x^2}{3} \end{pmatrix}$$

a un inverse continu $H^{-1} : R^3 \to R^3$ ***et que le non linéaire système*** $\dot{X} = f(X(t))$ ***avec***

$$f(x, y, z) = \begin{pmatrix} -x \\ -y + x^2 \\ z + x^2 \end{pmatrix}$$

est transformé en système linéaire $\dot{X} = AX$ ***avec*** $A = Df(0)$ ***par*** H ***c'est-à-dire si*** $Y = H(X)$***, montrer que*** $\dot{Y} = AY$***.***

1.7 LE THÉORÈME DU VARIÉTÉ STABLE

Definition 55. *(Sous-espaces invariants). Les sous-espaces stables et instables de la linéarisation de* f *au point d'équilibre* x^* *sont les trois sous-espaces linéaires* E_u, E_s*, parcourus par les sous-ensembles de vecteurs propres (éventuellement généralisés) de* $Df(x^*)$ *dont les valeurs propres ont des parties réelles* $< 0, > 0, = 0$ *respectivement.*

Definition 56. *-On appele variété stable aux voisinage d'un point d'équilibre hyperbolique* x^* *du système non linéaire*

$$\dot{x} = f(x) \tag{1.12}$$

l'ensemble S *qui vérife les propriétes suivantes*

- S *est une tangante en* x^* *au sous espace stable* E_s
- S *positivement invariant pour* φ_t *(*φ_t *c'est le flot de* (1.12)
- $\lim\limits_{t\to\infty} \varphi_t(C) = x^*$ *pour tout* $C \in S$

donc on a

$$S(x^*) = \left\{ x \in v(x^*) : \lim_{t\to+\infty} \varphi_t(x) = x^* \text{ et } \varphi_t(x) \in v(x^*), \forall t \geq 0 \right\}$$

- On appele variété instable (local) aux voisinage d'un point d'équilibre hyperbolique x^* *du système non linéaire* (1.12) *l'ensemble* U *qui vérife les propriétes suivantes*

- U *est une tangante en* x^* *au sous espace instable* E_u
- U *négativement invariant pour* φ_t *(*φ_t *c'est le flot de* (1.12)

- $\lim\limits_{t\to\infty} \varphi_t(C) = x^*$ *pour tout* $C \in U$

donc on a

$$U(x^*) = \left\{ x \in v(x^*) : \lim_{t\to-\infty} \varphi_t(x) = x^* \text{ et } \varphi_t(x) \in v(x^*), \forall t \leq 0 \right\}$$

Definition 57. *Les variétés globales stables et instables de* x^* *sont définies par*

$$\begin{aligned} W_S(x^*) &= \cup_{t\geq 0} \varphi_t(S) \\ W_U(x^*) &= \cup_{t\leq 0} \varphi_t(U) \end{aligned}$$

Example 58. *on considère le système*

$$\begin{cases} \dot{x} = -x \\ \dot{y} = -y + x^2 \\ \dot{z} = z + x^2 \end{cases}, (x(0), y(0), z(0)) = (C_1, C_2, C_3)$$

trouver les variétés stables et instables et les sous-espaces stables et instables de ce système au voisinage $(0,0,0)$.

Solution 59. $(0,0,0)$ *c'est l'unique point d'equilibre du système*

$$Df(0,0,0) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

Les valeurs propres

$\lambda_1 = -1 < 0$ *valeur prppre double* $\rightarrow \lambda_1 < 0$*variété stable*

$\lambda_2 = 1 > 0$ *valeur propre simple* $\rightarrow \lambda_2 > 0$*variété instable*

Les sous-espaces stables et instables (propres)

$$E_\lambda = \left\{ v = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : Df(0,0,0)\, v = \lambda v \right\}$$

donc

$$\begin{aligned} E_u &= \langle (0,0,1) \rangle = lax\ z \\ E_s &= \langle (1,0,0), (0,1,0) \rangle = plan\,(x, y) \end{aligned}$$

Le flot du système

La solution du $\dot{x} = -x, \;\; x(0) = C_1,$ *est*

$$x\,(t) = C_1 e^{-t}$$

pour l'équation $\dot{y} = -y + x^2$ *avec* $x\,(t) = C_1 e^{-t}$

$$\dot{y} = -y + \left(C_1 e^{-t}\right)^2$$

la solution générale de cette dernière équation est

$$y\,(t) = \alpha e^{-t} - C_1^2 e^{-2t}$$

on utilise la condition intial $y(0) = C_2$ *on trouve*

$$\alpha = C_2 + C_1^2$$

donc y *est de la forme*

$$y\,(t) = \left(C_2 + C_1^2\right) e^{-t} - C_1^2 e^{-2t}$$

pour la 3ème équation on a

$$\dot{z} = z + \left(C_1 e^{-t}\right)^2$$

la solution générale de cette équation est

$$z\,(t) = k e^{t} - \frac{1}{3} C_1^2 e^{-2t}$$

on utilise la condition intial $z(0) = C_3$ *on trouve*

$$k = C_3 + \frac{1}{3} C_1^2$$

donc

$$z\,(t) = \left(C_3 + \frac{1}{3} C_1^2\right) e^{t} - \frac{1}{3} C_1^2 e^{-2t}$$

