مادة الريـــــاضيات بكالوريا 2020

المراجعة الشاملة و النهائية

▪الجزء النظري نحو الاحتمالات▪

خـــاص بالشعب العلمية

الجزء
01

خَلِيةُ الإِحْتمَالاتْ تَحْتَ المِجْهَر

... في قاموس النّاجحين :

هاءُ الهَزِيمةِ تُنطقُ عَيناً

من أجل التحضير الجيد لبكالوريا 2020

من تجميع و تنظيم : عقبة بن نافع

https://www.facebook.com/okba.bac.2010

مضمون البـــــــــاقة

1- محطة تفصيلية نحو الاحتمالات - هامة جدا-

- للأستاذ توامي عمر

2- معلومات ثمينة - محطة شاملة -

للأستاذ نور الدين عيساوي { من السلسلة الفضية 2020 }

3- باقة دروس مركزة في الاحتمالات للأستاذ محمد علالو

4- أهم المعلومات في الاحتمالات للأستاذ حـــاقة محمد

5- مقتطفات حول الاحتمالات من كتاب المراجعة النهائية

6- المختصر المفيد في الاحتمالات للأستاذ عبعوب محمد

7- حصيلة شاملة نحو الاحتمالات - للأستاذ توامي عمر

8-هدية ممتازة في الاحتمالات من دولة المغرب الشقيق

للأستاذ مرابطي سفيان

من تجميع و تنظيم : عقبة بن نافع

https://www.facebook.com/okba.bac.2017

ملاحظـــــــــــات هـــامة

أيها التلاميذ الشرفاء ... في سجل المراجعة الشاملة نحو الاحتمالات ، و للعلم أنه تم نشر أهم المعلومات نحوها سابقاً و لتجنب عناء البحث و استغلالا للوقت سنضع لكم ذلك في باقات ثمينة مدروسة بعناية تتضمن جزء نظري خاص بالدروس و الأفكار الأولية ثم جزء ثاني تطبيقي خاص بالتمارين المرفقة بالحلول النموذجية من أجل التحضير الجيد نحو امتحان شهادة البكالوريا ...

أيها الشرفاء .. أحيطكم علماً أن الأغلب في هذا المحور يحبذ الدخول في التمارين مع الحل دون وضع وقت معتبر نحو الجزء النظري الخاص بالمفاهيم الأولية ، و لهذا أنصحكم بعدم إهمال هذا الجزء و تدوين أهم المعلومات منه لكسب قاعدة أولية من شأنها رفع أبراج الاستعداد الفكري إلى أعلى الدَّرَجاتْ .

أيها الشرفاء لا تتجاهلوا هذا المحور ؛؛ ببساطة تذكروا أنَّ له حصة تنقيط في امتحان شهادة البكالوريا (04 أو 05 نقاط ...) ، دون أن ننسى تأثير المعامل لهذه المادة ، هذا ما يمنحه تشويقاً و تحفيزياً لِنيل علامتها الكاملة دون نقصان .

نحو جموع تلاميذ ؛؛ * رياضيات + علوم تجريبية + تقني رياضي * يمكنكم الاستفادة من هذه الباقة بنسبة 100% ، أحسنوا استغلالها للمضي حُقبا نحو الجزء التطبيقي بكل توازن

بالنسبة للهدية الممتازة المقدمة من طرف ***الأستاذ مرابطي سفيان*** من ***المغرب الشقيق*** .. يمكنكم الاستفادة منها حسب المقرر في المنهاج الخاص بوطننا الحبيب ...

و تعتبر إضافة معلوماتية ثمينة ... لمن يهمه الأمر طبعاً ...

تذكروا أن ؛؛ ...

أصعب الأمور بدايتها ، تحملوا و انطلقوا دون تردد

الوقت كافٍ و شافٍ لتحطيم كل القيود و المضي حقبا نحو الامتياز

تعب المراجعة أفضل من ألم السقوط

https://www.facebook.com/okba.bac.2010

مادة الريـــــاضيات بكالوريا 2020

الاحتمالات

خاص بالشعب العلمية

محطة تفصيلية ثمينة

الاحتمالات تحت المجهر

من إعداد الأستاذ : توامي عمر

... تذكروا أنَّ : الخوف عدو الإنجاز

https://www.facebook.com/okba.bac.2010

العد و الاحتمالات

❶ مفاهيم عامة :

- موضوع الاحتمالات يهتم بدراسة التجارب العشوائية فقط .
- نسمي تجربة عشوائية كل تجربة نتائجها معلومة مسبقاً قبل إجرائها و لا يمكن توقع بنتيجة هذه التجربة .
- نسمي مجموعة النتائج الممكنة بمجموعة الإمكانيات و نرمز لها بـ Ω .
- نسمي حادثة كل مجموعة جزئية من المجموعة Ω و نرمز لها بـ A ، B ، C ... إلخ .

مثال : نرمي زهرة نرد غير مزيفة أوجهها مرقمة من 1 إلى 6 مرة واحدة ، و نتيجة التجربة هي الرقم الذي يظهر على الوجه العلوي .

- نسمي هذه التجربة تجربة عشوائية لأن نتائجها معلومة مسبقاً و هي ظهور أحد الأرقام : 1 ، 2 ، 3 ، 4 ، 5 ، 6 .

لكن لا يمكن توقع أي رقم سيظهر بعد السقوط .

- مجموعة الإمكانيات هي : $\Omega=\{1,2,3,4,5,6\}$.
- الحادثة ظهور الرقم 6 فقط هي : $\{6\}$ ، تسمى حادثة أولية .
- الحادثة ظهور رقم أكبر من 7 هي : $\varnothing$ ، تسمى حادثة مستحيلة .
- الحادثة ظهور رقم أصغر من 7 هي : $\Omega=\{1,2,3,4,5,6\}$ ، تسمى حادثة أكيدة .

زهرة نرد

مصطلحات :

بدلاً من	نقول
$A\in\Omega$	A حادثة
$A=\Omega$	الحادثة A أكيدة
$A=\varnothing$	الحادثة A مستحيلة
$A\cap B$	الحادثة A و الحادثة B
$A\cup B$	الحادثة A أو الحادثة B
$A\cap B=\varnothing$	A و B حادثتان غير متلائمتان
$\overline{A}$	الحادثة العكسية للحادثة A

تطبيق 01

يحتوي كيس على 10 كريات مرقمة من 1 إلى 10 ، نسحب عشوائياً من الكيس كرة واحدة و نسجل رقمها .

1/ عين Ω مجموعة الإمكانيات .

2/ عين A "الحصول على رقم زوجي" .

3/ عين B "الحصول على رقم مضاعف للعدد 3 " .

4/ عين الحوادث $A\cap B$ ، $A\cup B$ ، $\overline{A}$ ، $\overline{B}$.

الحل

1/ مجموعة الإمكانيات هي : $\Omega=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$.

2/ الأعداد الزوجية المحصورة بين 1 وَ 10 هي الحادثة A حيث : $A=\{2,4,6,8,10\}$.

3/ مضاعفات العدد 3 المحصورة بين 1 وَ 10 هي الحادثة B حيث : $B=\{3,6,9\}$.

4/ ⇦ $A\cap B$ هي الحادثة " الحصول على رقم زوجي و مضاعف للعدد 3 " إذن : $A\cap B=\{6\}$.

⇦ $A\cup B$ هي الحادثة " الحصول على رقم زوجي أو من مضاعف للعدد 3 " إذن : $A\cup B=\{2,3,4,6,8,9,10\}$.

⇦ $\overline{A}$ هي الحادثة العكسية للحادثة A أي الحصول على رقم فردي ، إذن : $\overline{A}=\{1,3,5,7,9\}$.

⇦ $\overline{B}$ هي الحادثة العكسية للحادثة B أي الحصول على رقم ليس من مضاعفات 3 ، إذن : $\overline{B}=\{1,2,4,5,7,8,10\}$.

❷ العد (القوائم ، التراتيبات ، التبديلات ، التوفيقات) :

عاملي عدد طبيعي غير معدوم :

تعريف : n عدد طبيعي غير معدوم .

نسمي عاملي n العدد الذي نرمز له بـ $n!$ و المعرف كما يلي : $n!=n\times(n-1)\times(n-2)\times....\times2\times1$

ملاحظة: $0!=1$ ، $1!=1$.

أمثلة : 1/ $2!=2\times1=2$

2/ $3!=3\times2\times1=6$

3/ $5!=5\times4\times3\times2\times1=120$

4/ $16!=16\times15\times14\times13\times12\times11\times10!$

في كل ما يلي نعتبر E مجموعة منتهية ذات n عنصراً ($n\geq1$) وَ p عدد طبيعي حيث $p\geq1$.

القوائم :

تعريف : نسمي قائمة ذات p عنصر من المجموعة E كل متتالية مرتبة من p عنصر من عناصر المجموعة E ،

عدد هذه القوائم هو : n^p .

مثال: إذا كانت المجموعة $E=\{1;2;3;4\}$ فإن :

⇦ الثنائيتين $(1;2)$ ، $(2;1)$ قائمتان مختلفتان لعنصرين من المجموعة E .

⇦ الثلاثية $(2;3;2)$ قائمة ذات ثلاث عناصر من المجموعة E .

تطبيق 02

إذا كانت المجموعة $E=\{1;2;3\}$.

– كم عدد القوائم ذات عنصرين من المجموعة E ، ثم أوجدها .

الحل

– من أجل $n=3$ وَ $p=2$ يكون عدد القوائم هو $3^2=9$.

– قوائم المجموعة ذات عنصرين هي : $\{(1;1),(1;2),(1;3),(2;1),(2;2),(2;3),(3;1),(3;2),(3;3)\}$.

تطبيق 03

يحتوي كيس على 7 قريصات مرقمة من 1 إلى 7 ، نسحب منه 4 قريصات على التوالي بحيث نعيد في كل مرة القريصة إلى الكيس و نشكل عدداً ذي 4 أرقام .

– ما هو عدد الأعداد التي يمكن تشكيلها ؟

الحل

كل عدد ذي 4 أرقام هو قائمة ذات 4 عناصر من بين 7 عناصر و بالتالي عدد الأعداد التي يمكن تشكيلها هو $7^4 = 2401$.

تطبيق 04

قطعة نقدية تحمل وجهين فقط هما P وَ F ، نرمي هذه القطعة 3 مرات و نراقب الوجه العلوي بعد سقوطها .

- عين مجموعة الإمكانيات لهذه التجربة .

الحل

كل إمكانية هي قائمة ذات 3 عناصر من بين عنصرين و بالتالي عدد الإمكانيات هو $2^3 = 8$.

لتكن E مجموعة الإمكانيات لهذه التجربة حيث :

$$E=\{(P;P;P),(P;P;F),(P;F;P),(F;P;P),(P;F;F),(F;P;F),(F;F;P),(F;F;F)\}$$

الترتيبات :

تعريف : نسمي ترتيبة ذات p عنصر من المجموعة E ذات n عنصر كل قائمة بحيث تكون عناصرها متمايزة مثنى مثنى .

عدد هذه الترتيبات هو A_n^p حيث : $A_n^p = n\times(n-1)\times(n-2)\times....\times(n-p+1)$

أو : $A_n^p = \dfrac{n!}{(n-p)!}$ مع $n \geq p$

مثال: إذا كانت المجموعة $E=\{1;2;3;4\}$ فإن :

- القائمتين $(1;3)$ ، $(3;1)$ ترتيبتان مختلفتان لعنصرين من المجموعة E .
- القائمة $(3;1;3)$ ليست ترتيبة لثلاث عناصر لأن العدد 3 مكرر.

تطبيق 05

إذا كانت المجموعة $E=\{1;2;3;4\}$.

- كم عدد الأعداد ذات رقمين متمايزين و التي يمكن تشكيلها من أرقام المجموعة E ، ثم أوجدها.

الحل

كل عدد هو ترتيبة ذات عنصرين مختلفين من بين 4 عناصر المجموعة E و بالتالي عدد الأعداد التي يمكن تشكيلها هو

$A_4^2 = 4\times3 = 12$ (لاحظ أن : $A_4^2 = \dfrac{4!}{(4-2)!} = \dfrac{4!}{2!} = \dfrac{4\times3\times2\times1}{2\times1} = \dfrac{24}{2} = 12$)

و هذه الأعداد هي: $\{12;13;14;21;23;24;31;32;34;41;42;43\}$.

تطبيق 06

في قسم نهائي علمي 6 تلاميذ تتوفر فيهم شروط لتكوين لجنة تحتوي على رئيس القسم و نائبه الأول و نائبه الثاني .

- ما هو عدد الطرق التي يمكن أن نختارها ؟

الحل

كل لجنة هي ترتيبة ذات 3 تلاميذ مختلفون مثنى مثنى من بين 6 تلاميذ و بالتالي عدد الطرق التي يمكن أن نختارها هو

$A_6^3 = \dfrac{6!}{(6-3)!} = 6\times5\times4 = 120$.

التبديلات :

تعريف : نسمي تبديلة كل ترتيبة ذات n عنصراً من مجموعة ذات n عنصراً ، عدد هذه التبديلات هو : $A_n^n = n!$.

تطبيق 07

نعتبر مجموعة E تتكون من 3 حروف فقط هي : م ، ل ، ح .

- كم عدد الكلمات المكونة من 3 حروف مختلفة التي يمكن تكوينها من حروف المجموعة E ، ثم أوجدها.

الحل

كل كلمة هي تبديلة ذات 3 حروف مختلفين من بين 3 حروف المجموعة E و بالتالي عدد الكلمات التي يمكن تكوينها هو $3! = 3 \times 2 = 6$

و هي : ملح ، محل ، لحم ، لمح ، حلم ، حمل .

تطبيق 08

عشر سيارات مخصصة للسباقات ، نريد ترقيمها من 1 إلى 10

- ما هو عدد الطرق لترقيم هذه السيارات بحيث كل واحدة تحمل رقماً واحداً فقط .

الحل

كل طريقة هي تبديلة ذات 10 أرقم و بالتالي عدد الطرق لترقيم هذه السيارات هو $10! = 10 \times 9 \times ... \times 2 \times 1 = 3628800$.

التوفيقات :

تعريف : نسمي توفيقة ذات p عنصر من المجموعة E ذات n عنصر كل جزء من المجموعة E ذي p عنصراً من عناصر E .

عدد هذه التوفيقات هو C_n^p حيث : $C_n^p = \dfrac{n!}{p!(n-p)!}$ مع $n \geq p$

خواص: $C_n^0 = C_n^n = 1$ ، $C_n^1 = C_n^{n-1} = n$ ، $C_n^p = C_n^{n-p}$ ، $C_n^p = C_{n-1}^{p-1} + C_{n-1}^p$.

