

# Série n° 1

## Exercice 18

$$E = [0, 1] \subseteq \mathbb{R} \quad \forall x, y \in E \quad x * y = x + y - xy$$

a) - la loi  $*$  définie sur  $[0, 1]$  par  $x * y = x + y - xy$  est une loi interne.

En effet, si  $x, y \in [0, 1]$

$$x * y = x + y - xy = x + y(1 - x)$$

$$\text{et on a } 0 \leq x \leq 1 \quad \text{et } y \geq 0$$

$$\text{donc } (1 - x) \geq 0$$

$$\text{d'où } x + y(1 - x) \geq 0$$

$$\text{d'autre part on a } (1 - y) \geq 0 \quad \text{et } (x - 1) \leq 0$$

$$\text{donc } (1 - y)(x - 1) \leq 0$$

$$x + y - xy - 1 \leq 0$$

$$\text{donc } x + y - xy \leq 1$$

donc  $*$  est une loi de composition interne.

$*$  est commutative car  $\forall x, y \in [0, 1]$

$$x * y = y * x$$

$$x * y = x + y - xy = y + x - yx = y * x$$

associativité :



Soient  $x, y, z \in E$

$$(x * y) * z = (x + y - xy) * z$$

$$= x + y - xy + z - (x + y - xy)z$$

$$= x + y - xy + z - xz - yz + xyz$$

$$x * (y * z) = x * (y + z - yz)$$

$$= x + y + z - yz - x(y + z - yz)$$

$$= x + y + z - yz - xy - xz + xyz$$

$$\text{donc } (x * y) * z = x * (y * z)$$

donc  $*$  est associative.

b) - Comme  $*$  est commutative,  $e \in [0, 1]$  est élément neutre. Si  $\forall x \in E$   $x * e = e * x = x$

$$x * e = x \Leftrightarrow x + e - xe = x$$

$$\Leftrightarrow e(1 - x) = 0$$

Cette égalité doit être vraie pour tout  $x \in [0, 1]$   
donc en particulier pour  $x = 0$

On trouve  $e = 0$   $\in [0, 1]$

et on a bien  $\forall x \in E : x * 0 = x$

c) Soit  $x \in [0, 1]$  fixé

$x$  est symétrisable s'il existe  $y \in [0, 1]$  tq

$$x * y = 0 \quad (\text{car } * \text{ est commutative})$$

$$x * y = 0 \Leftrightarrow x + y - xy = 0$$

$$\Leftrightarrow x + y(1 - x) = 0$$



Si  $x \neq 1$  On a  $y = \frac{-x}{1-x}$

Or, pour  $x \neq 0$  (et  $x \neq 1$ )

$$y \in [0, 1] \quad (y < 0)$$

0 est donc le seul élément symétrisable dans  $[0, 1]$

$a \in E$  est régulier

$$\forall x, y \in E \quad a * x = a * y \Rightarrow x = y$$

Soit  $x, y \in E$

$$a * x = a * y \Leftrightarrow a + x - ax = a + y - ay$$

$$\Leftrightarrow x - y = a(x - y)$$

$$\Leftrightarrow (x - y)(1 - a) = 0$$

Si  $a \neq 1$  ( $a \in [0, 1[$ ) alors  $x = y$   
et  $a$  est donc régulier

(pour  $a = 1$   $1 * x = 1 * y \Rightarrow x = y$ ) 1 n'est pas régulier  
On a  $1 * 1 = 1 * 0$  et  $1 \neq 0$

Donc tout élément de  $[0, 1[$  est régulier pour  $*$

### Exercice 28

$$\forall (a, b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$$

$$a * b = \log(e^a + e^b)$$

### Commutativité :

$$\forall a, b \in \mathbb{R}$$

$$a * b = \log(e^a + e^b)$$

$$= \log(e^b + e^a)$$

$$= b * a.$$



### - associativité :

Soient  $x, y, z \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}(x * y) * z &= (\text{Log}(e^x + e^y)) * z \\&= \text{Log}(e^{\text{Log}(e^x + e^y)} + e^z) \\&= \text{Log}(e^x + e^y + e^z) \\x * (y * z) &= x * (\text{Log}(e^y + e^z)) \\&= \text{Log}(e^{\text{Log}(e^y + e^z)} + e^x) \\&= \text{Log}(e^y + e^z + e^x)\end{aligned}$$

donc  $(x * y) * z = x * (y * z)$

donc  $*$  est associative.