et le floy du système est

$$\varphi_t\,(C_1, C_2, C_3) = \begin{pmatrix} C_1 e^{-t} \\ \left(C_2 + C_1^2\right) e^{-t} - C_1^2 e^{-2t} \\ \left(C_3 + \frac{1}{3} C_1^2\right) e^{t} - \frac{1}{3} C_1^2 e^{-2t} \end{pmatrix}$$

La variété stable: *on a*

$$\lim_{t \to +\infty} \varphi_t(x) = (0,0,0) \to C_3 = -\frac{1}{3} C_1^2$$

donc

$$S(x^*) = \left\{ (C_1, C_2, C_3) \in \mathbb{R}^3 : C_3 = -\frac{1}{3} C_1^2 \right\}$$

La varité instable*: on a*

$$\lim_{t \to -\infty} \varphi_t(x) = (0,0,0) \to C_3 = -\frac{1}{3} C_1^2$$

donc

$$U(x^*) = \left\{ (C_1, C_2, C_3) \in \mathbb{R}^3 : C_1 = C_2 = 0 \right\}$$

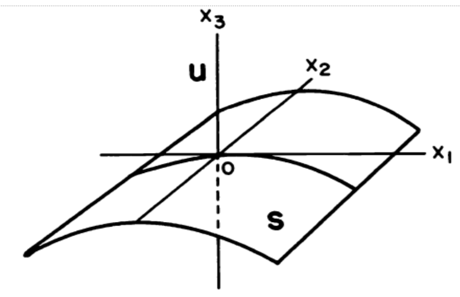


Figure 1

Theorem 60. *(Le théorème de la variété stable). Soit E un sous-ensemble ouvert de $\mathbb{R}^n$ contenant l'origine, soit $f \in C^1(E)$, et soit φ_t le flot du système non linéaire (1.12). Supposons que $f(0) = 0$ et que $Df(0)$ a k valeurs propres à partie réelle négative et $n-k$ valeurs propres à partie réelle positive. Il existe alors une variété stable à dimensions k et une variété instable de dimension $n-k$ de (1.12) en 0*

1.8 STABILITÉ ET FONCTIONS LYAPUNOV

1.8.1 Stabilité de l'équilibre

Definition 61. *Soit x^* un point d'équilibre du système (1.12).*

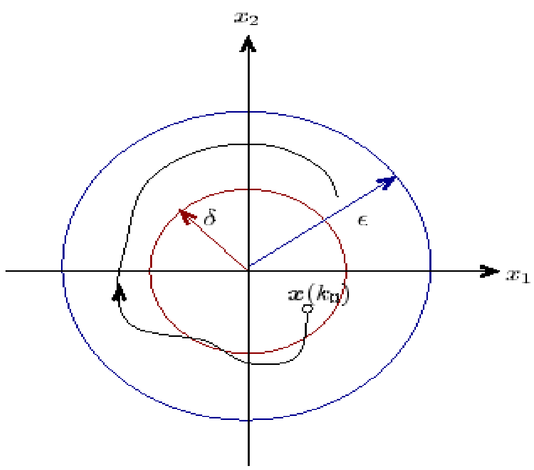
- *x^* est dit stable si pour tout $\varepsilon > 0$, on peut trouver un $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ tel que chaque fois*

$$\|x - x^*\| < \delta \Longrightarrow \|\varphi_t(x) - x^*\| < \varepsilon, \forall t \geq 0$$

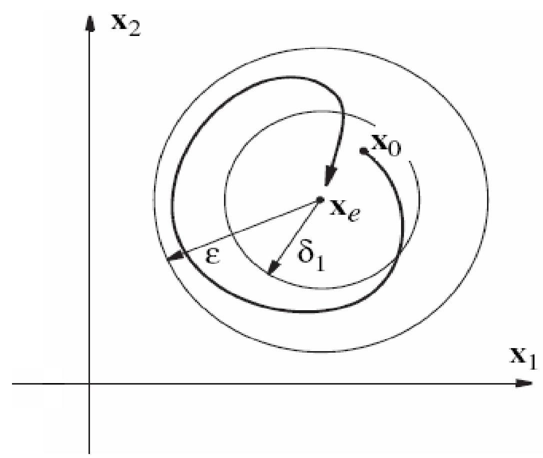
- *x^* est asymptotiquement stable si et seulement si x^* est stable et*

$$\lim_{t \longrightarrow \infty} \|\varphi_t(x) - x^*\| = 0.$$

- *x^* est appelé instable s'il n'est pas stable.*



Stable



Asymptotiquement stable

Remark 62. *-Un point d'équilibre x^* d'un système différentiel est dit asymptotiquement stable s'il est stable et s'il existe un voisinage V de x^* tel que toute trajectoire traversant V convergent vers x^* lorsque t tend vers l'infini.*

-La notion de stabilité asymptotique est plus forte que la notion de stabilité.