تطبيق 09

يحتوي كيس على 7 قريصات مرقمة من 1 إلى 7 ، نسحب منه 4 قريصات في آنٍ واحد لتشكيل عدداً ذي 4 أرقام .

- ما هو عدد الأعداد التي يمكن تشكيلها ؟

الحل

كل عدد ذي 4 أرقام هو توفيقة ذات 4 عناصر من بين 7 عناصر و بالتالي عدد الأعداد التي يمكن تشكيلها هو

$$C_7^4 = \frac{7!}{4!(7-4)!} = \frac{7!}{4! \times 3!} = \frac{7 \times \cancel{6} \times 5 \times \cancel{4!}}{\cancel{4!} \times \cancel{(3 \times 2 \times 1)}} = 35 .$$

تطبيق 10

تلميذ في ثانوية له 15 صديق ، ما هو عدد الطرق التي يدعو بها 10 أصدقاء لحضور وليمة ؟

الحل

عدد الطرق الممكنة هي توفيقة ذات 10 أصدقاء من بين 15 صديق و بالتالي عددها هو

$$C_{15}^{10} = \frac{15!}{10!(15-10)!} = \frac{15!}{10! \times 5!} = \frac{\cancel{15} \times 14 \times 13 \times 12 \times 11 \times \cancel{10!}}{\cancel{10!} \times \cancel{5} \times 4 \times \cancel{3} \times 2 \times 1} = 3003$$

❸ دستور ثنائي الحد :

مبرهنة : ليكن a وَ b حقيقيان غير معدومين ، n عدد طبيعي .

$$(a+b)^n=\sum_{p=0}^{p=n}C_n^p a^{n-p}b^p=a^n+C_n^1a^{n-1}b+\ldots+C_n^{n-1}a^{n-1}b^{n-1}+b^n$$

تطبيق 11

1/ عين معامل x^4 في نشر كثير الحدود $(x+2)^6$.

2/ عين معامل x^5y^5 في نشر كثير الحدود $(x-y)^{10}$.

الحل

1/ لدينا: $(x+2)^6=\sum_{p=0}^{p=6}C_6^p 2^{6-p}x^p$

من أجل $p=4$ فإن : $C_6^4 2^{6-4}=\frac{6!}{4!(6-4)!}\times 2^2=\frac{6\times 5\times \cancel{4!}}{\cancel{4!}\times 2}\times 2^2=60$

إذن معامل x^4 في نشر كثير الحدود $(x+2)^6$ هو 60 .

2/ لدينا: $(x-y)^{10}=(x+(-y))^{10}=\sum_{p=0}^{p=10}C_{10}^p x^{10-p}(-y)^p=\sum_{p=0}^{p=10}C_{10}^p(-1)^p x^{10-p}y^p$

من أجل $p=5$ فإن : $C_{10}^5(-1)^5=\frac{10!}{5!(10-5)!}\times(-1)=-\frac{10\times 9\times 8\times 7\times 6\times \cancel{5!}}{\cancel{5!}\times 5\times 4\times 3\times 2\times 1}=-252$

إذن معامل x^5y^5 في نشر كثير الحدود $(x-y)^{10}$ هو -252 .

❹ الاحتمالات المتساوية على مجموعة منتهية :

قانون الاحتمال :

تعريف : لتكن Ω مجموعة الإمكانيات لتجربة عشوائية حيث $\Omega=\{e_1,e_2,\ldots,e_n\}$ ، مع e_1 ، e_2 ،.... ، e_n هي إمكانيات (مخارج) قانون الاحتمال P لتجربة عشوائية هو إرفاق كل مخرج e_i بعدد موجب P_i مع $1\le i\le n$ بحيث يتحقق: $P_1+P_2+\ldots+P_i=1$

و يكون قانون الاحتمال معرف بالجدول التالي :

Ω	e_1	e_2	....	e_n
P	P_1	P_2	....	P_n

ملاحظات:
- نمذجة تجربة عشوائية يعني إرفاقها بمجموعة إمكانيات Ω و قانون احتمال P على Ω .
- من أجل كل $i\in\{1,2,\ldots,n\}$ ، لدينا : $0\le P_i\le 1$.
- احتمال الحادثة A يرمز له بـ $P(A)$.

تطبيق 12

ثلاث سيارات A ، B وَ C مخصصة للسباق ، إذا كان احتمال فوز السيارة A هو ضعف احتمال فوز السيارة B وَ احتمال فوز السيارة B هو ضعف احتمال فوز السيارة C ما هو احتمال فوز كل سيارة ؟

الحل

لدينا من المعطيات : $P(A)=2P(B)$ وَ $P(B)=2P(C)$ وَ بالتالي : $P(A)=4P(C)$

نعلم أن : $P(A)+P(B)+P(C)=1$ منه : $4P(C)+2P(C)+P(C)=1$ وَ منه : $7P(C)=1$ إذن : $P(C)=\frac{1}{7}$

و بالتالي : $P(A)=\frac{4}{7}$ وَ $P(C)=\frac{2}{7}$.

تساوي الاحتمال :

تعريف : نقول عن تجربة عشوائية أنها متساوية الاحتمال عندما يكون لكل الحوادث الأولية نفس الاحتمال .

نقول عندئذ أن قانون الاحتمال متساوي التوزيع .

نتائج : نعتبر $\Omega=\{e_1,e_2,...,e_n\}$

- في حالة تساوي الاحتمال فإن : $P_1=P_2=...=P_n=\frac{1}{n}$.
- إذا كانت الحادثة A تحوي على n عنصراً يكون احتمالها $P(A)=\frac{m}{n}$ أي أن : $P(A)=\frac{\text{عدد عناصر } A}{\text{عدد عناصر } \Omega}$.

ملاحظة: بما أن : $P_1+P_2+...+P_n=1$ فإن : $P(\Omega)=1$ وَ $P(\varnothing)=0$.

خواص الاحتمالات :

لغة الحوادث	الخاصية
A حادثة كيفية	$0\le P(A)\le 1$
الحادثة المستحيلة	$P(\varnothing)=0$
الحادثة الأكيدة	$P(\Omega)=1$
$\overline{A}$ الحادثة العكسية للحادثة A	$P(\overline{A})=1-P(A)$
A وَ B حادثتين غير متلائمتين $(A\cap B=\varnothing)$	$P(A\cup B)=P(A)+P(B)$
A وَ B حادثتين كيفيتين	$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$
$A\subseteq B$	$P(A)\le P(B)$

تطبيق 13

في كلا الحالتين نسحب من الكيس كرة واحدة و لا نفرق بين الكرات عند اللمس .

الحالة الأولى : يحتوي كيس على 6 كرات مرقمة من 1 إلى 6 .

الحالة الثانية : يحتوي كيس على 6 كرات ، كرة تحمل الرقم 1 وَ كرتين تحملان الرقم 2 وَ ثلاث كرات تحمل الرقم 3 .

- ما هو احتمال كل رقم ؟

الحل

- الحالة الأولى : بما أنه لا نفرق بين الكرات عند اللمس فإن كل الكريات لها نفس الاحتمال

و بالتالي : $P(1)=P(2)=P(3)=P(4)=P(5)=P(6)=\frac{1}{6}$.

⇦ الحالة الثانية : احتمال ظهور الرقم 1 هو : $P(1)=\frac{1}{6}$.

احتمال ظهور الرقم 2 هو : $P(2)=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$.

احتمال ظهور الرقم 3 هو : $P(3)=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$.

تطبيق 14

كيس يحتوي على 9 كرات ، منها 4 حمراء مرقمة من 1 إلى 4 وَ 3 خضراء مرقمة من 5 إلى 7 وَ 2 بيضاء مرقمة بالعددين 8 إلى 9 .
نسحب عشوائياً كرة و نسجل لونها .

نعتبر الحوادث التالية : A « حادثة الحصول على اللون الأحمر »

B « حادثة الحصول على اللون الأخضر »

C « حادثة الحصول على رقم زوجي »

D « حادثة الحصول على اللون الأبيض »

– أحسب الاحتمالات التالية : $P(A)$ ، $P(B)$ ، $P(C)$ ، $P(D)$ ، $P(\overline{A})$ ، $P(\overline{C})$ ، $P(A\cap B)$ ، $P(A\cap C)$ ، $P(A\cup C)$.

الحل

بما أن السحب عشوائي فإن الاحتمالات متساوية .

⇦ عدد عناصر A هو 4 إذن : $P(A)=\frac{4}{9}$.

⇦ عدد عناصر B هو 3 إذن : $P(B)=\frac{3}{9}$.

⇦ عدد عناصر C هو 4 إذن : $P(C)=\frac{4}{9}$.

⇦ عدد عناصر D هو 2 إذن : $P(D)=\frac{2}{9}$.

⇦ لدينا : $P(\overline{A})=1-P(A)$ منه : $P(\overline{A})=1-\frac{4}{9}$ إذن : $P(\overline{A})=\frac{5}{9}$.

<u>طريقة أخرى :</u> $\overline{A}$ هي الحادثة العكسية للحادثة A أي لا نحصل على كرة حمراء و بالتالي إما الكرة خضراء أو بيضاء

منه : $P(\overline{A})=P(B)+P(D)$ و منه : $P(\overline{A})=\frac{3}{9}+\frac{2}{9}$ إذن : $P(\overline{A})=\frac{5}{9}$.

⇦ لدينا : $P(\overline{C})=1-P(C)$ منه : $P(\overline{C})=1-\frac{4}{9}$ إذن : $P(\overline{C})=\frac{5}{9}$.

<u>طريقة أخرى :</u> $\overline{C}$ هي الحادثة العكسية للحادثة C أي لا نحصل على رقم زوجي و بالتالي تخب أن نحصل على رقم فردي

إذن : $P(\overline{A})=\frac{5}{9}$ ، لأنه يوجد بالكيس خمسة كرات تحمل رقم فردي .

⇦ $A\cap B$ « حادثة الحصول على كرة حمراء و كرة خضراء » يعني كرتين و هذا مستحيل ، إذن : $P(A\cap B)=\varnothing$.

⇦ $A\cap C$ « حادثة الحصول على كرة حمراء و تحمل رقم زوجي » منه : $P(A\cap C)=\frac{2}{9}$.

⇦ لدينا : $P(A\cup C)=P(A)+P(C)-P(A\cap C)$ منه : $P(A\cup C)=\frac{4}{9}+\frac{4}{9}-\frac{2}{9}$ إذن : $P(A\cap C)=\frac{6}{9}=\frac{2}{3}$.

❺ المتغير العشوائي ، الأمل الرياضي ، التباين وَ الانحراف المعياري :

المتغير العشوائي وَ قانون الاحتمال :

تعريف المتغير العشوائي : Ω المجموعة الشاملة لتجربة عشوائية ، نسمي متغيراً عشوائياً على Ω كل دالة عددية معرفة على Ω .

تعريف قانون الاحتمال : X متغير عشوائي معرف على Ω ، لتكن I مجموعة قيم X أي : $I=\{x_1,x_2,...,x_n\}$

و ليكن P_i احتمال الحادثة : « X يأخذ القيمة " x_i " أي $X=x_i$.

قانون احتمال لمتغير عشوائي X هو الدالة المعرفة على I و التي ترفق بكل قيمة x_i من I العدد $P(X=x_i)$.

x_i	x_1	x_2	....	x_n	المجموع
$P(X=x_i)$	P_1	P_2	....	P_n	1

تطبيق 15

نرمي قطعة نقدية متوازنة مرتين ، نرمز بـ F إلى الوجه وَ بـ P إلى الظهر .

ليكن X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل رمية بعدد مرات ظهور الوجه .

1/ عين Ω مجموعة الإمكانيات لهذه التجربة .

2/ عين قانون احتمال المتغير العشوائي X .

الحل

1/ $\Omega=\{(F,F);(F,P);(P,F);(P,P)\}$ ، لاحظ وجود 4 إمكانيات مختلفة .

2/ قيم المتغير العشوائي هي : $X=\{0,1,2\}$.

الحادثة $(X=0)$ تعني لا يظهر الوجه في الرميتين و عدد عناصرها هو 1 ، إذن : $P(X=0)=\frac{1}{4}$.

الحادثة $(X=1)$ تعني ظهور الوجه مرة واحدة في الرميتين و عدد عناصرها هو 2 ، إذن : $P(X=1)=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$.

الحادثة $(X=2)$ تعني ظهور الوجه في كلا الرميتين و عدد عناصرها هو 1 ، إذن : $P(X=2)=\frac{1}{4}$.

قانون الاحتمال موضح في الجدول التالي :

x_i	0	1	2	المجموع
$P(X=x_i)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{4}$	$\frac{1}{4}$	1

الأمل الرياضياتي ، التباين ، الانحراف المعياري لمتغير عشوائي :

تعاريف :

⇦ الأمل الرياضياتي للمتغير X هو العدد $E(X)$ حيث : $E(X)=\sum_{i=0}^{n}x_iP(x_i)$.

⇦ التباين للمتغير X هو العدد $V(X)$ حيث : $V(X)=\sum_{i=0}^{n}(x_i-E(X))^2P(x_i)$.

⇦ الانحراف المعياري للمتغير X هو العدد $\sigma(X)$ حيث : $\sigma(X)=\sqrt{V(X)}$.

ملاحظات : ⇦ $E(X)$ هو معدل القيم x_i مرفقة بالقيم P_i بالمقارنة مع مجال الإحصاء $E(X)$ هو $\overline{x}$.

⇦ في ميدان الألعاب $E(X)$ هو الربح المتوسط الذي يأمله اللاعب بعد تكرار اللعبة عدة مرات ، إذا كان :

- $E(X)=0$ نقول أن اللعبة عادلة .
- $E(X)>0$ نقول أن اللعبة مربحة .
- $E(X)<0$ نقول أن اللعبة مخسرة .

⇦ في ميدان الإحصاء فإن التباين و الانحراف المعياري هي مقاييس تشتت .

تطبيق 16

في تجربة عشوائية ، قانون احتمال المتغير العشوائي X موضح في الجدول :

x_i	2	-3	0	1
$P(X=x_i)$	$\frac{1}{10}$	$\frac{3}{10}$	?	$\frac{1}{10}$

1/ أوجد قيمة الاحتمال $P(X=x_3)$.

2/ أحسب كل من الأمل الرياضياتي ، التباين و الانحراف المعياري للمتغير X .

الحل

1/ حساب قيمة الاحتمال $P(X=x_3)$:

نعلم أن : $P(X=x_1)+P(X=x_2)+P(X=x_3)+P(X=x_4)=1$ منه : $\frac{1}{10}+\frac{3}{10}+P(X=x_3)+\frac{1}{10}=1$

و منه : $\frac{1}{2}+P(X=x_3)=1$ و منه : $P(X=x_3)=1-\frac{1}{2}$ إذن : $P(X=x_3)=\frac{1}{2}$.