- Si  $E \in \mathbb{R}$  est l'élément neutre pour  $*$ , on doit avoir  
 $\forall x \in \mathbb{R} \quad x * E = x$  ( $x * \text{comm}$ )

donc  $\forall x \in \mathbb{R} \quad \text{Log}(e^x + e^E) = x$   
 $e^x + e^E = e^x$

$e^E = 0$  ce qui est impossible

Donc il n'y a pas d'élément neutre pour  $*$

-  $a \in \mathbb{R}$  est régulier si  $\forall x, y \quad a * x = a * y \Rightarrow x = y$

Soit  $x, y \in \mathbb{R}$  tq  $a * x = a * y$

$$\text{Log}(e^a + e^x) = \text{Log}(e^a + e^y)$$

$$e^x + e^a = e^y + e^a$$

$$e^x = e^y$$

donc  $x = y$

Donc tout élément  $d \in \mathbb{R}$  est régulier.



### Exercice 38

$G = \{e, a, b, c, d, f\}$   
 $(G, *)$  est un groupe

| $*$ | e | a | b | c | d | f |
|-----|---|---|---|---|---|---|
| e   | e | a | b | c | d | f |
| a   | a | e | d | f | b | c |
| b   | b | f | e | d | c | a |
| c   | c | d | f | e | a | b |
| d   | d | a | b | f | e | c |
| f   | f | b | c | a | e | d |

$(G, *)$  n'est pas abélien (car  $c * f \neq f * c$ )

### Exercice 48

On  $C_{(0,1)} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$

1) a. On sait que  $(\mathbb{C}^*, \cdot)$  est un groupe

et on a

il suffit de prouver que  $C_{(0,1)}$  est un ss-groupe de  $\mathbb{C}^*$

•  $1 \in C_{(0,1)}$  car  $|1| = 1$ ,  $C_{(0,1)} \neq \emptyset$

• soit  $z, z' \in C_{(0,1)}$   $|z| = |z'| = 1$   
 $|zz'| = |z||z'| = 1$

Donc  $zz' \in C_{(0,1)}$

• Soit  $z \in C_{(0,1)}$

$z$  est inversible dans  $\mathbb{C}^*$  d'inverse  $\frac{1}{z}$

or  $\left| \frac{1}{z} \right| = \frac{1}{|z|} = 1$

D'où  $\frac{1}{z} \in C_{(0,1)}$

c/c donc  $C_{(0,1)}$  est un ss-groupe de  $(\mathbb{C}^*, \cdot)$



b) La multiplication dans  $\mathbb{C}^*$  n'est pas interne dans  $B$  :  $\left( \begin{array}{l} \frac{1}{2} \in B \\ \frac{i}{2} \in B \end{array} \right.$  mais  $\frac{1}{2} \times \frac{i}{2} \notin B$

3) ~~voir ci-dessus~~

### Exercice 58

1) On a  $n\mathbb{Z} \neq \emptyset$  car  $0 \in n\mathbb{Z}$

Soit  $x, y \in n\mathbb{Z}$

$\exists a, a' \in \mathbb{Z}$  tq  $x = na$  et  $y = na'$

$$\begin{aligned} x - y &= na - na' \\ &= n(a - a') \end{aligned}$$

donc  $x - y \in n\mathbb{Z}$

Alors  $n\mathbb{Z}$  est un ss-groupe de  $(\mathbb{Z}, +)$

2) Tout ss-groupe de  $\mathbb{Z}$  est de la forme  $n\mathbb{Z}$  avec  $n \in \mathbb{Z}$

2)  $2 \in 2\mathbb{Z} \cup 5\mathbb{Z}$  mais  $5 - 2 = 3 \notin 2\mathbb{Z} \cup 5\mathbb{Z}$   
et  $5 \in 2\mathbb{Z} \cup 5\mathbb{Z}$  (restabilité)