-La stabilité asymptotique impose que la limite des trajectoires lorsque $t \to +\infty$ soit le point d'équilibre, tandis que la stabilité neutre (stable mais pas asymptotiquement stable) impose seulement que les trajectoires restent dans un voisinage du point d'équilibre sans nécessairement tendre vers ce point.

Corollary 63. *Supposons que que toutes les valeurs propres de $A = Df(x^*)$ ont des parties réelles strictement négatives. Alors x^* est asymptotiquement stable.*

Corollary 64. *Supposons que x^* est un point d'équilibre tel que $A = Df(x^*)$ a au moins une valeur propre avec une partie réelle positive. Alors x^* est instable.*

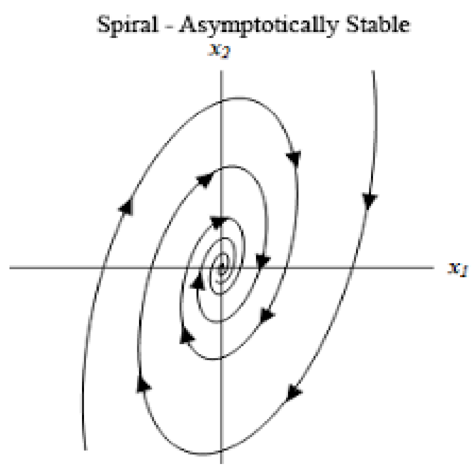
La linéarisation du système (1.12) au voisinage d'un équilibre x^* est l'équation (**??**)

• x^* est dit linéairement stable si $x = 0$ est un équilibre stable de son linéarisation, et de même dans les cas asymptotiquement stables et instables.

• x^* est linéairement asymptotiquement stable si et seulement si toutes les valeurs propres de $Df(x^*)$ ont une partie réelle négative;

• x^* est linéairement stable si et seulement si aucune valeur propre de $Df(x^*)$ n'a de partie réelle positive, et tout les valeurs propres purement imaginaires ont des multiplicités algébriques et géométriques égales

Example 65. *foyer stabe is asymptotiquement stable*



Theorem 66. *(Liapunov). Soit E un sous-ensemble ouvert de $\mathbb{R}^n$ contenant x^*, soit U un voisinage de x^* et posons $U_0 = U \backslash \{x^*\}$. Supposons que $f \in C^1(E)$ et que $f(x^*) = 0$. Supposons en outre qu'il existe une fonction valuée réelle $V \in C^1(E)$ satisfaisant $V(x^*) = 0$ et $V(x) > 0$ si $x \neq x^*$. Alors*

1. Si la dérivée de V le long des orbites est négative en U_0, c'est-à-dire

$$\dot{V}(x) = \frac{d}{dt} V(\varphi_t(x)) \Big|_{t=0} = \nabla V.f(x) \leq 0, \forall x \in U0$$

Alors x^* est stable.

2. si la dérivée de V le long des orbites est strictement négative,

$$\dot{V}(x) = \nabla V.f(x) < 0, \forall x \in U0$$

alors x^* est asymptotiquement stable.

3. si la dérivée de V le long des orbites est positive,

$$\dot{V}(x) = \nabla V.f(x) > 0, \forall x \in U0$$

alors x^* est instable.

Example 67. *Soit le système*

$$\begin{cases} \dot{x} = (x-2)^3 \\ \dot{y} = y^3 \end{cases} \tag{1.13}$$

Etudier la stabilité des points d'équilibre au sens Lyapunov

On a $(2,0)$ est un point d'équilibre de système

on fait le changement de variable $u = x-2, y = v$ donc le système

$$\begin{cases} \dot{u} = u^3 \\ \dot{v} = v^3 \end{cases} \tag{1.14}$$

on a

$$Df(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

donc (0,0) est un point d'équilibre non hyperbolique pour le système et le théorème de G-H ne s'applique pas, on utilise la fonction de Lyapunov.

Soit la fonction quadratique

$$V(x,y) = x^2 + y^2$$

est une fonction définie positive c'està dire $V(0,0) = 0$ et $V(x,y) > 0$ si $(x,y) \neq (0,0)$ et ona

$$\dot{V}(x) = \nabla V.f(u,v) = \begin{pmatrix} 2u & 2v \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u^3 \\ v^3 \end{pmatrix} = 2u^4 + 2v^4 > 0$$

sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, L'origine est donc un point d'équilibre instable de système (1.14) et par suite $(2,0)$ est un point d'équilibre instable de système (1.13).