2/ حساب الأمل الرياضياتي:

لدينا : $E(X)=\sum_{i=0}^{4}x_iP(x_i)$ تكافئ : $E(X)=x_1P(x_1)+x_2P(x_2)+x_3P(x_3)+x_4P(x_4)$

تكافئ : $E(X)=2\left(\frac{1}{10}\right)-3\left(\frac{3}{10}\right)+0\left(\frac{1}{2}\right)+1\left(\frac{1}{10}\right)$ تكافئ : $E(X)=\frac{2}{10}-\frac{9}{10}+\frac{1}{10}=\frac{-6}{10}$ إذن : $E(X)=\frac{-3}{5}$.

حساب التباين: لدينا : $V(X)=\sum_{i=0}^{n}(x_i-E(X))^2P(x_i)$

تكافئ : $V(X)=(x_1-E(X))^2P(x_1)+(x_2-E(X))^2P(x_2)+(x_3-E(X))^2P(x_3)+(x_4-E(X))^2P(x_4)$

تكافئ : $V(X)=\left(2+\frac{3}{5}\right)^2\frac{1}{10}+\left(-3+\frac{3}{5}\right)^2\frac{3}{10}+\left(0+\frac{3}{5}\right)^2\frac{1}{2}+\left(1+\frac{3}{5}\right)^2\frac{1}{10}$

تكافئ : $V(X)=\frac{169}{25}\times\frac{1}{10}+\frac{144}{25}\times\frac{3}{10}+\frac{9}{25}\times\frac{1}{2}+\frac{64}{25}\times\frac{1}{10}$ إذن : $V(X)=\frac{710}{250}=\frac{71}{25}$.

حساب الانحراف المعياري: لدينا : $\sigma(X)=\sqrt{V(X)}$ منه : $\sigma(X)=\sqrt{\frac{71}{25}}$ إذن : $\sigma(X)=\frac{\sqrt{71}}{5}$.

تطبيق 17

يدفع اللاعب x ديناراً ثم يرمي زهرة نرد غير مزيفة ذات 12 وجها مرقمة من 1 إلى 12 ، إذا ظهر رقم زوجي يحصل اللاعب على دينارين اثنين و إذا ظهر أحد الأرقام 7 ، 9 ، 11 يحصل اللاعب علا ثمانية دنانير أما إذا ظهر أحد الأرقام 1 ، 3 ، 5 فإنه يحصل على ثلاثة دنانير .

1/ أوجد قيمة x حتى تكون اللعبة عادلة .

2/ إذا كان $x=4$ ، هل المشاركة في هذه اللعبة هي لصالح اللاعب ؟

الحل

1/ تكون اللعبة عادلة إذا كان الأمل الرياضياتي معدوم أي : $E(X)=0$ ، حيث X هو الربح المحتمل

إذن قيم المتغير العشوائي هي : $X=\{2-x,3-x,8-x\}$

الحادثة $(X=2-x)$ يعني ظهور عدد زوجي و عدد عناصرها هو 6 ، إذن : $P(X=2-x)=\frac{6}{12}=\frac{1}{2}$.

الحادثة $(X=3-x)$ يعني ظهور أحد الأرقام 7 ، 9 ، 11 و عدد عناصرها هو 3 ، إذن : $P(X=3-x)=\frac{3}{12}=\frac{1}{4}$.

الحادثة $(X=8-x)$ يعني ظهور أحد الأرقام 1 ، 3 ، 5 و عدد عناصرها هو 3 ، إذن : $P(X=8-x)=\frac{3}{12}=\frac{1}{4}$.

قانون الاحتمال موضح في الجدول التالي :

X	$2-x$	$3-x$	$8-x$
$P(X)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$

لدينا: $E(X)=0$ تكافئ : $(2-x)\frac{1}{2}+(3-x)\frac{1}{4}+(8-x)\frac{1}{4}=0$ تكافئ : $\frac{15}{4}-x=0$ إذن : $x=\frac{15}{4}\approx 3,75\,DA$

2/ لدينا: $E(X)=3,75-x$ و من أجل $x=4$ يكون لدينا : $E(X)=-0,25$

بما أن $E(X)<0$ فإن اللعبة مخسرة ، و بالتالي المشاركة ليست في مصلحة اللاعب .

❻ الاحتمالات الشرطية وَ دستور الاحتمالات الكلية :

الاحتمالات الشرطية :

تعريف: لتكن Ω مجموعة الإمكانيات المتعلقة بتجربة عشوائية ، P احتمال معرف على Ω ، A وَ B حادثتان حيث $P(A)\neq 0$ نسمي احتمال الحادثة B علماً أن الحادثة A محققة العدد الذي نرمز له بـ $P_A(B)$ أو $P(B\setminus A)$ و المعرف بالعبارة التالية :

$$P_A(B)=\frac{p(A\cap B)}{P(A)}$$

خواص : ① $P_A(\overline{B})=1-P_A(B)$

② إذا كان $A\cap B=\varnothing$ فإن : $P_A(B)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}=\frac{P(\varnothing)}{P(A)}=0$

③ إذا كان $A\subseteq B$ فإن : $P_A(B)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}=\frac{P(A)}{P(A)}=1$

ملاحظات : ① $P(A\cap B)=P(A)\times P_A(B)$ يعني احتمال وقوع الحادثتين A و B و يدل على وقوع A ثم وقوع B .

② $P(A\cap B)=P(B)\times P_B(A)$ يعني احتمال وقوع الحادثتين A و B و يدل على وقوع B ثم وقوع A .

③ $P(A\cap B\cap C)=P(A)\times P_A(B)\times P_{A\cap B}(C)$ يعني احتمال وقوع الحادثتين A و B و C و يدل على وقوع A ثم وقوع B ثم وقوع C .

تطبيق 18

يحتوي صندوق على 10 كريات مرقمة من 1 إلى 10، نسحب من الصندوق كرة واحدة .

نعتبر A « حادثة الحصول على رقم زوجي » وَ B « حادثة الحصول على رقم أكبر من 6 »

- احسب الاحتمالات التالية : $P(A)$ ، $P(B)$ ، $P(A\cap B)$ ، $P_A(B)$ ، $P_B(A)$.

الحل

لاحظ أن مجموعة الإمكانيات هي : $\Omega=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$

⇦ لدينا : $A=\{2,4,6,8,10\}$ و عدد عناصرها هو 5 إذن : $P(A)=\frac{5}{10}=\frac{1}{2}$.

⇦ لدينا : $B=\{7,8,9,10\}$ و عدد عناصرها هو 4 إذن : $P(B)=\frac{4}{10}=\frac{2}{5}$.

⇦ لدينا : $A\cap B=\{8,10\}$ و عدد عناصرها هو 2 إذن : $P(A\cap B)=\frac{2}{10}=\frac{1}{5}$.

⇦ لدينا : $P_A(B)=\frac{p(A\cap B)}{P(A)}=\frac{\frac{1}{5}}{\frac{1}{2}}=\frac{2}{5}$ إذن : $P_A(B)=\frac{2}{5}$.

⇦ لدينا : $P_B(A)=\frac{p(A\cap B)}{P(B)}=\frac{\frac{1}{5}}{\frac{2}{5}}=\frac{1}{2}$ إذن : $P_B(A)=\frac{1}{2}$.

تطبيق 19

في ثانوية 85% من التلاميذ يحبون مادة الرياضيات وَ 50% يحبون مادة الفيزياء وَ 45% يحبون المادتين معاً ، اخترنا بطريقة عشوائية تلميذاً واحداً من الثانوية .

1/ ما هو احتمال أن يكون التلميذ المختار يحب مادة الرياضيات علماً أنه يحب مادة الفيزياء .

2/ إذا علمت أن التلميذ يحب مادة الرياضيات ، ما احتمال أن يكون التلميذ المختار يحب مادة الفيزياء .

3/ ما هو احتمال أن يكون التلميذ المختار يحب مادة الرياضيات علماً أنه لا يحب مادة الفيزياء .

الحل

نسمي A الحادثة « التلميذ المختار يحب مادة الرياضيات » وَ B الحادثة « التلميذ المختار يحب مادة الفيزياء »

- احتمال أن يكون التلميذ المختار يحب مادة الرياضيات هو : $P(A)=\frac{85}{100}$.
- احتمال أن يكون التلميذ المختار يحب مادة الفيزياء هو : $P(B)=\frac{50}{100}$.
- احتمال أن يكون التلميذ المختار يحب المادتين معاً هو : $P(A\cap B)=\frac{45}{100}$.

1/ احتمال أن يكون التلميذ المختار يحب مادة الرياضيات علماً أنه يحب مادة الفيزياء هو $P_B(A)$ حيث : $P_B(A)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}$

منه : $P_B(A)=\frac{\frac{45}{100}}{\frac{50}{100}}=\frac{45}{50}=\frac{9}{10}$ إذن : $P_B(A)=\frac{9}{10}$.

2/ احتمال أن يكون التلميذ المختار يحب مادة الفيزياء علماً أنه يحب مادة الرياضيات هو $P_A(B)$ حيث : $P_A(B)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}$

منه : $P_A(B)=\frac{\frac{45}{100}}{\frac{85}{100}}=\frac{45}{85}=\frac{9}{17}$ إذن : $P_A(B)=\frac{9}{17}$.

3/ احتمال أن يكون التلميذ المختار يحب مادة الرياضيات علماً أنه لا يحب مادة الفيزياء هو $P_{\overline{B}}(A)$ حيث : $P_{\overline{B}}(A)=\frac{P(A\cap\overline{B})}{P(\overline{B})}$

- الحادثة $A\cap\overline{B}$ تعني التلميذ يحب مادة الرياضيات و لا يحب مادة الفيزياء و بالتالي : $P(A\cap\overline{B})=P(A)-P(A\cap B)$

منه : $P(A\cap\overline{B})=\frac{85}{100}-\frac{45}{100}=\frac{40}{100}=\frac{2}{5}$

- الحادثة $\overline{B}$ تعني التلميذ لا يحب مادة الفيزياء و بالتالي : $P(\overline{B})=1-P(B)$ منه : $P(\overline{B})=1-\frac{50}{100}=\frac{50}{100}=\frac{1}{2}$

منه الاحتمال المطلوب هو : $P_{\overline{B}}(A)=\frac{\frac{2}{5}}{\frac{1}{2}}$ أي : $P_{\overline{B}}(A)=\frac{4}{5}$.

تطبيق 20

يحتوي كيس على 10 كرات منها 5 حمراء وَ 3 بيضاء وَ 2 خضراء ، نسحب من الكيس عشوائيا (لا نفرق بينها عند اللمس) ثلاث كرات على التوالي دون إرجاع إلى الكيس .

1/ ما هو احتمال سحب كرة حمراء و كرة بيضاء و كرة خضراء بهذا الترتيب .

2/ ما هو احتمال سحب ثلاث كرات تحمل ألوان العالم الجزائري .

الحل

لتكن A الحادثة « الكرة الأولى المسحوبة حمراء »

وَ B الحادثة « الكرة الثانية المسحوبة بيضاء »

وَ C الحادثة « الكرة الثالثة المسحوبة خضراء »

1/ احتمال سحب كرة حمراء ثم كرة بيضاء ثم كرة خضراء هو $P(A\cap B\cap C)$

حيث : $P(A\cap B\cap C)=P(A)\times P_A(B)\times P_{A\cap B}(C)$ منه : $P(A\cap B\cap C)=\frac{5}{10}\times\frac{3}{9}\times\frac{2}{8}$ إذن : $P(A\cap B\cap C)=\frac{1}{24}$.

2/ لتكن D حادثة سحب ثلاث كرات تحمل ألوان العالم الجزائري ، يعني الكرات المسحوبة من ألوان مختلفة

عدد إمكانيات سحب ثلاث ألوان مختلفة بالسحب المذكور هو 6

و هي : $\{(R,B,V);(R,V,B);(V,B,R);(V,R,B);(V,R,B);(V,B,R)\}$

منه: $P(D)=6\times P(A\cap B\cap C)$ إذن : $P(D)=\frac{6}{24}=\frac{1}{4}$.

تطبيق 21

يحتوي صندوق على 5 كرات حمراء وَ 6 كرات بيضاء ، نسحب على التوالي و بدون إرجاع كرتين .

لتكن R_1 حادثة « الحصول على كرة حمراء في السحب الأول »

B_1 حادثة « الحصول على كرة بيضاء في السحب الأول »

R_2 حادثة « الحصول على كرة حمراء في السحب الثاني »

B_2 حادثة « الحصول على كرة بيضاء في السحب الثاني »

1/ أحسب احتمال الحصول على كرة حمراء ثم كرة بيضاء .

2/ أحسب احتمال الحصول على كرة بيضاء ثم كرة حمراء .

3/ أحسب احتمال الحصول على كرتين من لونين مختلفين .

4/ أحسب احتمال الحصول على كرتين تحملان نفس اللون .

الحل

1/ $P(R_1 \cap B_2) = P(R_1) \times P_{R_1}(B_2) = \frac{5}{11} \times \frac{6}{10} = \frac{30}{110}$ منه : $P(R_1 \cap B_2) = \frac{3}{11}$.

2/ $P(B_1 \cap R_2) = P(B_1) \times P_{B_1}(R_2) = \frac{6}{11} \times \frac{5}{10} = \frac{30}{110}$ منه : $P(B_1 \cap R_2) = \frac{3}{11}$.

3/ $P(R_1 \cap B_2) + P(B_1 \cap R_2) = \frac{3}{11} + \frac{3}{11}$ منه : $P(R_1 \cap B_2) + P(B_1 \cap R_2) = \frac{6}{11}$.

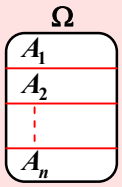
4/ $P(R_1 \cap R_2) + P(B_1 \cap B_2) = P(R_1) \times P_{R_1}(R_2) + P(B_1) \times P_{B_1}(B_2) = \frac{5}{11} \times \frac{4}{10} + \frac{6}{11} \times \frac{5}{10} = \frac{20}{110} + \frac{30}{110} = \frac{50}{110}$

منه : $P(R_1 \cap R_2) + P(B_1 \cap B_2) = \frac{5}{11}$.

تجزئة مجموعة و دستور الاحتمالات الكلية :

تعريف : نقول أن الحوادث A_1 ، A_2 ، ... ، A_n تشكل تجزئة للمجموعة Ω عندما تكون هذه الحوادث غير متلائمة مثنى مثنى و اتحادها هو Ω و كلها غير خالية .