2) a.  $H \cup K \leq G \Leftrightarrow HCK$  ou  $KCH$

$\Rightarrow$  Supposons que  $H \cup K$  est un ss-groupe de  $G$   
Montrons que  $HCK$  ou  $KCH$

• Si  $HCK$  est fini

• Si  $H \not\subseteq K$  montrons que  $KCH$

Soit  $k \in K$  alors  $k \in H \cup K$

et on a  $H \not\subseteq K$  :  $\exists h \in H$  et  $h \notin K$

On a  $h \in H$  donc  $h \in H \cup K$

comme  $H \cup K$  est un ss-groupe de  $G$

$\Rightarrow h \in K$



Alors  $H.R = HK$  ??

Alors  $H.R \in H$  ou  $H.R \in K$

or  $H \not\subseteq K$  Donc  $H.R \notin K$

sinon  $H.R = K'$  avec  $K' \in K$

alors  $H = K'K^{-1} \in K$

car  $K$  est ss-groupe de  $G$

Ce qui contredit le fait que  $H \not\subseteq K$

Donc  $H.R \in H$

c-à-d  $H.R = H'$  avec  $H' \in H$

$R = H^{-1}H' \in H$  (car  $H$  ss-groupe de  $G$ )

Donc on a  $K \subset H$

⊕ Si  $HCK = HUK = K$

Puisque  $K$  est un ss-groupe de  $G$

donc  $HUK$  est un ss-groupe de  $G$

de même si  $KCH$

b).  $HK$  ss-groupe de  $G \Leftrightarrow HK = KH$

⇒ On suppose que  $HK \leq G$  et montrons que  $HK \subset KH$   
Soit  $x \in HK$

Puisque  $HK \leq G$

dors  $x^{-1} \in HK$

$\exists h \in H$  et  $\exists k \in K$  tq  $x^{-1} = h.k$

donc  $(x^{-1})^{-1} = k^{-1}h^{-1} = x$

\*  $h^{-1} \in H$  (car  $H$  est un ss-groupe de  $G$ )

$k^{-1} \in K$  (car  $K$  est un ss-groupe de  $G$ )

donc  $k^{-1}h^{-1} \in KH$

alors  $HK \subset KH$



Comme  $H$  et  $K$  jouent des rôles symétriques

alors  $KH \subset HK$

d'où  $HK = KH$

⊕ On suppose que  $HK = KH$  et on montre que  $HK \leq G$

•  $e = \underbrace{e}_H \underbrace{e}_K \in HK$  donc  $HK \neq \emptyset$

• Soit  $x \in HK$  et  $y \in HK$

Mq  $xy \in HK$

alors  $xy = \underbrace{p \cancel{p} p'}_{\substack{x \in HK \Rightarrow x = p \cancel{p} \\ y \in HK \Rightarrow y = p' \cancel{p}'}}$

On a  $\cancel{p} p' \in KH$  puisque  $KH \subset HK$

donc  $\exists p' \in H$

$\exists p \in H$  /  $\cancel{p} p' = p'' \cancel{p}''$

Donc  $xy = \underbrace{p p''}_{\in H} \underbrace{\cancel{p}'' p'}_{\in K} \in HK$

• Soit  $x \in HK$  Mq  $x^{-1} \in HK$

$x \in HK$ :  $x = p \cancel{p}$  avec  $p \in H$  et  $\cancel{p} \in K$

$x^{-1} = \cancel{p}^{-1} p^{-1} \in KH$  puisque  $KH \subset HK$

$\Rightarrow x^{-1} \in HK$

$(G, \dots) \xrightarrow{\beta \text{ homo}} (G', \dots)$

$\text{Ker } \beta = \{x \in G \mid \beta(x) = e_{G'}\} = \beta^{-1}(\{e_{G'}\}) \triangleleft G$