Example 68. *Donner des conditions suffisantes sur les paramètres des équations de Lorenz*

$$\begin{cases} \dot{x} = \delta\left(x-y\right) \\ \dot{y} = rx - y - xz \\ \dot{z} = -bz + xy \end{cases}$$

pour que toutes les orbites convergent vers le point $(0,0,0)$ *(l'origine est dite globalement asymptotiquement stable).*

Soit

$$V(X) = C_1x^2 + C_2y^2 + C_3z^2$$

avec C_1, C_2, C_3 *sont des constantes positives*

En calculant $V(x) = DV(x)f(x)$, *on trouve*

$$\begin{aligned} \dot{V}(X) &= \begin{pmatrix} 2C_1x & 2C_2y & 2C_3z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta\left(x-y\right) \\ rx-y-xz \\ -bz+xy \end{pmatrix} \\ &= 2\delta C_1x^2 + \left(2C_3 - 2C_2\right)xyz + \left(2rC_2 - 2\delta C_1\right)xy + \left(-2C_2\right)y^2 + \left(-2bC_3\right)z^2 \end{aligned}$$

si on pose

$$\begin{aligned} \left(2C_3 - 2C_2\right) &= 0 \\ \left(2rC_2 - 2\delta C_1\right) &= 0 \\ \delta &< 0 \end{aligned}$$

on trouve

$$r = \delta\frac{C_1}{C_2}, C_3 = C_2 > 0, b > 0$$

et

$$\dot{V}(X) = 2\delta C_1x^2 - 2C_2y^2 - 2bC_3z^2 < 0$$

sur $\mathbb{R}^3 \diagdown \left\{(0,0,0)\right\}$ *,l'origine est asymptotiquement stable*

Remark 69. *Considérons l'équation différentielle du second ordre*

$$\ddot{x} + q(x) = 0$$

où la fonction continue $q(x)$ *satisfait* $xq(x) > 0$ *pour* $x \neq 0$. *Cette équation différentielle peut être écrite comme le système*

$$\begin{cases} \dot{x} = x \\ \dot{y} = -q(x) \end{cases}$$

L'énergie totale du système

$$V(X) = \frac{y^2}{2} + \int_0^x q(s)ds$$

sert de fonction de Liapunov pour ce système.

$$\dot{V}(x) = q(x)y + y\left(-q(x)\right) = 0.$$

Les courbes de solution sont données par $V(x) = c$*; c'est-à-dire que l'énergie est constante sur les courbes ou trajectoires de solution de ce système; et l'origine est un point d'équilibre stable.*

1.9 SELLES, NŒUDS, FOYERS ET CENTRES

Dans cette section on considère le système non linéare

$$\begin{cases} \dot{x} = P(x,y) \\ \dot{y} = Q(x,y) \end{cases} \tag{1.15}$$

Si on pose

$$r^2 = x^2 + y^2 \text{ et } \theta = \arctan \frac{y}{x}$$

et , alors on a

$$r\dot{r} = x\dot{x} + y\dot{y}$$

et

$$\dot{\theta} = \frac{\left(\frac{y}{x}\right)'}{1 + \frac{y}{x}} = \frac{\dot{y}x - \dot{x}y}{x^2 + y^2} = \frac{\dot{y}x - \dot{x}y}{r^2}$$

donc

$$r^2\dot{\theta} = \dot{y}x - \dot{x}y$$

Il s'ensuit que pour $r > 0$, le système non linéaire (1.15) peut s'écrire en termes de coordonnées polaires comme

$$\begin{aligned} r\dot{r} &= x\dot{x} + y\dot{y} = r\cos\theta P\left(r\cos\theta, r\sin\theta\right) + r\sin\theta Q\left(r\cos\theta, r\sin\theta\right) \\ r^2\dot{\theta} &= \dot{y}x - \dot{x}y = r\cos\theta Q\left(r\cos\theta, r\sin\theta\right) - r\sin\theta P\left(r\cos\theta, r\sin\theta\right) \end{aligned}$$

Donc

$$\frac{dr}{d\theta} = \frac{r\left(\cos\theta P\left(r\cos\theta, r\sin\theta\right) + \sin\theta Q\left(r\cos\theta, r\sin\theta\right)\right)}{\cos\theta Q\left(r\cos\theta, r\sin\theta\right) - \sin\theta P\left(r\cos\theta, r\sin\theta\right)}$$

Definition 70. *L'origine est appelée un centre pour le système non linéaire (1.15) s'il existe un $\delta > 0$ tel que chaque courbe solution de (1.15) dans le voisinage $N_\delta(0)\diagdown\{0\}$ est une courbe fermée avec 0 dans son intérieur.*