إذن من أجل كل i و j يكون : $A_i \cap A_j = \varnothing$ وَ $A_1 \cup A_1 \cup ... \cup A_n = \Omega$ وَ $A_i \neq \varnothing$.

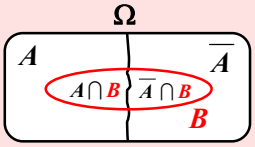


تعريف : A حادثة احتمالها غير معدوم وَ $\overline{A}$ حادثتها العكسية ، A وَ $\overline{A}$ تشكل تجزئة لـ Ω

B حادثة من Ω منه : $B = (A \cap B) \cup (\overline{A} \cap B)$

بما أن الحادثتان $A \cap B$ وَ $\overline{A} \cap B$ غير متلائمتين فإن : $P(B) = P(A \cap B) + P(\overline{A} \cap B)$

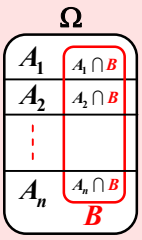
منه : $P(B) = P(A) \times P_A(B) + P(\overline{A}) \times P_{\overline{A}}(B)$ تسمى العلاقة بدستور الاحتمالات الكلية .



تعميم : A_1 ، A_2 ، ... ، A_n تشكل تجزئة للمجموعة Ω وَ B حادثة من Ω

$$P(B) = P(A_1 \cap B) + P(A_2 \cap B) + ... + P(A_n \cap B)$$

$$P(B) = P(A_1) \times P_{A_1}(B) + P(A_2) \times P_{A_2}(B) + ... + P(A_n) \times P_{A_n}(B)$$



تطبيق 22

نرمي مرة واحدة نرد مكعب غير مزور أوجهه مرقمة من 1 إلى 6 ثم نسجل رقم الوجه العلوي بعد السقوط .

نسمي A حادثة « ظهور عدد أولي » وَ B حادثة « ظهور رقم 4 » وَ C حادثة « ظهور أصغر عدد أو أكبر عدد »

1/ عين مجموعة الإمكانيات Ω .

2/ بين أن الحوادث A ، B وَ C تشكل تجزئة للمجموعة Ω .

3/ احسب بطريقتين احتمال الحادثة $E = \{2,3,4,6\}$.

الحل

1/ مجموعة الإمكانيات $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$.

2/ لدينا : $A=\{2,3,5\}$ وَ $B=\{4\}$ وَ $C=\{1,6\}$

بما أن : ① $A\cap B=\varnothing$ وَ $A\cap C=\varnothing$ وَ $B\cap C=\varnothing$ فإن الحوادث A ، B وَ C غير متلائمة مثنى مثنى .

② $A\cup B\cup C=\Omega$.

③ كل الحوادث A ، B وَ C غير خالية .

إذن A ، B وَ C حوادث تشكل تجزئة للمجموعة Ω .

3/ لدينا: $E=\{2,3,4,6\}$ و عدد عناصرها هو 4 إذن : $P(E)=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$.

طريقة أخرى: بما أن A ، B وَ C تشكل تجزئة للمجموعة Ω وَ E حادثة من Ω فإن حسب دستور الاحتمالات الكلية

لدينا : $P(E)=P(A)\times P_A(E)+P(B)\times P_B(E)+P(C)\times P_C(E)$

منه : $P(E)=P(A\cap E)+P(B\cap E)+P(C\cap E)$

مع : $A\cap E=\{2,3\}$ وَ $B\cap E=\{4\}$ وَ $C\cap E=\{6\}$ منه : $P(A\cap E)=\frac{2}{6}$ وَ $P(B\cap E)=\frac{1}{6}$ وَ $P(C\cap E)=\frac{1}{6}$

و بتالي : $P(E)=\frac{2}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}=\frac{4}{6}$ إذن : $P(E)=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$.

❼ الحوادث المستقلة وَ المتغيرات العشوائية المستقلة :

الحوادث المستقلة :

تعريف: نقول عن حادثتين A وَ B أنهما مستقلتان إذا وفقط إذا كان : $P(A\cap B)=P(A)\times P(B)$

ملاحظات :
- إذا كان $P(A)\neq 0$ فإن $P_A(B)=P(B)$.
- إذا كان الحادثتين A وَ B مستقلتان فإن الحادثتين A وَ $\overline{B}$ مستقلتان أيضاً .
- إذا كان الحادثتين A وَ B مستقلتان فإن الحادثتين $\overline{A}$ وَ $\overline{B}$ مستقلتان أيضاً .

تطبيق 23

نرمي مرة واحدة حجر نرد مكعب غير مزيف أوجهه مرقمة من 1 إلى 6 ، لتكن الحوادث : $A=\{1,3,5\}$ ، $B=\{3,6\}$ ، $C=\{1,4,5\}$

1/ احسب احتمال الحوادث A ، B وَ C .

2/ احسب الاحتمالات التالية $P(A\cap B)$ ، $P(A\cap C)$ ، $P(B\cap C)$.

3/ أذكر من بين الحوادث A ، B وَ C المستقلة .

الحل

1/ $P(A)=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$ ، $P(B)=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$ ، $P(C)=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$.

2/ لدينا : $A\cap B=\{3\}$ ، $A\cap C=\{1,5\}$ ، $B\cap C=\{3\}$

منه : $P(A\cap B)=\frac{1}{6}$ ، $P(A\cap C)=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$ ، $P(B\cap C)=\frac{1}{6}$.

3/ لدينا : $P(A)\times P(B)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$ منه : $P(A\cap B)=P(A)\times P(B)$ و بالتالي الحادثتان A وَ B مستقلتان .

وَ : $P(A)\times P(C)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$ منه : $P(A\cap C)\neq P(A)\times P(C)$ و بالتالي الحادثتان A وَ C غير مستقلتان .

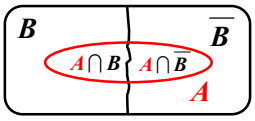
وَ : $P(B)\times P(C)=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{6}$ منه : $P(B\cap C)=P(B)\times P(C)$ و بالتالي الحادثتان B وَ C مستقلتان .

تطبيق 24

لتكن A وَ B حادثتان مستقلتان ، بين في كل حالة أن :

1/ A وَ $\overline{B}$ حادثتان مستقلتان 2/ $\overline{A}$ وَ B حادثتان مستقلتان 3/ $\overline{A}$ وَ $\overline{B}$ حادثتان مستقلتان .

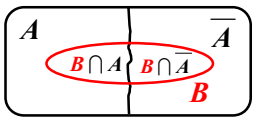
الحل



1/ لدينا : $A\cap\overline{B}=A-A\cap B$ منه : $P\left(A\cap\overline{B}\right)=P(A)-P(A\cap B)$

و منه : $P\left(A\cap\overline{B}\right)=P(A)-P(A)\times P(B)$ لأن A وَ B حادثتان مستقلتان

و منه : $P\left(A\cap\overline{B}\right)=P(A)\left[1-P(B)\right]$ إذن : $P\left(A\cap\overline{B}\right)=P(A)\times P\left(\overline{B}\right)$ و بالتالي A وَ $\overline{B}$ حادثتان مستقلتان .



2/ لدينا : $B\cap\overline{A}=B-B\cap A$ منه : $P\left(B\cap\overline{A}\right)=P(B)-P(B\cap A)$

و منه : $P\left(B\cap\overline{A}\right)=P(B)-P(B)\times P(A)$ لأن A وَ B حادثتان مستقلتان

و منه : $P\left(B\cap\overline{A}\right)=P(B)\left[1-P(A)\right]$ إذن : $P\left(B\cap\overline{A}\right)=P(B)\times P\left(\overline{A}\right)$ و بالتالي B وَ $\overline{A}$ حادثتان مستقلتان .

3/ لدينا : $P\left(\overline{A}\cap\overline{B}\right)=P\left(\overline{A\cup B}\right)$ منه : $P\left(\overline{A}\cap\overline{B}\right)=1-P(A\cup B)$

$$=1-\left[P(A)+P(B)-P(A\cap B)\right]$$
$$=1-\left[P(A)+P(B)-P(A)\times P(B)\right]$$
$$=1-P(A)-P(B)+P(A)\times P(B)$$
$$=\underbrace{1-P(A)}-P(B)\underbrace{\left[1-P(A)\right]}$$
$$=\left[1-P(A)\right]\times\left[1-P(B)\right]$$

$P\left(\overline{A}\cap\overline{B}\right)=P\left(\overline{A}\right)\times P\left(\overline{B}\right)$ و بالتالي $\overline{A}$ وَ $\overline{B}$ حادثتان مستقلتان .

تطبيق 25

ليكن احتمال نجاح التلميذين ياسين و مهدي في البكالوريا هو $\frac{2}{3}$ وَ $\frac{4}{7}$ على الترتيب .

نضع A حادثة « نجاح ياسين في البكالوريا » وَ B حادثة « نجاح مهدي في البكالوريا »

<u>ملاحظة :</u> نجاح أو رسوب أحدهما لا يؤثر على نجاح أو رسوب الآخر مما يدل أن A وَ B حادثتان مستقلتان .

1/ أحسب P_1 احتمال نجاح الاثنين معاً في البكالوريا .

2/ أحسب P_2 احتمال نجاح فقط ياسين في البكالوريا .

3/ أحسب P_3 احتمال رسوب الاثنين معاً في البكالوريا .

4/ أحسب P_4 احتمال نجاح أحدهما فقط في البكالوريا .

5/ أحسب P_5 احتمال نجاح أحدهما على الأقل في البكالوريا .

الحل

1/ احتمال نجاح الاثنين معاً هو $P_1=P(A\cap B)$ منه : $P_1=P(A)\times P(B)=\frac{2}{3}\times\frac{4}{7}$ إذن : $P_1=\frac{8}{21}$.

2/ احتمال نجاح فقط ياسين هو $P_2=P\left(A\cap\overline{B}\right)$ منه : $P_2=P(A)\times P\left(\overline{B}\right)=\frac{2}{3}\times\left(1-\frac{4}{7}\right)=\frac{2}{\cancel{3}}\times\frac{\cancel{3}}{7}$ إذن : $P_2=\frac{2}{7}$.

3/ احتمال رسوب الاثنين معاً هو $P_3=P\left(\overline{A}\cap\overline{B}\right)$ منه : $P_3=P\left(\overline{A}\right)\times P\left(\overline{B}\right)=\left(1-\frac{2}{3}\right)\times\left(1-\frac{4}{7}\right)=\frac{1}{\cancel{3}}\times\frac{\cancel{3}}{7}$ إذن : $P_3=\frac{1}{7}$.

4/ احتمال نجاح أحدهما فقط هو $P_4=P\left(A\cap\overline{B}\right)+P\left(\overline{A}\cap B\right)$ منه : $P_4=P(A)\times P\left(\overline{B}\right)+P\left(\overline{A}\right)\times P(B)$

و منه : $P_4=\frac{2}{3}\times\frac{3}{7}+\frac{1}{3}\times\frac{4}{7}=\frac{6}{21}+\frac{4}{21}$ إذن : $P_4=\frac{10}{21}$.

5/ احتمال نجاح أحدهما على الأقل هو $P_5=P(A\cup B)$ منه : $P_5=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$

و منه : $P_5=\frac{2}{3}+\frac{4}{7}-\frac{8}{21}=\frac{14+12-8}{21}$ إذن : $P_5=\frac{18}{21}$.

المتغيرات العشوائية المستقلة :

تعريف: X وَ Y متغيران عشوائيان معرفان على نفس مجموعة الإمكانيات Ω .

لتكن x_1 ، x_2 ، ... ، x_n قيم المتغير العشوائي X وَ y_1 ، y_2 ، ... ، y_m قيم المتغير العشوائي Y .

نقول أن X وَ Y مستقلان عندما تكون الحادثتان $(X=x_i)$ وَ $(Y=y_j)$ مستقلان من أجل كل $1\le i\le n$ وَ $1\le j\le m$.

تطبيق 26

نرمي ثلاث مرات قطعة نقدية متوازنة تحتوي على(وجه F ، ظهر P) .

نرمز بـ X لعدد مرات ظهور « وجه F » في الرمية الأولى وَ Y لعدد مرات ظهور « وجه F » في الرميتين الثانية و الثالثة .

- بين أن X وَ Y هما متغيران عشوائيان مستقلان .

الحل

لتكن Ω مجموعة الإمكانيات حيث : $\Omega=\{PPP,PPF,PFP,FPP,PFF,FPF,FFP,FFF\}$

لدينا قانون الاحتمال للمتغير العشوائي X موضح في الجدول مع : $\Omega_1=\{P,F\}$

X	$x_1=0$	$x_2=1$
$P(X)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

Y	$y_1=0$	$y_2=1$	$y_3=2$
$P(Y)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

لدينا قانون الاحتمال للمتغير العشوائي Y موضح في الجدول مع : $\Omega_2=\{PP,PF,FP,FF\}$

⇦ لاحظ أن : $P(x_1)\times P(y_1)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{8}$ وَ $x_1\cap y_1=\{PPP\}$ أي : $P(x_1\cap y_1)=\frac{1}{8}$

منه : $P(x_1\cap y_1)=P(x_1)\times P(y_1)$ و بالتالي الحادثتان x_1 وَ y_1 مستقلتان .

⇦ وَ : $P(x_1)\times P(y_2)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$ وَ $x_1\cap y_2=\{PPF,PFP\}$ أي : $P(x_1\cap y_2)=\frac{2}{8}=\frac{1}{4}$

منه : $P(x_1\cap y_2)=P(x_1)\times P(y_2)$ و بالتالي الحادثتان x_1 وَ y_2 مستقلتان .

⇦ وَ : $P(x_1)\times P(y_3)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{8}$ وَ $x_1\cap y_3=\{PFF\}$ أي : $P(x_1\cap y_3)=\frac{1}{8}$

منه : $P(x_1\cap y_3)=P(x_1)\times P(y_3)$ و بالتالي الحادثتان x_1 وَ y_3 مستقلتان .

⇦ وَ : $P(x_2)\times P(y_1)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{8}$ وَ $x_2\cap y_1=\{FPP\}$ أي : $P(x_2\cap y_1)=\frac{1}{8}$

منه : $P(x_2\cap y_1)=P(x_2)\times P(y_1)$ و بالتالي الحادثتان x_2 وَ y_1 مستقلتان .

⇦ وَ : $P(x_2)\times P(y_2)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$ وَ $x_2\cap y_2=\{FPF,FFP\}$ أي : $P(x_2\cap y_2)=\frac{2}{8}=\frac{1}{4}$

منه : $P(x_2\cap y_2)=P(x_2)\times P(y_2)$ و بالتالي الحادثتان x_2 وَ y_2 مستقلتان .