$\text{Im } \beta = \beta(G)$

$= \{\beta(x) \mid x \in G\}$

$= \{y \in G' \mid \exists x \in G \text{ } \beta(x) = y\}$

$\text{Im } \beta \leq G'$



$$\left\{ \begin{array}{l} f \text{ est injective} \Leftrightarrow \text{Ker } f \\ f \text{ est surjective} \Leftrightarrow \text{Im } f = G' \end{array} \right\}$$

### Exercice 68

$$\varphi: (\mathbb{C}^*, \cdot) \longrightarrow (C_{(0,1)}, \cdot)$$

$$z \longmapsto \varphi(z) = \frac{z}{|z|}$$

1)

Soit  $z, z' \in \mathbb{C}^*$

$$\varphi(z \cdot z') = \frac{z \cdot z'}{|z \cdot z'|} = \frac{z}{|z|} \cdot \frac{z'}{|z'|} = \varphi(z) \cdot \varphi(z')$$

donc  $\varphi$  est un homomorphisme de groupe

$$\begin{aligned} \text{e) } \text{Ker } \varphi &= \{z \in \mathbb{C}^* \mid \varphi(z) = 1\} \\ &= \{z \in \mathbb{C}^* \mid \frac{z}{|z|} = 1\} \end{aligned}$$

Soit  $z \in \text{Ker } \varphi$  ( $z \in \mathbb{C}^*$ )

donc  $z = |z|$

donc  $z \in \mathbb{R}_+^*$

reciproquement

Soit  $z \in \mathbb{R}_+^*$

$$z \in \mathbb{R}_+^* \Rightarrow |z| = z \text{ alors } z \in \text{Ker } \varphi$$

$$\text{c/c } \text{Ker } \varphi = \mathbb{R}_+^*$$

$$\begin{aligned} \bullet \text{Im } \varphi &= \varphi(\mathbb{C}^*) = \{ \varphi(z) \mid z \in \mathbb{C}^* \} \\ &= \left\{ \frac{z}{|z|} \mid z \in \mathbb{C}^* \right\} \end{aligned}$$

On a  $\text{Im } \varphi \subset C_{(0,1)}$

Soit  $z \in C_{(0,1)}$  :  $|z| = 1$

$$z = \varphi(z) = \frac{z}{|z|} = z$$

$\Rightarrow z \in \text{Im } \varphi$

donc  $C_{(0,1)} \subset \text{Im } \varphi$

alors  $\text{Im } \varphi = C_{(0,1)}$   
 $\Rightarrow \varphi$  est surjective

(on montre que  $C_{(0,1)} \subset \text{Im } \varphi$ )



## Exercice 7a

1)  $G = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$

$$\forall (x, y) \cdot (x', y') \in G \quad (x, y) * (x', y') = (x' + xy', yy')$$

4) a)  $(G, *)$  est un groupe mais n'est pas abélien,

b) - Mq  $\mathbb{R} \times H$  est un ss groupe de  $G$

• On a  $e_G = (0, 1)$

comme  $H$  est un ss-groupe de  $(\mathbb{R}^*, \cdot)$  alors

$$e_{\mathbb{R}^*} = 1 \in H \text{ et donc } (0, 1) \in \mathbb{R} \times H$$

$$\text{donc } \mathbb{R} \times H \neq \emptyset$$

$$\begin{array}{l} H \neq \emptyset \\ \exists x \in H \\ x x^{-1} \in H \\ \underbrace{e}_{\substack{= \\ \text{donc } e \in H}} \end{array}$$

• Soit  $(x, y) (x', y') \in \mathbb{R} \times H$

$$\text{Mq } (x, y) * (x', y') \in \mathbb{R} \times H$$

$$(x, y) * (x', y') = (\underbrace{x' + xy'}_{\in \mathbb{R}}, \underbrace{yy'}_{\in H})$$

$$\text{avec } yy' \in H \text{ car } H \leq \mathbb{R}^*$$

$$\text{D'où } (x, y) * (x', y') \in \mathbb{R} \times H$$

$$\text{Ker } \varphi = \{e_G\}$$

$$\text{Im} = G'$$

• Soit  $(x, y) \in \mathbb{R} \times H$

$$\text{Mq } (x, y)^{-1} = \left(-\frac{x}{y}, \frac{1}{y}\right) \in \mathbb{R}$$

$$\frac{x}{y} \in \mathbb{R} \text{ et } \frac{1}{y} = y^{-1} \in H \text{ (car } H \leq \mathbb{R}^*)$$

donc  $\mathbb{R} \times H$  est un ss-groupe de  $G$ .