Example 71. *Ecrire le système*

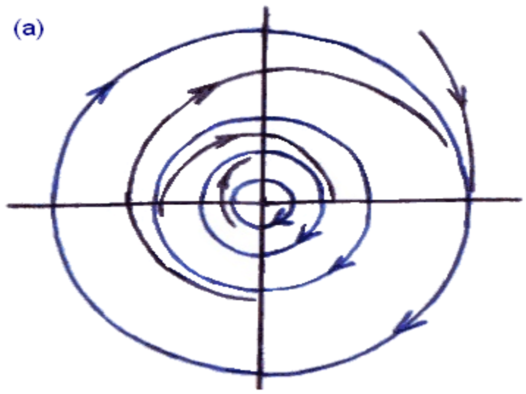
$$\begin{cases} \dot{x} = -y - xy \\ \dot{y} = x + x^2 \end{cases}$$

en coordonnées polaires. Pour $r > 0$ on a

$$\begin{aligned} \dot{r} &= \frac{x\dot{x} + y\dot{y}}{r} = \frac{-xy - x^2y + xy + x^2y}{r} = 0 \\ \dot{\theta} &= \frac{x\dot{y} - y\dot{x}}{r^2} = \frac{x^2 + x^3 + y^2 + xy^2}{r^2} = 1 + x > 0 \end{aligned}$$

pour $x > -1$. Ainsi, le long de toute trajectoire de ce système dans le demi-plan $x > -1$, $r(t)$ est constant et $\theta(t)$ augmente sans borne comme $t \to \infty$. l'origine est appelée un centre pour ce système non linéaire.

Definition 72. *L'origine est appelée center-foyer pour (1.15) s'il existe une suite de courbes de solution fermées Γ_n, avec Γ_{n+1} à l'intérieur de Γ_n tel que $\Gamma_n \to 0$ lorsque $n \to \infty$ et telle que toute trajectoire entre Γ_n et Γ_{n+1} speral vers Γ_n ou Γ_{n+1} lorsque $t \to \pm\infty$*



Example 73. *Consédérons le système*

$$\begin{cases} \dot{x} = -y + x\sqrt{x^2+y^2}\sin\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) \\ \dot{y} = x + y\sqrt{x^2+y^2}\sin\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) \end{cases}$$

En coordonnées polaires, nous avons

$$\begin{aligned} \dot{r} &= r^2 \sin\frac{1}{r^2} \\ \dot{\theta} &= 1 \end{aligned}$$

pour $r > 0$. Clairement, $\dot{r} = 0$ pour $r = \frac{1}{n\pi}$; c'est-à-dire que chacun des cercles $r = \frac{1}{n\pi}$ est une trajectoire de ce système. De plus, pour $n\pi < \frac{1}{r} < (n+1)\pi, \dot{r} < 0$ si n est impair et $\dot{r} > 0$ si n est pair; c'est-à-dire que les trajectoires entre les cercles $r = \frac{1}{n\pi}$ spiralent vers l'intérieur ou vers l'extérieur l'un de ces cercles. Ainsi, l'origine est un foyer-centre pour ce système non linéaire selon la définition ci-dessus.

Definition 74. *L'origine est appelée foyer stable pour (1.15) s'il existe un $\delta > 0$ tel que pour $0 < r_0 < \delta$ et $\theta \in \mathbb{R}$, $r(t, r_0, \theta_0) \to 0$ et $|\theta(t, r_0, \theta_0)| \to +\infty$ lorsque $t \to +\infty$.*

On l'appelle un foyer instable si $r(t, r_0, \theta_0) \to 0$ et $|\theta(t, r_0, \theta_0)| \to +\infty$ lorsque $t \to -\infty$.

.

Toute trajectoire de (1.15) qui satisfait $r(t) \to 0$ et $|\theta(t)| \to \infty$ lorsque $t \to \pm\infty$ est dite spirale vers l'origine lorsque $t \to \pm\infty$

Example 75. *Consédérons le systèm*

$$\begin{cases} \dot{x} = -y + x^3 + xy^2 \\ \dot{y} = x + y^3 + x^2 y \end{cases}$$

En coordonnées polaires, nous avons

$$\dot{r} = r^3, \quad \dot{\theta} = 1$$

la solution de ce système avec la condidition $r(0) = 0, \theta(0) = \theta_0$, *est*

$$r(t) = \frac{r_0}{\sqrt{1 - 2tr_0^2}}, \quad t < \frac{1}{2r_0^2}, \quad \theta\,(t) = t + \theta_0$$

Nous nous que $r(t) \to 0$ *et* $|\theta\,(t)| \to \infty$. *si* $t \to -\infty$. *donc l'origine est un foyer instable pour ce système non linéaire.*

Example 76. *Consédérons le système*

$$\begin{cases} \dot{x} = -y - x^3 - xy^2 \\ \dot{y} = x - y^3 - x^2 y \end{cases}$$