⇦ وَ : $P(x_2)\times P(y_3)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{8}$ وَ $x_2\cap y_3=\{FFF\}$ أي : $P(x_2\cap y_3)=\frac{1}{8}$

منه : $P(x_2\cap y_3)=P(x_2)\times P(y_3)$ و بالتالي الحادثتان x_2 وَ y_3 مستقلتان .

النتيجة : X وَ Y متغيران عشوائيان مستقلان .

السلسلة الفضّية

الأستاذ نور الدين عيساوي

بالتعاون مع فريق عكاشة

الاحتمالات من الألف إلى الياء

أكثر من 40 تمرين في الاحتمالات

موافقة لفيديوهات اليوتيوب YouTube

- ملخص [illegible] الاحتمالات
[illegible]همة
- جميع م[illegible]وريا - الاحتمالات
• شـ[illegible]م التجريبية
• شعبة [illegible] الرياضي
• شعبة الرياضيـــات
- مواضيع مقترحـة
- مواضيع مقتبسة من مواضيـع أجنبيّـة

التحضير الجيد لبكالوريا الجزائر

عكاشة BOOKSTORE
We can help you
يمكننا أن نساعدك

Scanned with CamScanner

I. الملخّص الشّامل

01. القانون العام

القانون العام لحساب احتمال حادثة:

في حالة تساوي احتمال على مجموعة شاملة E يكون لدينا من أجل كلّ حادثة A:

$$P(A) = \frac{\text{عدد عناصر } A}{\text{عدد عناصر } E}$$

مثال: نرمي زهر نرد غير مزيّف ذو ستّة أوجه مرقّمة من 1 إلى 6. احسب احتمال الأحداث:

- الحادثة A: "ظهور عدد زوجي".
- الحادثة B: "ظهور عدد فردي".
- الحادثة C: "ظهور عدد أوّلي".

الحلّ:

✓ "زهر نرد غير مزيّف": يقصد بهذه العبارة أنّ احتمال ظهور أيّ وجه هو مساو لاحتمال ظهور وجه غيره، فيُستفاد منها أنّ الأحداث تجري في حالة تساوي الاحتمال.

1). مجموعة الإمكانيات هي: $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

- الحادثة A: $A = \{2, 4, 6\}$
- الحادثة B: $B = \{1, 3, 5\}$
- الحادثة C: $C = \{2, 3, 5\}$

2). حساب الاحتمالات:

$$P(x) = \frac{\text{عدد الحالات الملائمة}}{\text{عدد الحالات الممكنة}}$$

- الحادثة A: $P(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$
- الحادثة B: $P(B) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$
- الحادثة C: $P(C) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

✓ يلاحظ أنّ حادثة ظهور عدد زوجي هي عكس حادثة ظهور عدد فردي، وبالتّالي فالحادثتان A و B متعاكستان أي أنّ: $A = \overline{B}$

وعليه فإنّ:

$$P(A) + P(\overline{A}) = P(A) + P(B) = 1$$

02. خواص

أجزاء E	لغة الأحداث	الخاصيّة
A	A حادثة كيفيّة	$1 \geq P(A) \geq 0$
$\emptyset$	الحادثة المستحيلة	$P(\emptyset) = 0$
E	الحادثة الأكيدة	$P(E) = 1$
$A \cap B = \emptyset$	A و B غير متلائمتين	$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$
$\overline{A}$	$\overline{A}$ الحادثة العكسيّة للحادثة A	$P(\overline{A}) = 1 - P(A)$
B, A	A و B كيفيّتان	$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

✓ في مجال الاحتمالات نقرأ الرّمز $\cap$ "وَ"، ونقرأ الرّمز $\cup$ "أو".

مثال: إذا علمت أنّ:

$P(A) = 0.45, P(B) = 0.6, P(A \cup B) = 0.8$

احسب: $P(\overline{A})$ و $P(A \cap B)$؟

الحلّ:

1). حساب $P(\overline{A})$: نعلم أنّ:

$$P(A) + P(\overline{A}) = 1 \Leftrightarrow P(\overline{A}) = 1 - P(A)$$
$$P(\overline{A}) = 1 - 0.45 = 0.55$$

2). حساب $P(A \cap B)$: نعلم أنّ:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$
$$P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B)$$
$$P(A \cap B) = 0.45 + 0.6 - 0.8 = 0.25$$

✓ يمكن أن يُطلب إيجاد احتمال الحادثة العكسيّة للحادثة $P(A \cap B)$ وفي هذه الحالة يصبح لدينا:

$$P(A \cap B) + P(\overline{A \cap B}) = 1$$
$$P(\overline{A \cap B}) = 1 - P(A \cap B)$$
$$P(\overline{A \cap B}) = 1 - 0.25 = 0.75$$

Scanned with CamScanner

03. الأحداث المستقلة

A و B حادثتان، حيث $P(A) \neq 0$، $P(B) \neq 0$، نقول عن الحادثتين A و B أنّهما مستقلّتان إذا كان:

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$$

مثال 1:

إذا كانت A و B حادثتان مستقلتين حيث:

$P(A) = 0.4$، $P(B) = 0.3$، احسب $P(A \cap B)$.

$P(A \cap B) = P(A) \times P(B) = 0.4 \times 0.3 = 0.12$

مثال 2:

A و B حادثتان مستقلّتان من مجموعة إمكانيّات، حيث:

$P(A) = 0.3$ و $P(B) = 0.4$، احسب $P(A \cup B)$.

نعلم أنّ: $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

وبما أنّ الحادثتين مستقلّتان فإنّ:

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A) \times P(B)$

$P(A \cup B) = 0.3 + 0.4 - 0.3 \times 0.4 = 0.7 - 0.12$

$P(A \cup B) = 0.58$

04. شجرة الاحتمال

مثال 1:

الجدول التّالي يعطي توزيع 500 تلميذ في إحدى الثّانويات:

التلميذ	ذكور	إناث
يملك هاتفا نقالا	60	240
لا يملك هاتفا نقالا	120	80

نختار عشوائيّا تلميذا من الثّانوية ونسمّي H الحادثة: "التّلميذ المختار ذكرا"، F الحادثة: "التّلميذ المختار أنثى"، S الحادثة "التّلميذ يملك هاتفا نقّالا"، $\overline{S}$ الحادثة "التّلميذ لا يملك هاتفا نقّالا".

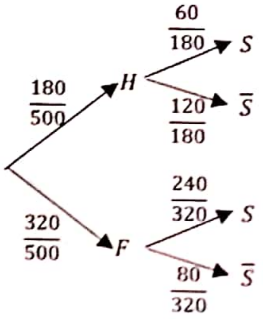
1). شكّل شجرة الاحتمالات لهذه التجربة.

2). احسب احتمال الأحداث التّالية:

- التّلميذ المختار أنثى وتملك هاتفا نقّالا.
- التّلميذ المختار لا يملك هاتفا نقّالا.

الحلّ:

1). شجرة الاحتمالات:



2). حساب الاحتمالات: انطلاقا من شجرة الاحتمالات نجد:

- التّلميذ المختار أنثى وتملك هاتفا نقّالا: $P(F \cap S)$

$$P(F \cap S) = P(F) \times P(S) = \frac{320}{500} \times \frac{240}{320} = \frac{76\,800}{160\,000} = \frac{12}{25}$$

✓ لكتابة أيّ كسر على شكل غير قابل للاختزال باستعمال الآلة الحاسبة، فما علينا سوى إجراء عملية القسمة بشكل معتاد لنحصل على نتيجة عشريّة، ثمّ نضغط على زر $\boxed{abc}$ على الآلة الحاسبة لنحصل على رقمين في الشّاشة، يمثّل الأوّل البسط والثّاني المقام، تفصل بينهما علامة على شكل زاوية قائمة.

- التّلميذ المختار لا يملك هاتفا نقّالا: $P(\overline{S})$

$$P(\overline{S}) = P(H \cap \overline{S}) + P(F \cap \overline{S})$$

$$P(\overline{S}) = \frac{180}{500} \times \frac{120}{180} + \frac{320}{500} \times \frac{80}{320}$$

$$P(\overline{S}) = \frac{12}{50} + \frac{8}{50} = \frac{2}{5}$$

مثال 2:

يتكوّن مجتمع من 55% نساء و45% رجالاً، 25% من النّساء يتحدّثن لغة أجنبيّة و35% من الرجال يتحدّثون أيضا لغة أجنبيّة.

نختار عشوائيّا شخصا من هذا المجتمع ونعتبر الأحداث التّالية:

H: رجل. F: امرأة.

A: رجل يتحدّث لغة أجنبيّة. $\overline{B}$: امرأة تتحدّث لغة أجنبيّة.

1). انقل شجرة الاحتمالات المقابلة ثمّ أكملها.

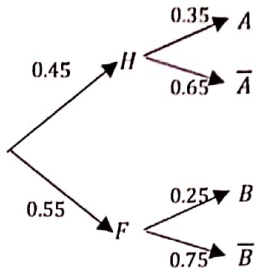
2). احسب احتمال أن يكون الشخص المختار:

- رجلا يتحدّث لغة أجنبيّة.
- امرأة لا تتحدّث لغة أجنبيّة.
- شخصا يتحدّث لغة أجنبيّة.

Scanned with CamScanner

الحلّ:

1). شجرة الاحتمالات:



2). حساب الاحتمالات: انطلاقا من شجرة الاحتمال فإنّ احتمال أن يكون المختار:

- رجلا يتحدّث لغة أجنبيّة $P(H\cap A)$:

$P(H\cap A) = P(A) = 0.45 \times 0.35 = \mathbf{0.1575}$

- امرأة لا تتحدّث لغة أجنبيّة $P(F\cap\overline{B})$:

$P(F\cap\overline{B}) = P(\overline{B}) = 0.55 \times 0.75 = \mathbf{0.4125}$

- شخصا يتحدّث لغة أجنبيّة $P(H\cap A) + P(F\cap B)$:

$P(C) = P(H\cap A) + P(F\cap B)$

$P(C) = 0.1575 + (0.55 \times 0.25) = \mathbf{0.295}$

05. الاحتمالات الشرطيّة

➢ تعريف:

لتكن A حادثة من مجموع المخارج E حيث $P(A) \neq 0$، نعرّف على E احتمالا جديدا يرمز له بالرمز P_A حيث من أجل كلّ حادثة B نكتب:

$P(A\cap B) = P_A(B) \times P(A)$
$= P_B(A) \times P(B)$

$$P_A(B) = \frac{P(A\cap B)}{P(A)}$$

✓ P_A يسمّى الاحتمال الشرطي علماً أنّ A محقّقة.

✓ $P_A(B)$ تُقرأ "احتمال B علماً أنّ A محقّقة.

مثال 1:

يتكوّن مجتمع من 55% نساء و45% رجالا، 25% من النّساء يتحدّثن لغة أجنبيّة و35% من الرجال يتحدّثون أيضا لغة أجنبيّة. نختار عشوائيّا شخصا من هذا المجتمع ونعتبر الأحداث التّالية:

H: رجل. F: امرأة.

A: رجل يتحدّث لغة أجنبيّة. B: امرأة تتحدّث لغة أجنبيّة.

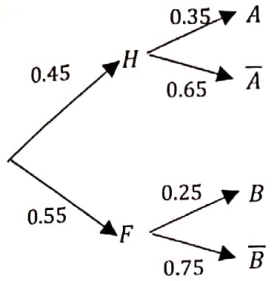
1). أنقل شجرة الاحتمالات المقابلة ثمّ أكملها.

2). احسب احتمال أن يكون الشخص المختار:

- رجلا يتحدّث لغة أجنبيّة.
- امرأة لا تتحدّث لغة أجنبيّة.
- شخصا يتحدّث لغة أجنبيّة.
- احسب احتمال أن يكون الشخص المختار امرأة، علماً أنّه يتحدّث لغة أجنبيّة.

الحلّ:

1). شجرة الاحتمالات:



2). حساب الاحتمالات:

- $P(A)$:

$P(A) = P(H\cap A) = 0.45 \times 0.35 = \mathbf{0.1575}$

- $P(\overline{B})$:

$P(\overline{B}) = P(F\cap\overline{B}) = 0.55 \times 0.75 = \mathbf{0.4125}$

- $P(C)$:

$P(C) = P(A) + P(F\cap B)$

$P(C) = 0.1575 + (0.55 \times 0.25) = \mathbf{0.295}$

- $P_C(F)$: الشخص المختار امرأة علماً أنّه يتحدّث لغة أجنبيّة:

$P_C(F) = \frac{P(F\cap C)}{P(C)} = \frac{0.55 \times 0.25}{0.295} = \frac{55}{118}$

مثال 2:

مصنع سيّارات يشتغل بوحدتين A وB وينتج نوعين: سيّارات تسير بالبنزين يُرمز لها بالرمز E وأخرى تسير بغير البنزين ويرمز لها بالرمز $\overline{E}$، ربع إنتاج هذا المصنع تصنّعه الوحدة A.

اشترى شخص سيّارة من هذا المصنع، احتمال أن تكون هذه السيّارة من صنع الوحدة A وتسير بالبنزين يساوي $\frac{1}{6}$، واحتمال أن تكون من صنع الوحدة B وتسير بالبنزين يساوي $\frac{3}{8}$.

✓ (تعطى كلّ النتائج على شكل كسر غير قابل للاختزال).

1). بيّن أنّ احتمال أن تكون السيّارة تسير بالبنزين علماً أنّها من صنع الوحدة A يساوي $\frac{2}{3}$.

2). احسب احتمال أن تكون السيّارة تسير بالبنزين علماً أنّها من صنع الوحدة B.

3). احسب:

- احتمال أن تكون السيّارة تسير بالبنزين.
- احتمال أن تكون من صنع الوحدة A علماً أنّ السيّارة تسير بالبنزين.

Scanned with CamScanner

4). أنجز شجرة الاحتمالات الّتي تُنمذج هذه الوضعيّة.

الحلّ:

لدينا: $P(A) = \frac{1}{4}$ ، $P(B) = 1 - P(A) = \frac{3}{4}$

ولدينا: $P(A \cap E) = \frac{1}{6}$ ، $P(B \cap E) = \frac{3}{8}$

1). برهان أنّ: $P_A(E) = \frac{2}{3}$:

$$P_A(E) = \frac{P(A \cap E)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{4}} = \frac{2}{3}$$

2). حساب $P_B(E)$:

$$P_B(E) = \frac{P(B \cap E)}{P(B)} = \frac{\frac{3}{8}}{\frac{3}{4}} = \frac{1}{2}$$

3). حساب:

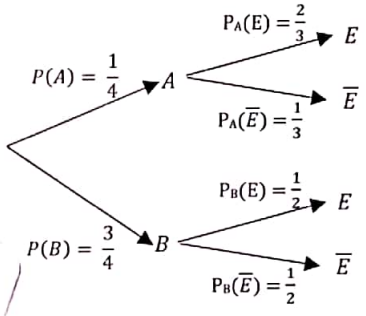
- حساب $P(E)$:

$$P(E) = P(A \cap B) + P(B \cap E) = \frac{1}{6} + \frac{3}{8} = \frac{13}{24}$$

- حساب $P_E(A)$:

$$P_E(A) = \frac{P(A \cap E)}{P(E)} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{13}{24}} = \frac{4}{13}$$

4). شجرة الاحتمالات:



06. المتغيّر العشوائي

➢ المتغيّر العشوائي:

E المجموعة الشاملة لتجربة عشوائيّة، نسمّي متغيّرا عشوائيّا كلّ دالّة عدديّة معرّفة على E.