2)  $N_{(a,b)} = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & b \end{pmatrix}, a, b \in \mathbb{R} \quad G' = \{N_{(a,b)} / a, b \in \mathbb{R} \text{ et } b \neq 0\}$

$$\forall a, b, a', b' \in \mathbb{R} \quad N_{(a,b)} \cdot N_{(a',b')} = N_{(a'+ab, bb')}$$

a)  $(G', \cdot)$  est un groupe. mais n'est pas abélien

b) On définit l'application  $\varphi: (G) \rightarrow (G')$

$$(a, b) \mapsto \varphi(a, b) = N_{(a,b)}$$



Ma  $\varphi$  est un homomorphisme

Soit  $(a, b), (a', b') \in G$

$$\varphi((a, b) * (a', b')) = \varphi(a' + ab', bb')$$

$$= N_{(a' + ab', bb')}$$

$$= N_{(a, b)} \cdot N_{(a', b')}$$

$$= \varphi(a, b) \cdot \varphi(a', b')$$

donc  $\varphi$  est un homomorphisme

•  $\varphi$  est injective

$$\ker \varphi = \{(a, b) \in G \mid \varphi(a, b) = N_{(0, 1)}\}$$

$$= \{(a, b) \in G \mid N_{(a, b)} = N_{(0, 1)}\}$$

$$= \{(a, b) \in G \mid a=0 \text{ et } b=1\}$$

$$= \{(0, 1)\} = \{e_G\}$$

$$G \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$$
$$a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}^*$$

•  $\varphi$  est surjective  $\Leftrightarrow \text{Im } \varphi = G'$

$$\text{Im } \varphi = \{\varphi(a, b) \mid (a, b) \in G\}$$

$$= \{N_{(a, b)} \mid (a, b) \in G\}$$

$$= G'$$

donc  $\varphi$  est bijective

C/c  $\varphi$  est un isomorphisme de  $G$  vers  $G'$

Exercice 88

$$\phi : (\mathbb{R}_+^*, \cdot) \rightarrow (\mathbb{R}, +)$$

$$x \mapsto \phi(x) = \ln x$$

1) soit  $x, y \in \mathbb{R}_+^*$

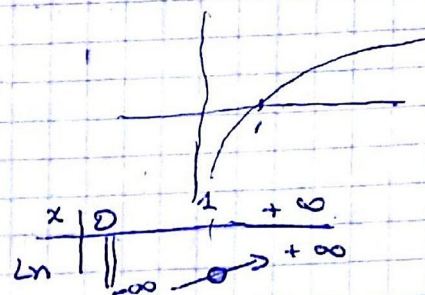
$$\phi(xy) = \ln(xy) = \ln x + \ln y = \phi(x) + \phi(y)$$

donc  $\phi$  est un homomorphisme



$$\begin{aligned}
 2) \quad \text{Ker } \phi &= \{x \in \mathbb{R}_+^* / \phi(x) = 0\} \\
 &= \{x \in \mathbb{R}_+^* / \ln x = 0\} \\
 &= \{1\} = \{e_{\mathbb{R}_+^*}\} \Rightarrow \phi \text{ est injective}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{Im } \phi &= \{\phi(x) / x \in \mathbb{R}_+^*\} \\
 &= \{\ln x / x \in \mathbb{R}_+^*\} \\
 &= \mathbb{R} \Rightarrow \phi \text{ est surj}
 \end{aligned}$$



### Exercice 98

- $(G, \cdot)$  un groupe,  $\text{Aut}(G)$  groupe automorphismes
- $(\text{Aut } G, \circ)$  est un groupe.