En coordonnées polaires, nous avons

$$\dot{r} = -r^3, \quad \dot{\theta} = 1$$

la solution de ce système avec la condidition $r(0) = 0, \theta(0) = \theta_0$, *est*

$$r(t) = \frac{r_0}{\sqrt{1 + 2tr_0^2}}, \quad t > -\frac{1}{2r_0^2}, \quad \theta\,(t) = t + \theta_0$$

Nous nous que $r(t) \to 0$ *et* $|\theta\,(t)| \to \infty$. *si* $t \to +\infty$. *donc l'origine est un foyer stable pour ce système non linéaire.*

Definition 77. *L'origine est appelée nœud stable pour* (1.15) *s'il existe un* $\delta > 0$ *tel que pour* $0 < r_0 < \delta$ *et* $\theta \in \mathbb{R}$, $r(t, r_0, \theta_0) \to 0$ *si* $t \to \infty$ *and* $\lim_{t\to\infty} \theta(t, r_0, \theta_0)$ *existe; c'est-à-dire que chaque trajectoire dans un voisinage de l'origine s'approche de l'origine le long d'une ligne tangente bien définie spiralent lorsque* $t \to \infty$.

L'origine est appelée un nœud instable si $r(t, r_0, \theta_0) \to 0$ *lorsque* $t \to \infty$ *and* $\lim_{t\to\infty} \theta(t, r_0, \theta_0)$ *existe pour tout* $r_0 \in (0, \delta)$ *et* $\theta \in \mathbb{R}$. *l'origine s'appelle un nœud propre pour* (1.15) *si c'est un nœud et si chaque rayon passant par l'origine est tangent à une trajectoire de* (1.15).

Definition 78. *L'origine est une selle (topologique) pour* (1.15) *s'il existe deux trajectoires* Γ_1, *et* Γ_2 *qui se rapprochent de* 0 *lorsque* $t \to +\infty$ *et deux trajectoires* Γ_3 *et* Γ_4 *qui se rapprochent de* 0 *lorsque* $t \to -\infty$ *et s'il existe a* $\delta > 0$ *tel que toutes les autres trajectoires qui commencent dans le voisinage de l'origine* $N_\delta(0) - \{0\}$ *laissent* $N_\delta(0)$ *lorsque* $t \to \pm\infty$. *Les trajectoires spéciales* $\Gamma_1, ..., \Gamma_4$ *sont appelées séparatrices.*

Theorem 79. *(Bendixson): Soit* E *un sous-ensemble ouvert de* $\mathbb{R}^2$ *contenant l'origine et soit* $f \in C^1(E)$. *Si l'origine est un point critique isolé de* (1.15), *alors soit chaque voisinage de l'origine contient une courbe de solution fermée avec* 0 *à l'intérieur, soit il existe une trajectoire approchant* 0 *lorsque* $t \to \pm\infty$.

Theorem 80. *Supposons que* E *est un sous-ensemble ouvert de* $\mathbb{R}^2$ *contenant l'origine et que* $f \in C^1(E)$. *Si l'origine est un point d'équilibre hyperbolique du système non linéaire* (1.15), *alors l'origine est une selle (topologique) pour (no) si et seulement si l'origine est une selle pour le système linéaire*

$$\dot{x} = Ax \tag{1.16}$$

avec $A = Df(0)$.

Theorem 81. *Soit* E *un sous-ensemble ouvert de* $\mathbb{R}^2$ *contenant l'origine et soit* $f \in C^2(E)$. *Supposons que l'origine soit un point critique hyperbolique de* (1.15). *Alors l'origine est un nœud stable (ou instable) pour le système non linéaire* (1.15) *si et seulement si c'est un nœud stable (ou instable) pour le système linéaire* (1.16) *avec* $A = Df(0)$. *Et l'origine est un foyer stable (ou instable) pour le système non linéaire* (1.15) *si et seulement si c'est un foyer stable (ou instable) pour le système linéaire* (1.16) *avec* $A = Df(0)$.

Theorem 82. *Soit E un sous-ensemble ouvert de $\mathbb{R}^2$ contenant l'origine et soit $f \in C^1(E)$ avec $f(0) = 0$. Supposons que l'origine soit un centre du système linéaire (1.16) avec $A = Df(0)$. L'origine est alors soit un centre, un centre-foyer ou un foyer pour le système non linéaire (1.15).*

Theorem 83. *Soit E un sous-ensemble ouvert de $\mathbb{R}^2$ contenant l'origine et soit f analytique dans E avec $f(0) = 0$. Supposons que l'origine soit un centre du système linéaire (1.16) avec $A = Df(0)$. Alors l'origine est soit un centre, soit un foyer pour le système non linéaire (1.15).*

Definition 84. *Le système (1.15). est dit symétrique par rapport à l'axe des x s'il est invariant sous la transformation $(t, y) \to (-t, -y)$; il est dit symétrique par rapport à l'axe des y s'il est invariant sous la transformation $(t, x) \to (-t, -x)$.*

Example 85. *le système*

$$\begin{cases} \dot{x} = -y - xy \\ \dot{y} = x + x^2 \end{cases}$$

est symétrique par rapport à l'axe x, mais pas par rapport à l'axe y.