➢ قانون الاحتمال لمتغيّر عشوائي:

قانون الاحتمال لمتغيّر عشوائي x هو الدالّة المعرّفة على I (مجموعة قيم x) والّتي ترفق بكلّ قيمة x_i من I العدد $P(x=x_i)$.

✓ حيث: $0 \leq P(x) \leq 1$

➢ الأمل الرياضيّاتي:

الأمل الرياضيّاتي للمتغيّر x هو العدد $E(x)$، حيث:

$$E(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i$$

➢ التباين:

التباين للمتغيّر x هو العدد:

$$V(x) = \sum_{i=1}^{n} [x_i - E(x)]^2 p_i$$

✓ يمكن كتابة:

$$V(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 p_i - [E(x)]^2$$

p_i هو احتمال x عندما يأخذ x القيمة x_i، أي: $p_i = P(x=x_i)$.

➢ الانحراف المعياري:

الانحراف المعياري للمتغيّر x هو العدد:

$$\sigma(x) = \sqrt{v(x)}$$

تمرين:

نرمي قطعة نقديّة غير مزيّفة 3 مرّات متتابعة.

ليكن x المتغيّر العشوائي الذي يرفق بكلّ 3 رميات متتابعة عدد الأوجه الظاهرة.

1). عيّن القيم الممكنة للمتغيّر العشوائي x .

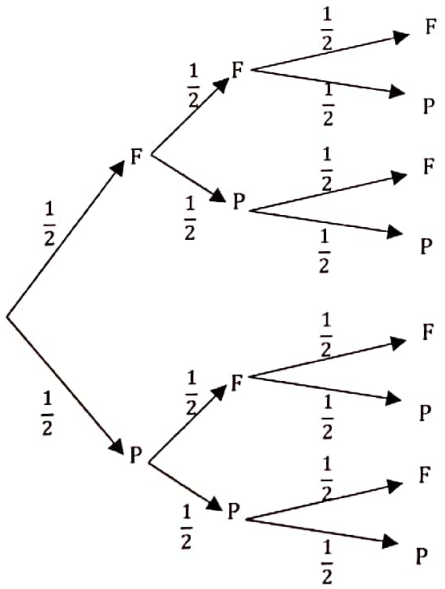
2). عيّن قانون الاحتمال للمتغيّر العشوائي x .

3). احسب الأمل الرياضيّاتي $E(x)$.

4). احسب التباين $V(x)$ والانحراف المعياري للمتغيّر x .

الحلّ:

بغرض التوضيح نقوم برسم شجرة الاحتمالات:



Scanned with CamScanner

1). تعيين القيم الممكنة للمتغيّر x :

نحسب من خلال شجرة الاحتمال عدد الأوجه الظاهرة في كلّ طريق (التفريعات المتتابعة الّتي تعبّر عن الرميات الثلاث المتتابعة)، لنجد أنّ عدد ظهور الأوجه في كلّ طريق لا يمكن إلّا أن يأخذ واحدا من القيم الأربع التّالية: $x \in \{0,1,2,3\}$

حيث أنّ:

- القيمة 0: تعني عدم ظهور أيّ وجه في أيّ من الرميات الثلاث المتتابعة.
- القيمة 1: تعني ظهور الوجه مرّة واحدة أثناء الرميات الثلاث المتتابعة وهكذا دواليك.

2). تعيين $P(x_i)$: يمكن تلخيص قانون الاحتمال انطلاقا من شجرة الاحتمال بالجدول التّالي:

x_i	$P(x_i)$
0	$P(x=0) = \frac{1}{8}$
1	$P(x=1) = \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{3}{8}$
2	$P(x=2) = \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{3}{8}$
3	$P(x=3) = \frac{1}{8}$

3). حساب $E(x)$:

x_i	$P(x_i)$	$x_i\, p_i$
0	$P(x=0) = \frac{1}{8}$	0
1	$P(x=1) = \frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$
2	$P(x=2) = \frac{3}{8}$	$\frac{6}{8}$
3	$P(x=3) = \frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$

$$E(x) = \sum_{i=1}^{4} x_i\, p_i \Leftrightarrow E(x) = \frac{0+3+6+3}{8} = \frac{3}{2}$$

4). حساب التباين والانحراف:

- حساب $V(X)$: $V(x) = \sum_{i=1}^{4} (x_i - E(x))^2\, p_i$

$\mathbb{X} = [x_i - E(x)]^2$

$\mathbb{P} = [x_i - E(x)]^2 p_i$

x_i	$\mathbb{X}$	p_i	$\mathbb{P}$
0	$(0-\frac{3}{2})^2 = (-\frac{3}{2})^2 = \frac{9}{4}$	$P(x=0) = \frac{1}{8}$	$\frac{9}{32}$
1	$(1-\frac{3}{2})^2 = (-\frac{1}{2})^2 = \frac{1}{4}$	$P(x=1) = \frac{3}{8}$	$\frac{3}{32}$
2	$(2-\frac{3}{2})^2 = (\frac{1}{2})^2 = \frac{1}{4}$	$P(x=2) = \frac{3}{8}$	$\frac{3}{32}$
3	$(3-\frac{3}{2})^2 = (\frac{3}{2})^2 = \frac{9}{4}$	$P(x=3) = \frac{1}{8}$	$\frac{9}{32}$

$$V(x) = \frac{9+3+3+9}{32} = \frac{24}{32} = \frac{3}{4}$$

- حساب $\delta(x)$: $\sigma(x) = \sqrt{v(x)} = \sqrt{\frac{3}{4}} \approx 0.75$

07. طرق العدّ

لتكن E مجموعة منتهية عدد عناصرها n (n عدد طبيعي غير معدوم)، وليكن k عدد طبيعي.

1. معامل الترتيب:

نقوم بسحب k عنصرا على التوالي من المجموعة E لنحصل على التبديلات: $(C_1, C_1, \ldots, C_2, \ldots, C_n)$، نرمز لتكرار كلّ عنصر C_n بالرّمز X_n، نسمّي عدد التبديلات الممكنة بمعامل الترتيب α، حيث:

عدد التكرارات الإجمالي للمجموعة

$$\alpha = \frac{k!}{X_1! \times X_2! \times \ldots \times X_n!}$$

عدد كل نوع

مثال:

يحتوي كيس على 5 كرات زرقاء و6 كرات حمراء، نسحب على التوالي بإرجاع كرتين، ما هو عدد التبديلات الممكنة عند سحب كرتين من لونين مختلفين؟

عند سحب كرتين من لونين مختلفين فإنّنا نحصل على الثنائية (B, R)، وبمراعاة الترتيب فإننّا نحصل على تبديلات عددها مساو لمعامل الترتيب α.

لدينا $k = 2$ لأننا نقوم بسحب كرتين على التوالي، وX_n عدد المرّات التي تكرّر فيها كلّ مكوّن من الثنائيّة (B, R)، أي أنّ: $X_B = 1$ لأنّ B تكرّر مرّة واحدة في الثنائية (B, R)، وكذلك $X_R = 1$، ومنه:

$$\alpha = \frac{k!}{X_1! \times X_2! \times \ldots \times X_n!} = \frac{2!}{1! \times 1!} = 2$$

$\alpha = 2$ وهذا يعني أنّه يمكننا الحصول على تبديلتين إثنتين هما: (B, R), (R, B).

✓ نستعمل معامل الترتيب في حالات السحب على التوالي.

Scanned with CamScanner

2. القائمة:

➢ تعريف:

نسمّي قائمة في المجموعة E ذات k عنصرا (من عناصر المجموعة E) حيث $k \geq 1$، كلّ متتالية مرتّبة من k عنصرا من عناصر المجموعة E.

عدد القوائم الممكنة في E ذات k عنصرا من عناصر المجموعة E هو n^k.

✓ يمكن ملاحظة عدم اشتراط أنّ يكون k (عدد عناصر القائمة) أصغر من n (عدد عناصر المجموعة الشاملة)، وهذا إن دلّ على شيء فإنّما يدلّ على جواز التكرار في القائمة.

مثال:

لتكن المجموعة $E = \{a,b,c,d\}$، عدد القوائم ذات عنصرين الممكنة في E هو 4^2 أي 16، حيث أنّ 4 يمثّل n عدد عناصر المجموعة الشاملة E، و2 تمثّل k عدد عناصر القائمة في E لأنّه تمّ تحديد القوائم على أنّها ذات عنصرين.

من هذه القوائم الستّة عشر مثلا لدينا: (a,b), (a,a), (b,a), (c,d)...

تمرين 1:

الرقم السرّي لبطاقة بنكيّة عبارة عن عدد مكوّن من أربع أرقام مأخوذة من المجموعة:

$E = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$.

1). كم رقما سريّا يمكن تشكيله؟

الرقم السرّي للبطاقة مختار بطريقة عشوائيّة عن طريق الكمبيوتر.

2). احسب احتمال كلّ الأحداث التّالية:

2-أ). "الرقم السرّي عبارة عن عدد زوجي".

2-ب). "الرقم السرّي مكوّن من الأرقام الزوجيّة فقط".

الحلّ:

1). عدد الأرقام السرّيّة الممكن تشكيلها هو: $9^4 = \mathbf{6561}$

2). حساب احتمال الأحداث: $P(x) = \frac{\text{عدد الحالات الملائمة}}{\text{عدد الحالات الممكنة}}$

2-أ). A: "الرقم السرّي عبارة عن عدد زوجي": ليكون الرقم السرّي زوجيّا فلا بدّ أن تقتصر خانة آحاده على 4 أرقام فقط من بين الأرقام التسعة المتاحة، وهي: {2,4,6,8}، أي: 4^1، بينما يمكن لباقي الخانات أن تحمل أيّ رقم من 1-9، أي 9^3، وعليه فإنّ:

$$P(A) = \frac{9^3 \times 4^1}{9^4} = \frac{2916}{6561} = \frac{4}{9} \approx 0.444$$

2-ب). B: "الرقم السرّي مكوّن من الأرقام الزوجيّة فقط": ليكون الرقم السرّي مكوّناً فقط من الأرقام الزوجيّة فلا بدّ من إعادة تعيين المجموعة الشاملة ليصبح عدد عناصرها 4 فقط بدلا من تسعة، ويبقى عدد عناصر القائمة 4، وبذلك يصبح عدد القوائم الممكنة هو $4^4 = 256$.

$$P(B) = \frac{256}{6561} \approx 0.039$$

تمرين 2:

كيس يحتوي على 12 كرة، 3 حمراء (R)، 4 خضراء (V) و5 سوداء (N)، نسحب عشوائيّا 3 كريّات **على التوالي بإرجاع**.

1). احسب عدد الحالات لهذا السحب.

2). احسب احتمال كلّ من الأحداث التّالية:

2-أ). A: "الحصول على 3 كرات من نفس اللون".

2-ب). B: "الحصول على 3 كرات مختلفة الألوان".

2-ج). C: "الحصول على كرتين من نفس اللون".

الحلّ:

1). حساب عدد الحالات الممكنة:

بما أنّ السحب على التوالي وليس دفعة واحدة، وبما أنّ السحب بإرجاع، فإنّ عدد الحالات الممكنة هو عدد القوائم الممكنة n^k ذات 3 عناصر من مجموعة شاملة E عدد عناصرها 12، أي أنّ العدد الكلّي للكرات $n = 12$، وعدد الكرات المسحوبة في كلّ مرّة $k = 3$، وعليه فعدد الحالات الممكنة مساوٍ إلى 12^3، إذن عدد الحالات الممكنة هو: **1728**.

2). حساب احتمال الأحداث: $P(x) = \frac{\text{عدد الحالات الملائمة}}{\text{عدد الحالات الممكنة}}$

2-أ). A: "3 كرات من نفس اللون":

بالنسبة للكرات الحمراء R فنعتبر n=3 لوجود ثلاث كرات حمراء فقط، ونعتبر k = 3 لأنّ الكرات المسحوبة هي 3 كرات، وبذلك يصبح عدد الحالات الممكنة كي نحصل على "3 كرات حمراء" هو 3^3، نقوم بنفس الشيء بالنسبة لباقي الألوان، لنجد أنّ عدد الحالات الممكنة كي نحصل على "3 كرات خضراء" هو 4^3، و"3 كرات سوداء" هو 5^3. وبالتالي يمكن حساب احتمال حصولنا على 3 كرات من نفس اللون كالآتي:

$$P(A) = \frac{3^3 + 4^3 + 5^3}{12^3} = \frac{216}{1728} = \frac{1}{8}$$

Scanned with CamScanner

2-ب). B: "3 كرات مختلفة الألوان":

بما أنّ السحب على التوالي، فالترتيب مأخوذ بعين الاعتبار، وعليه يمكن الحصول على التبديلات التّالية: (R,V,N), (R,N,V), (V,R,N), (V,N,R), (N,R,V), (N,V,R)، وعليه يتبيّن أنّه يمكن الحصول على 6 تبديلات.

✓ يمكن حساب معامل الترتيب مباشرة دون التحقق من كلّ التبديلات الممكنة:

$$\alpha = \frac{k!}{X_R!\times X_V!\times X_N!} = \frac{3!}{1!\times 1!\times 1!} = 6$$

ولحساب احتمال حصولنا على "3 كرات مختلفة اللون":

$$P(B) = 6 \times \frac{(3\times4\times5)}{12^3} = \frac{360}{1728} = \frac{5}{24}$$

2-ج). C: "كرتين من نفس اللون":

يمكن حساب احتمال حصول C بطريقتين مختلفتين:

- الطريقة الأولى: الحالة C تمثّل الحالة المتبقّية ممكنة الحصول بعد حالتي أن تكون الكرات الثلاث كلّها من نفس اللون أو كلّها من ألوان مختلفة، وعليه يصبح لدينا:

$$P(A) + P(B) + P(C) = 1$$
$$P(C) = 1 - [P(A) + P(B)]$$
$$P(C) = 1 - P(A) - P(B)$$
$$P(C) = 1 - \frac{1}{8} - \frac{5}{24} = \frac{16}{24} = \frac{2}{3}$$

- الطريقة الثانية: بما أنّ السحب على التوالي، فالترتيب مأخوذ بعين الاعتبار، وعليه فإنّه يمكن الحصول بالنسبة للون الأحمر على التبديلات الآتية: (R,R,Z), (R,Z,R), (Z,R,R)، حيث Z يمثّل لونا آخر (إمّا أخضرا أو أسودا)، وبالتالي عدد الحالات الملائمة للحصول على "كرتين حمراوين فقط" هو: $3\times(3^2 \times 9^1)$، وكذلك نفعل باللونين المتبقيين.