$$1) \text{ Soit } g \in G \quad \phi_g : G \longrightarrow G$$

$$x \longmapsto \phi_g(x) = g x g^{-1}$$

$$1) \text{ Soit } x, y \in G$$

$$\begin{aligned}
 \phi_g(xy) &= g(xy)g^{-1} \\
 &= (g x g^{-1}) (g y g^{-1}) \\
 &= \phi_g(x) \cdot \phi_g(y)
 \end{aligned}$$

$$2) \text{ Soit } x \in G$$

$$\begin{aligned}
 (\phi_g \circ \phi_{g'})(x) &= \phi_g(\phi_{g'}(x)) \\
 &= \phi_g(g' x g'^{-1}) \\
 &= g g' x g'^{-1} g^{-1} \\
 &= g g' x (g g')^{-1} \\
 &= \phi_{g g'}(x)
 \end{aligned}$$

$$\text{Par suite } \phi_g \circ \phi_{g'} = \phi_{g g'}$$



c) On a  $\phi_e : G \rightarrow G$   
 $x \mapsto \phi_e(x) = e x e^{-1} = x$

$$\Rightarrow \phi_e = \text{id}_G$$

Si  $g \in G$

$$\phi_g \circ \phi_{g^{-1}} = \phi_{gg^{-1}} = \phi_e = \text{id}_G$$

et  $\phi_{g^{-1}} \circ \phi_g = \phi_{g^{-1}g} = \phi_e = \text{id}_G$

On a donc

$$\phi_g \circ \phi_{g^{-1}} = \phi_{g^{-1}} \circ \phi_g = \phi_e = \text{id}_G$$

$\Rightarrow \phi_g$  est inversible et admet comme inverse  $\phi_{g^{-1}}$

i.e.  $(\phi_g)^{-1} = \phi_{g^{-1}}$

$\phi_g$  est appelé automorphisme intérieur

2)  $T = \{\phi_g / g \in G\}$

Ma  $T$  est un ss-groupe de  $(\text{Aut}(G), \circ)$

$$T \subset \text{Aut}(G)$$

$\bullet \text{id}_G = \phi_e \in T \quad T \neq \emptyset$

$\bullet$  Soit  $gg' \in G$

$$\phi_g \circ \phi_{g'} = \phi_{gg'} \in T \quad (\text{car } gg' \in G)$$

$\bullet$  Soit  $g \in G$

$$(\phi_g)^{-1} = \phi_{g^{-1}} \in T \quad (\text{car } g^{-1} \in G)$$

c/c  $T$  est un ss-groupe de  $(\text{Aut}(G), \circ)$

$E \rightarrow F$   
 $f \text{ est bijectif}$   
 $\exists g : F \rightarrow E$   
 $f \circ g = \text{id}_F$   
 $g \circ f = \text{id}_E$



$$\Psi: G \longrightarrow \text{Aut}(G)$$

$$g \longmapsto \Psi(g) = \phi_g$$

cette application est bien définie car pour tout  $g \in G$   
 $\phi_g \in \text{Aut}(G)$

1) soit  $g, g' \in G$

$$\Psi(gg') = \phi_{gg'} = \phi_g \circ \phi_{g'} = \Psi(g) \circ \Psi(g')$$

donc  $\Psi$  est un Homomorphisme

$$2) \text{ Ker } \Psi = \{g \in G / \Psi(g) = \text{id}_G\}$$

soit  $g \in G$

$$g \in \text{Ker } \Psi \Leftrightarrow \Psi(g) = \text{id}_G$$

$$\Leftrightarrow \phi_g = \text{id}_G$$

$$\Leftrightarrow \forall x \in G : \phi_g(x) = \text{id}_G(x) = x$$

$$\Leftrightarrow \forall x \in G : g x g^{-1} = x \quad \downarrow \times g$$

$$\Leftrightarrow \forall x \in G : g x = x g$$

$\Leftrightarrow g$  commute avec tous les éléments de  $G$

$$\stackrel{\text{Def}}{\Leftrightarrow} g \in Z(G) \quad (Z(G) \text{ est le centre de } G)$$