Theorem 86. *Soit E un sous-ensemble ouvert de $\mathbb{R}^2$ contenant l'origine et soit $f \in C^1(E)$ avec $f(0) = 0$. Si le système non linéaire (1.15) est symétrique par rapport à l'axe x ou $y-$axis, et si l'origine est un centre pour le système linéaire (1.16) avec $A = Df(0)$, alors l'origine est un centre pour le système non linéaire (1.15).*

1.10 POINTS CRITIQUES NON HYPERBOLIQUES DANS $\mathbb{R}^2$

On suppose que l'origine est un point critique isolé du système planaire

$$\begin{cases} \dot{x} = P(x, y) \\ \dot{y} = Q(x, y) \end{cases} \tag{1.17}$$

où P et Q sont analytiques dans un voisinage de l'origine. Dans cette section nous donnons quelques résultats pour le cas où la matrice A a une ou deux valeurs propres nulles, mais $A \neq 0$.

Definition 87. *Un secteur qui est topologiquement équivalent au secteur représenté sur la figure 1 (a) est appelé un secteur hyperbolique. Un secteur qui est topologiquement équivalent au secteur représenté sur la figure 1 (b) est appelé un secteur parabolique. Et un secteur qui est topologiquement équivalent au secteur représenté sur la figure 1 (c) est appelé un secteur elliptique.*

Figure 1. (a) A hyperbolic sector. (b) A parabolic sector. (c) An elliptic sector.

Definition 88. *Un voisinage de l'origine se compose d'un secteur elliptique, d'un secteur hyperbolique, de deux secteurs paraboliques et de quatre séparatrices. Ce type de point critique est appelé un point critique avec un domaine elliptique.*

Example 89. *le système*

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -x^3 + 4xy \end{cases}$$

a un secteur elliptique à l'origine. Le portrait de phase de ce système est illustré à la figure 2. Chaque trajectoire qui s'approche de l'origine le fait tangente à l'axe des x.

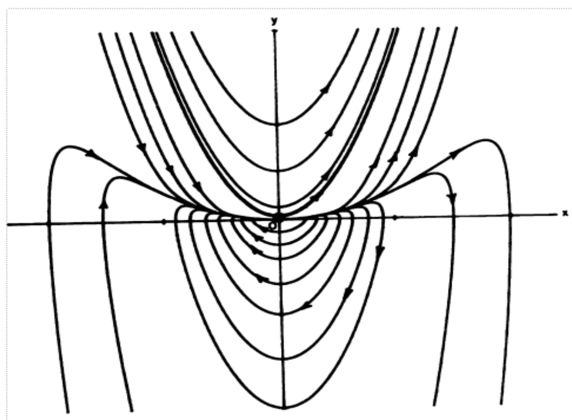


Figure 2. A critical point with an elliptic domain at the origin.

Definition 90. *Un autre type de point critique non hyperbolique pour un système plan est un nœud-selle. Un nœud-selle se compose de deux secteurs hyperboliques et d'un secteur parabolique (ainsi que de trois séparatrices et du point critique lui-même).*

Example 91. *le système*

$$\begin{cases} \dot{x} = x^2 \\ \dot{y} = y \end{cases}$$

a un nœud-selle à l'origine;, ce système est facile à discuter puisqu'il peut être résolu explicitement pour

$$x(t) = \frac{1}{\frac{1}{x_0} - t}, \quad y(t) = y_0 e^t$$

Le portrait de phase de ce système est illustré à la figure 3.

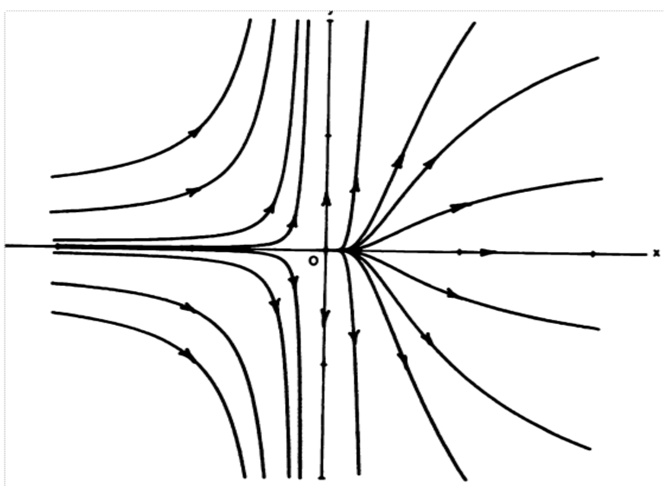


Figure 3. A saddle-node at the origin.