✓ يمكننا حساب عدد التبديلات مباشرة دون ذكرها بالتفصيل:

$$\alpha = \frac{k!}{X_R!\times X_Z!} = \frac{3!}{2!\times 1!} = 3$$

$$P(C) = 3 \times \frac{(3^2\times9^1)+(4^2\times8^1)+(5^2\times7^1)}{12^3} = \frac{1152}{1728} = \frac{2}{3}$$

3. الترتيبة:

- نسمّي ترتيبة في E ذات k عنصرا (من عناصر المجموعة E) حيث $1 \le k \le n$، كلّ متتالية مرتّبة من k عنصرا (من عناصر المجموعة E) متمايزة مثنى مثنى.
- عدد الترتيبات الممكنة في E ذات k عنصرا (من عناصر المجموعة E) مساوٍ للعدد A_n^k المعرّف بالعلاقة التّالية:

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$$

✓ حيث: $n! = n(n-1)(n-2)\ldots\times2\times1$

✓ كذلك: $A_1^1 = 1$ $\quad A_1^0 = 1$

✓ يمكن ملاحظة اشتراط أن يكون k عدد عناصر الترتيبة أقلّ من n عدد عناصر المجموعة الشاملة E، وهو ما يفهم منه عدم جواز التكرار في الترتيبة، وهو ما يفهم أيضا من عبارة "متمايزة مثنى مثنى" في التعريف.

✓ تستعمل الترتيبة في الوضعيّات الّتي يؤخذ بها ترتيب العناصر بعين الاعتبار كتشكيل الأعداد، وتكوين اللجان مع تحديد المهام...

مثال 1:

لتكن المجموعة $E = \{a,b,c,d\}$، ما هو عدد الترتيبات الممكنة ذات عنصرين في E؟

$$A_4^2 = \frac{4!}{(4-2)!} = \frac{24}{2} = 12$$

مثال 2:

لدينا المجموعة E مكوّنة من الأرقام التّالية: $\{1,2,3,4,5,6\}$، كم من عدد يمكن تشكيله مكوّن من 3 أرقام مختلفة؟

نلاحظ أنّ الترتيب مأخوذ بعين الاعتبار في تشكيل الأعداد، كما أنّ التكرار غير ممكن لأنّه اشترط أن تكون الأرقام المشكّلة للعدد مختلفة، وعليه فالأعداد الّتي يمكن تشكيلها هي بعدد الترتيبات الّتي يمكن تشكيلها A_n^k، ومنه فإنّ: $n = 6$، $k = 3$، لنحصل على:

$$A_6^3 = 120$$

مثال 3:

وحدة إنتاجيّة مكوّنة من 35 شخصا، نريد تشكيل لجنة مكوّنة من رئيس، نائب رئيس وأمين عام، ما هو عدد اللجان المختلفة الّتي يمكن تشكيلها؟

بما أنّه تمّ تحديد المهام، فإنّ الترتيب مأخوذ بعين الاعتبار، وبما أنّ الأمر متعلّق بأشخاص بعينهم فالتكرار مستحيل، وعليه فلإيجاد عدد اللجان المختلفة في هذه الحالة نحتاج إيجاد عدد الترتيبات الممكنة حيث: $n = 35$ و $k = 3$، ومنه: $A_{35}^3 = 39270$

Scanned with CamScanner

تمرين:

كيس يحتوي على 12 كرة، 3 حمراء (R)، 4 خضراء (V) و5 سوداء (N)، نسحب عشوائيًا 3 كرات **على التوالي بدون إرجاع.**

1). احسب عدد الحالات لهذا السحب.

2). احسب احتمال كلّ من الأحداث التّالية:

2-أ). A: "الحصول على 3 كرات من نفس اللون".

2-ب). B: "الحصول على 3 كرات مختلفة الألوان".

2-ج). C: "الحصول على كرتين من نفس اللون".

الحلّ:

1). حساب عدد الحالات الممكنة:

بما أنّ السحب على التوالي وليس دفعة واحدة وبما أنّ السحب بدون إرجاع فإنّ عدد الحالات الممكنة هو عدد الترتيبات الممكنة A_n^k ذات 3 عناصر من مجموعة شاملة E عدد عناصرها 12، وعليه فعدد الحالات الممكنة هو: $A_{12}^3 = \mathbf{1320}$

2). حساب احتمال الأحداث: $P(x) = \frac{\text{عدد الحالات الملائمة}}{\text{عدد الحالات الممكنة}}$

2-أ). A: "3 كرات من نفس اللون":

بالنسبة للكرات الحمراء R فنعتبر n=3 لوجود ثلاث كرات حمراء فقط، ونعتبر k = 3 لأنّ الكرات المسحوبة هي 3 كرات، وبذلك يصبح عدد الحالات الملائمة للحصول على "3 كرات حمراء" هو A_3^3، نقوم بنفس الشيء بالنسبة لباقي الألوان، وبالتالي يمكن حساب احتمال حصولنا على 3 كرات من نفس اللون كالآتي:

$$P(A) = \frac{A_3^3+A_4^3+A_5^3}{A_{12}^3} = \frac{90}{1320} = \frac{3}{44}$$

2-ب). B: "3 كرات مختلفة الألوان":

نأخذ بعين الاعتبار ترتيب سحب الكرات لأنّ السحب على التوالي، وعليه يمكن الحصول على التبديلات التّالية:

(R, V, N), (R, N, V)

(N, R, V), (N, V, R)

(V, N, R), (V, R, N)

✓ يمكننا حساب عدد التبديلات بحساب معامل الترتيب α.

وعليه فاحتمال حصولنا على "3 كرات مختلفة اللون":

$$P(B) = 6 \times \frac{(A_3^1 \times A_4^1 \times A_5^1)}{A_{12}^3} = \frac{360}{1320} = \frac{3}{11}$$

2-ج). C: "كرتين من نفس اللون": يمكن حساب احتمال حصول C بطريقتين مختلفتين:

▪ الطريقة الأولى:

الحالة C تمثّل الحالة المتبقّية ممكنة الحصول بعد حالتي أن تكون الكرات الثلاث كلّها من نفس اللون أو كلّها من ألوان مختلفة، وعليه يصبح لدينا:

$$P(A) + P(B) + P(C) = 1$$
$$P(C) = 1 - P(A) - P(B)$$
$$P(C) = 1 - \frac{3}{44} - \frac{3}{11} = \frac{44-3-12}{44} = \frac{29}{44}$$

▪ الطريقة الثانية:

بما أنّ السحب على التوالي، فالترتيب مأخوذ بعين الاعتبار، وعليه يمكن الحصول بالنسبة للكرات الحمراء على التبديلات الآتية: (R,R,X), (R,X,R), (X,R,R) حيث X يمثّل لونا آخر (إمّا أخضر أو أسود)، وبالتالي عدد الحالات الملائمة للحصول على "كرتين حمراوين فقط" هو:

$3\times(A_3^2 \times A_9^1)$، بينما عدد الحالات الملائمة للحصول على "كرتين خضراوين فقط" هو: $3\times(A_4^2 \times A_8^1)$، ذلك أنّنا نسحب كرتين خضراوين A_3^2 مع واحدة من الكرات المتبقّية (عدا الكرات الخضراء) A_8^1، كذلك نفعل مع اللون الأسود ليكون عدد الحالات الملائمة: $3\times(A_5^2 \times A_7^1)$، فنحصل على:

$$P(C) = \frac{3\times(A_3^2\times A_9^1)+3\times(A_4^2\times A_8^1)+3\times(A_5^2\times A_7^1)}{A_{12}^3}$$
$$P(C) = \frac{870}{1320} = \frac{29}{44}$$

4. التبديلة:

▪ نسمّي تبديلة لعناصر المجموعة E كلّ ترتيبة n عنصرا من المجموعة E.

▪ عدد التبديلات الممكنة لمجموعة ذات n عنصرا هو العدد الطبيعي:

$$A_n^n = \frac{n!}{(n-n)!} = \frac{n!}{0!} = n!$$

وعليه يكون عدد التبديلات الممكنة لمجموعة ذات n عنصرا هو العدد الطبيعي n! والمعرّف بالعلاقة التّالية:

$$n! = n(n-1)(n-2)\ldots\times2\times1$$

✓ 0! = 1! =1

مثال:

ما هو عدد الوضعيّات الّتي يمكن أن يجلس بها 8 أشخاص حول طاولة مستديرة (من بجانب من)؟

عدد الوضعيّات الممكنة يساوي عدد التبديلات الممكنة لمجموعة مكوّنة من 8 عناصر، وعليه فإنّ عدد الوضعيّات أو التبديلات الممكنة هو: **8! = 40320**

Scanned with CamScanner

5. التوفيقة

- نسمّي توفيقة في E ذات k عنصرا (من عناصر المجموعة E) حيث $0 \le k \le n$، كلّ جزء من E يشمل k عنصرا.
- عدد التّوفيقات الممكنة في E ذات k عنصرا (من عناصر المجموعة E) هو العدد الطبيعي C_n^k أو $\binom{k}{n}$ المعرّف بالعلاقة التّالية:

$$C_n^k = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

✓ يمكن ملاحظة أنّ التوفيقة هي مجموعة جزئيّة من المجموعة الشاملة حيث تشتمل على k عنصرا.

✓ نلاحظ أنّ عدد عناصر التوفيقة دائما أصغر من أو يساوي عدد عناصر المجموعة الشاملة، وذلك لتعذّر أن تكون التوفيقة مجموعة جزئيّة بالنسبة للمجموعة الشاملة وفي نفس الوقت عدد عناصرها أكبر من عدد عناصر المجموعة الشاملة.

✓ عدد التوفيقات الممكنة في E ذات n عنصرا من عناصر E هو 1، وهذه التوفيقة هي نفسها المجموعة E حيث يمكن التعبير عن ذلك بالعدد:

$$C_n^n = \frac{n!}{n!(n-n)!} = \frac{n!}{n!} = 1$$

✓ لدينا أيضا:

$$C_n^{n-1} = n \qquad C_n^1 = n \qquad C_n^0 = 1$$

مثال 1:

قسم مكوّن من 30 تلميذا، يراد تشكيل لجنة لتمثيل هذا القسم مكوّنة من 3 أعضاء في آن واحد (المهام غير محدّدة)، احسب عدد اللجان الممكن تشكيلها؟

عدد اللجان الممكن تشكيلها مساو لعدد التوفيقات الممكنة وهو ما يساوي:

$$C_{30}^3 = \frac{30!}{3!(30-3)!} = 4060$$

تمرين 1:

نشكّل مجلسا استشاريا مكوّنا من 4 أعضاء مختارين من بين 7 رجال و5 نساء.

1). ما هو عدد المجالس الّتي يمكن تشكيلها؟

2). ما هو عدد المجالس المكوّنة من:

- A: الرجال فقط.
- B: امرأة فقط.
- C: امرأة على الأقل.
- D: أربعة أعضاء من نفس الجنس.

الحلّ:

1). حساب عدد المجالس:

المجلس الاستشاري يشكّل مجموعة جزئيّة من المجموعة الكليّة، وعليه فإنّ عدد المجالس بعدد التوفيقات C_n^k ذات 4 عناصر من المجموعة الشاملة ذات 12 عنصرا، أي أنّ:

$n = 12$، $k = 4$، وعليه فعدد المجالس هو: $C_{12}^4 = 495$

2). حساب عدد المجالس المكوّنة من:

- الرجال فقط P(A): حيث تصبح المجموعة الكليّة هي عدد الرجال: $n = 7$، $k = 4$ بعدد أعضاء المجلس، ومنه:

$P(A) = C_7^4 = 35$

- امرأة فقط P(B):

$P(B) = C_5^1 \times C_7^3 = 175$

- امرأة على الأقل P(C):

$P(C) = C_5^1 \times C_7^3 + C_5^2 \times C_7^2 + C_5^3 \times C_7^1 + C_5^4 \times C_7^0 = 460$

- أربعة أعضاء من نفس الجنس P(D):

$P(D) = C_7^4 + C_5^4 = 40$

تمرين 2:

كيس يحتوي على 12 كرة: 3 حمراء (R)، 4 خضراء (V) و5 سوداء (N)، نسحب عشوائيّا 3 كريّات **في آن واحد**.

1). احسب عدد الحالات لهذا السحب.

2). احسب احتمال كلّ من الأحداث التّالية:

2-أ). A: "الحصول على 3 كرات من نفس اللون".

2-ب). B: "الحصول على 3 كرات مختلفة الألوان".

2-ج). C: "الحصول على كرتين من نفس اللون".

2-د). D: "الحصول على الأقل على كرتين حمراوين".

2-هـ). E: "الحصول على الأكثر على كرة خضراء".