Def:

$$Z(G) = \{g \in G / \forall x \in G : xg = gx\}$$

$$\text{Donc } \text{Ker } \Psi = Z(G)$$

$$\text{Im } \Psi = \{\Psi(g) / g \in G\}$$

$$= \{\phi_g / g \in G\}$$

$$= \mathcal{T}$$



## Exercice 108

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 3 & 8 & 5 & 6 & 4 & 1 & 7 \end{pmatrix} \text{ et } \delta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 4 & 5 & 2 & 7 & 8 & 1 & 6 \end{pmatrix}$$

$$1) \text{ Supp}(\sigma) = \{i \in \{1, \dots, 8\} \mid \sigma(i) \neq i\} \\ = \{1, \dots, 8\} = \text{Supp}(\delta)$$

$\sigma \in S_n$  ( $\sigma \neq \text{id}$ ) sur  $\{1, \dots, n\}$

On définit  $R_\sigma$  par

$$x R_\sigma y \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} \quad / y = \sigma^k(x)$$

$$\text{Cl}(x) = \text{Orb}_\sigma(x) \\ = \{ \sigma^k(x) \mid k \in \mathbb{Z} \}$$

$$\text{Orb}_\sigma(1) = \{1, 2, 3, 8, 7\} = \text{Orb}_\sigma(2) = \text{Orb}_\sigma(3) \\ = \text{Orb}_\sigma(8) = \text{Orb}_\sigma(7)$$

$$\text{Orb}_\sigma(4) = \{4, 5, 6\} = \text{Orb}_\sigma(5) = \text{Orb}_\sigma(6)$$

$$\text{Orb}_\delta(1) = \{1, 3, 5, 7\}$$

$$\text{Orb}_\delta(2) = \{2, 4\}, \quad \text{Orb}_\delta(6) = \{6, 8\}$$

$$C_1, C_2 \quad \text{Supp } \sigma_1 \cap \text{Supp } \sigma_2 = \emptyset$$

$$\Rightarrow C_1 \circ C_2 = C_2 \circ C_1$$

$$2) \quad \sigma = \overbrace{(1, 2, 3, 8, 7)}^{C_1} \overbrace{(4, 5, 6)}^{C_2} \Rightarrow C_1 C_2 = C_2 C_1 \\ = (1, 2)(2, 3)(3, 8)(8, 7)(4, 5)(5, 6)$$



$$S = (\overbrace{1\ 3\ 5\ 7}^{C_1}) (\overbrace{2\ 4}^{C_2}) (\overbrace{6\ 8}^{C_3}) \\ = (1\ 3)(3\ 5)(5\ 7)(2\ 4)(6\ 8)$$

3) -  $E(\sigma) = (-1)^{\text{nbre de transposition}}$

$$E(\sigma) = (-1)^6 = 1 \quad \text{donc } \sigma \text{ est paire}$$

$$E(S) = (-1)^5 = -1 \quad \text{donc } S \text{ est impaire}$$

$$[S_n : A_n] = 2$$

4).  $\sigma \circ S = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 8 & 5 & 6 & 3 & 1 & 7 & 2 & 4 \end{pmatrix} = (1\ 8\ 4\ 3\ 6\ 7\ 2\ 5)$

$$S \circ \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \\ = (1\ 4\ 7\ 3\ 6\ 2\ 5\ 8)$$

5)

$G$  groupe

$$x, y \in G$$

$$(xy)^{-1} = y^{-1}x^{-1}$$

$$\sigma^{-1} = (1\ 2\ 3\ 8\ 7)^{-1} (4\ 5\ 6)^{-1} \quad (\text{car les cycles commutent}) \\ = (7\ 8\ 3\ 2\ 1)(6\ 5\ 4)$$

$$S^{-1} = (1\ 3\ 5\ 7)^{-1} (2\ 4)^{-1} (6\ 8)^{-1} \\ = (7\ 5\ 3\ 1)(2\ 4)(6\ 8)$$

6)  $o(S) = \text{ppcm}(o(C_1), o(C_2), o(C_3)) \\ = \text{ppcm}(4, 2, 2) \\ = 4 \quad (S^4 = \text{Id})$

$$o(\sigma) = \text{ppcm}(5, 3) = 15 \quad (\sigma^{15} = \text{Id})$$