Definition 92. *Un autre type de comportement qui peut se produire à un point critique non hyperbolique est un cusp. Un Cusp se compose de de deux secteurs hyperboliques et de deux séparatrices.*

Example 93. *le système*

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = x^2 \end{cases}$$

a un Cusp. Le portrait de phase de ce système est représenté sur la figure 4.

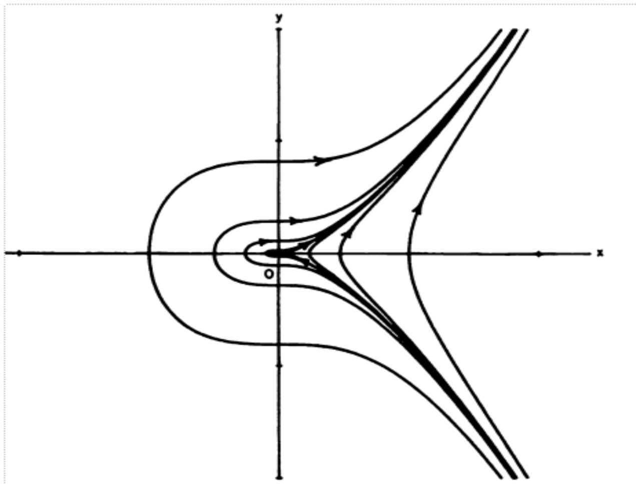


Figure 4. A cusp at the origin.

On considère d'abord le cas où la matrice A a une valeur propre nulle, c'est-à-dire lorsque $\det A = 0$, mais $trA \neq 0$. Dans ce cas, le système (1.17). peut être mis sous la forme

$$\begin{cases} \dot{x} = p_2(x, y) \\ \dot{y} = y + q_2(x, y) \end{cases} \tag{1.18}$$

où p_2 et q_2 sont analytiques dans un voisinage de l'origine et ont expansions qui commencent par des termes du second degré en x et y.

Theorem 94. *Soit l'origine un point critique isolé pour le système analytique (1.18). Soit $y = \varphi(x)$ la solution de l'équation $y + q_2(x, y) = 0$ dans un voisinage de l'origine et soit le développement de la fonction $\psi(x) = p_2(x, \varphi(x))$ dans un voisinage de $x = 0$ ont la forme $\psi(x) = a_m x^m + \ldots$ où $m \geq 2$ et $a_m \neq 0$. Alors*

(1) pour m impair et $a_m > 0$, l'origine est un instable nœud,

(2) pour m impair et $a_m < 0$, l'origine est une selle (topologique) et

(3) pour m pair, l'origine est un nœud-selle.

Example 95. *pour le système*

$$\begin{cases} \dot{x} = x^2 + y^2 \\ \dot{y} = y - x^2 \end{cases}$$

on a $y - x^2 \rightarrow y = x^2 \rightarrow \varphi(x) = x^2 \rightarrow \psi(x) = p_2(x, \varphi(x)) = x^2 + x^4$ on a $m = 2$ pair donc l'origine est un nœud-selle.

Considérons ensuite le cas où A a deux valeurs propres nulles, c'est-à-dire $\det A = 0$, $trA = 0$, mais $A \neq 0$. Dans ce cas, le système (1.17). peut être mis sous la forme "normale"

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y \\ \dot{y} &= a_k x^k [1 + h(x)] + b_n x^n y [1 + g(x)] + y^2 R(x, y) \end{aligned} \tag{1.19}$$

où $h(x), g(x)$ et $R(x,y)$ sont analytiques dans un voisinage de l'origine,$h(0) = g(0) = 0, k > 2, a_k \neq 0$ et $n \geq 1$.

Theorem 96. *Soit $k = 2m + 1$ avec $m \geq 1$ dans (1.19). et soit $\lambda = b_n + 4(m + 1)a_k$. Alors*

Si $a_k > 0$, l'origine est une selle (topologique).

Si $a_k < 0$, l'origine est

(1) un foyer ou un centre si $b_n = 0$ et aussi si $b_n \neq 0$ et $n > m$ ou si $n = m$ et $\lambda < 0$,

(2) un nœud si $bn \neq 0$, n est un nombre pair et $n < m$ et aussi si $b_n \neq 0$, n est un nombre pair, $n = m$ et $\lambda > 0$ et

(3) un point critique avec un domaine elliptique si $b_n \neq 0$, n est un nombre impair et $n < m$ et aussi si $b_n \neq 0$, n est un nombre impair, $n = m$ et $\lambda >$0.

Theorem 97. *Soit $k = 2m$ avec $m \geq 1$ dans (1.19). Alors l'origine est*

(1) une cusp si $b_n = 0$ et aussi si $b_n \neq 0$ et $n > m$ et

(2) un nœud de selle si $b_n \neq 0$ et $n < m$.