الحلّ:

1). حساب عدد الحالات الممكنة: بما أنّ السحب دفعة واحدة فإنّ عدد الحالات الممكنة هو عدد التوفيقات الممكنة C_n^k، حيث أنّ العدد الكلّي للكرات $n = 12$، وعدد الكرات المسحوبة في كلّ مرّة $k = 3$، وعليه فعدد الحالات الممكنة هو:

$C_{12}^3 = 220$

2). حساب احتمال الأحداث:

$$P(x) = \frac{\text{عدد الحالات الملائمة}}{\text{عدد الحالات الممكنة}}$$

2-أ). A: "3 كرات من نفس اللون":

بالنسبة للكرات الحمراء R نعتبر $n=3$ لوجود ثلاث كرات حمراء فقط، ونعتبر $k = 3$ لأنّ الكرات المسحوبة هي 3 كرات، وبذلك يصبح عدد الحالات الممكنة كي نحصل على "3 كرات حمراء"

Scanned with CamScanner

هو C_3^3، نقوم بنفس الشيء بالنسبة لباقي الألوان، وبالتالي يمكن حساب احتمال حصولنا على 3 كرات من نفس اللون كالآتي:

$$P(A) = \frac{C_3^3+C_4^3+C_5^3}{C_{12}^3} = \frac{15}{220} = \frac{3}{44}$$

2-ب). B: "3 كرات مختلفة الألوان:

بما أنّ السحب دفعة واحدة فلا اعتبار للترتيب بل يكفي لتحقّق الحادثة B أن يتمّ سحب كرة حمراء C_3^1، وكرة خضراء C_4^1، وأخرى سوداء C_5^1، وعليه:

$$P(B) = \frac{C_3^1\times C_4^1\times C_5^1}{C_{12}^3} = \frac{60}{220} = \frac{3}{11}$$

2-ج). C: "كرتين من نفس اللون": يمكن حساب احتمال حصول C بطريقتين مختلفتين:

▪ **الطريقة الأولى:**

الحالة C تمثّل الحالة المتبقّية ممكنة الحصول بعد حالتي أن تكون الكرات الثلاث كلّها من نفس اللون أو كلّها من ألوان مختلفة، وعليه يصبح لدينا:

$$P(A) + P(B) + P(C) = 1$$
$$P(C) = 1 - P(A) - P(B)$$
$$P(C) = 1 - \frac{3}{44} - \frac{3}{11} = \frac{44-3-12}{44} = \frac{29}{44}$$

▪ **الطريقة الثانية:**

عدد الحالات الملائمة للحصول على "كرتين حمراوين فقط" هو $C_9^1 \times C_3^2$ ، وكذلك نفعل باللونين المتبقّيين لنحصل على:

$$P(C) = \frac{(C_3^2\times C_9^1)+(C_4^2\times C_8^1)+(C_5^2\times C_7^1)}{C_{12}^3} = \frac{145}{220} = \frac{29}{44}$$

2-د). D: "الحصول على الأقل على كرتين حمراوين":

هنا لدينا حالتين: إمّا كرتين حمراوين فقط وإمّا ثلاث كرات حمراء، وعليه فإنّ:

$$P(D) = \frac{(C_3^2\times C_9^1)+(C_3^3\times C_9^0)}{C_{12}^3} = \frac{28}{220} = \frac{7}{55}$$

2-هـ). E: "الحصول على الأكثر على كرة خضراء":

هنا لدينا حالتين: إمّا كرة خضراء واحدة فقط وإمّا لا كرة خضراء، وعليه فإنّ:

$$P(E) = \frac{(C_4^1\times C_8^2)+(C_4^0\times C_8^3)}{C_{12}^3} = \frac{168}{220} = \frac{42}{55}$$

تمرين 3:

يحتوي كيس على 10 كرات، 6 منها بيضاء تحمل الأرقام: 7,6,5,4,3,2 وأربع كرات حمراء تحمل الأرقام: 8,7,6,5، نسحب كرتين من الكيس في آن واحد.

احسب احتمال:

1). A: "سحب كرتين من لونين مختلفين".

2). B: "سحب كرتين تحملان عددين زوجيين".

3). C: "سحب كرتين بيضاوين علماً أنّهما تحملان عددين زوجيين".

الحلّ:

بما أنّ السحب يتمّ في آن واحد فإنّ عدد الحالات الممكنة مساو لعدد التوفيقات C_n^k ذات عنصرين من مجموعة شاملة من 10 عناصر، أي أنّ: n = 10 بعدد الكرات الإجمالي، k = 2 بعدد الكرات المسحوبة في كلّ مرّة، وعليه فعدد الحالات الممكنة هو:

$$C_{10}^2 = 45$$

1). حساب P(A): $P(A) = \frac{C_6^1\times C_4^1}{C_{10}^2} = \frac{24}{45} = \frac{8}{15}$

2). حساب P(B): $P(B) = \frac{C_5^2}{C_{10}^2} = \frac{10}{45} = \frac{2}{9}$

3). حساب P(C):

▪ نضع D: "سحب كرتين بيضاوين"، وعليه:

$$P(C) = P_B(D) = \frac{P(B\cap D)}{P(B)}$$

▪ حساب $P(B\cap D)$:

معناه حساب احتمال سحب كرتين بيضاوين وتحملان عددا زوجيّا، بالرجوع إلى الكرات البيضاء فإنّ 3 منها فقط يحمل عددا زوجيّا، وعليه يصبح n = 3، k = 2، وعليه فعدد الحالات لسحب كرتين بيضاوين تحملان عددا زوجيّا هو $C_3^2 = 3$

$$P(B\cap D) = \frac{3}{45} = \frac{1}{15}$$

لنتمكّن بعدها من حساب P(C)

▪ حساب P(C):

$$P(C) = P_B(D) = \frac{P(B\cap D)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{15}}{\frac{2}{9}} = \frac{9}{30} = \frac{3}{10}$$

Scanned with CamScanner

08. دستور ثنائي الحدّ

➢ مبرهنة:

من أجل كلّ عددين حقيقيّين غير معدومين a و b، ومن أجل كلّ عدد طبيعي غير معدوم n، لدينا:

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \, a^{n-k} \, b^k$$

مثال 1: باستعمال دستور ثنائي الحدّ انشر المتطابقة الشهيرة $(a + b)^2$؟

$$(a+b)^2 = \sum_{k=0}^{2} C_2^k \, a^{2-k} \, b^k =$$
$$(C_2^0 \, a^{2-0} \, b^0) + (C_2^1 \, a^{2-1} \, b^1) + (C_2^2 \, a^{2-2} \, b^2)$$
$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

مثال 2: $(a - 2)^4$؟

$$(a-2)^4 = \sum_{k=0}^{4} C_4^k \, a^{4-k} \, (-2)^k \Leftrightarrow$$
$$(a - 2)^4 =$$
$$(C_4^0 \, a^{4-0} \, (-2)^0) + (C_4^1 \, a^{4-1} \, (-2)^1) +$$
$$(C_4^2 \, a^{4-2} \, (-2)^2) + (C_4^3 \, a^{4-3} \, (-2)^3) +$$
$$(C_4^4 \, a^{4-4} \, (-2)^4) \Leftrightarrow$$
$$(a - 2)^4 = \boldsymbol{a^4 - 8a^3 + 24\,a^2 - 32a + 16}$$

Scanned with CamScanner

ملخّص:

طريقة العدّ ⇐ المطلوب ⇓	قائمة	ترتيبة	توفيقة
تشكيل أعداد	يمكن تكرار الأرقام	الأرقام لا تكرر	-
تشكيل لجان	-	المهام محددة	المهام غير محددة
سحب من كيس	على التوالي بإرجاع	على التوالي دون إرجاع	في آن واحد
مجموعات	- معامل	- الترتيب	أجزاء المجموعة

Scanned with CamScanner

مادة الريـــــاضيات بكالوريا 2020

الاحتمالات

خاص بالشعب العلمية

باقة معلوماتية مركزة

الاحتمالات تحت المجهر

من إعداد الأستاذ : علالو محمد

... في قاموس النّاجحين :

هاءُ الهَزِيمةِ تُنطقُ عَيناً

https://www.facebook.com/okba.bac.2010

ملخص الدرس و تطبيقات

I) الاحتمالات المتساوية على مجموعة منتهيه :

1. التجربة العشوائية :

نقول عن تجربة أنها عشوائية إذا كانت تؤدي إلى نتائج ممكنة (مخارج) ،لا يمكن الحسم أي منها سيتحقق وذلك عند تكرار التجربة ضمن نفس الشروط

2. مجموعة الإمكانيات :

تسمى مجموعة المخارج أو النتائج الممكنة، مجموعة الإمكانيات(مجموعة المخارج) ، ونرمز اليها بالرمز Ω.

أمثلة:

- تجربة إلقاء قطعة نقدية مرة واحدة، تجربة عشوائية مجموعة إمكانياتها هي: $\Omega=\{P;F\}$
- تجربة رمي حجر نرد مرة واحدة، هي تجربة عشوائية، مجموعة إمكانياتها هي: $\Omega=\{1;2;3;4;5;6\}$
- تجربة إلقاء قطعتين نقديتين متماثلتين مرتين متتاليتين هي تجربة عشوائية، مجموعة إمكانياتها هي:
$$\Omega=\{(P;P);(P;F);(F;P);(F;F)\}$$
- تجربة إلقاء قطعتين نقديتين متماثلتين في آن واحد هي تجربة عشوائية، مجموعة إمكانياتها هي:
$$\Omega=\{\{P;P\};\{P;F\};\{F;F\}\}$$

3. الحادثة :

تسمى كل مجموعة جزئية A من مجموعة الإمكانيات Ω ، حادثة A من Ω

مثال :

في تجربة إلقاء حجر نرد مرة واحدة،لدينا :

- $A=\{1\}$ حادثة الحصول على الرقم واحد ، وهي حادثة أولية
- $A=\{2;4;6\}$ حادثة الحصول على رقم زوجي ، و هي حادثة مركبة

4. خواص الحوادث:

نعتبر A و B حادثتين من مجموعة الإمكانيات Ω

أ. الحادثة $A\cap B$: هي الحادثة A و B

ب. الحادثة $A\cup B$: هي الحادثة A أو B

ج. الحداثة المعاكسة:الحادثة المعاكسة للحادثة A و التي نرمز إليها بالرمز $\overline{A}$ هي المجموعة الجزئية من Ω والتي لا تضم عناصر A .

د.الحادثة الأكيدة : مجموعة الإمكانيات Ω هي الحادثة الأكيدة

و. الحادثة المستحيلة : المجموعة الخالية ϕ هي الحادثة المستحيلة

هـ . نقول عن حادثتين A و B أنهما غير متلائمتين إذا و فقط إذا كان $A\cap B=\phi$

و. نقول عن حادثتين A و B متعاكستين إذا وفقط إذا كان $A\cap B=\phi$ و $A\cup B=\Omega$

مثال : في تجربة رمي حجر نرد مرة واحدة .

أ. الحادثة A " ظهور رقم زوجي" هي : $A=\{2;4;6\}$

ب. االحادثة B " ظهور رقم فردي" هي : $B=\{1;3;5\}$

ج. المجموعة C " ظهور عدد أكبر تماما من 6"هي حادثة مستحيلة ،أي أن : $C=\phi$

د. الحادثة $A\cap B$ " ظهور رقم فردي و رقم زوجي في آن واحد" هي حادثة مستحيلة و بالتالي A و B غير متلائمتين

هـ . الحادثة $A\cup B$ " ظهور رقم فردي أو رقم زوجي "هي الحادثة الأكيدة Ω ، أي أن : $A\cup B=\Omega$

من د. وهـ. ينتج أن حادثتين A و B متعاكستين

5. قانون الاحتمال:

نعتبر $\Omega=\{w_1;w_2;...;w_3\}$ مجموعة إمكانيات تجربة عشوائية (مجموعة المخارج)

قانون احتمال تجربة عشوائية هو إرفاق كل إمكانية(مخرج) w_i من Ω بعدد حقيقي p_i مع $i\in\{1;2;3;...;n\}$

حيث : $p_1+p_2+p_3+...+p_n=1$ أي أن : $\sum_{i=1}^{i=n} p_i=1$

نرمز إلى قانون احتمال تجربة عشوائية بالرمز P ونقول أن P احتمال معرف على المجموعة Ω

6. نمذجة تجربة عشوائية :

نمذجة تجربة عشوائية يعني إرفاقها بمجموعة إمكانيات Ω وقانون احتمال P معرف على Ω

ويتم عادة تلخيص النمذجة ضمن جدول

أمثلة:

1- في تجربة إلقاء قطعة نقدية متزنة مرة واحدة :

w_i	P (الظهر)	F (الوجه)
p_i	0,5	0,5

2- في تجربة رمي حجر نرد متزن مرة واحدة :

w_i	1	2	3	4	5	6
p_i	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

3- في تجربة إلقاء قطعتين نقديتين متماثلتين مرتين متتاليتين :

w_i	$(P;P)$	$(P;F)$	$(F;P)$	$(F;P)$
p_i	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$

4- في تجربة إلقاء قطعتين نقديتين متماثلتين في آن واحد :

w_i	$\{P;P\}$	$\{P;F\}$	$\{F;F\}$
p_i	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$

نتيجة 1 : كل عدد p_i موجب يكون أصغر أو يساوي 1 أي أن : $0 \le p_i \le 1$ من أجل $i \in \{1;2;3;...;n\}$

نتيجة 2 : احتمال حادثة A يساوي مجموع احتمالات الحوادث الأولية للحادثة A و يرمز لهذا العدد بالرمز $P(A)$

7. تساوي الاحتمال :

نقول عند تجربة عشوائية أنها متساوية الاحتمال عندما يكون لكل الحوادث الأولية نفس الاحتمال.

ونقول أن قانون الاحتمال متساوي التوزيع .

8. مبرهنة :

نعتبر $\Omega=\{w_1;w_2;...;w_3\}$ مجموعة إمكانيات تجربة عشوائية ، P معرف على Ω .

في حالة تساوي احتمال :

- كل(إمكانية) مخرج w_i له احتمال p_i حيث : $p_i=\frac{1}{n}$ مع n هو عدد عناصر المجموعة Ω
- إذا كانت A حادثة من Ω تضم m عنصرا بحيث : $0 \le m \le n$ ، فإن : $P(A)=\frac{m}{n}$

أو : $$P(A)=\frac{\text{عدد الحالات الملائمة للحادثة } A}{\text{عدد الحالات الممكنة للحادثة } \Omega}$$

مثال:

يحتوي كيس على 7 كرات، أربعة منها حمراء اللون و ثلاثة منها سوداء اللون،لا نفرق بينها باللمس

1) نسحب عشوائيا كرة واحدة و نسجل لونها حيث نرمز بـ R للكرة الحمراء اللون و N للكرة السوداء .

أ. أحسب احتمال سحب كرة حمراء اللون

ب.أحسب احتمال سحب كرة سوداء اللون

2) نقوم الآن بترقيم الكرات الحمراء اللون من1 إلى4 و الكرات السوداء اللون من 2 إلى 4 ونسحب عشوائيا كرة واحدة من الكيس

أ. أحسب احتمال سحب كرة تحمل رقم فردي

ب.أحسب احتمال سحب كرة تحمل رقم زوجي

الجواب : بتوظيف القانون $P(A)=\frac{m}{n}$ أو $P(A) = \frac{\text{عددالحالات الملائمة للحادثة A}}{\text{عددالحالات الممكنة للحادثة } \Omega}$ نجد :

1) أ. احتمال الحادثة A " سحب كرة سوداء اللون" هو $P(A)=\frac{4}{7}$

ب. احتمال الحادثة B "سحب كرة بيضاء اللون " هو $P(B)=\frac{3}{7}$

2) عند ترقيم الكرات تصبح مجموعة الإمكانيات كما يلي : $\Omega=\{R_1;R_2;R_3;R_4;N_2;N_3;N_4\}$

أ. احتمال الحادثة C " سحب كرة تحمل رقم فردي" هو $P(C)=\frac{3}{7}$

ب. احتمال الحادثة D " سحب كرة تحمل رقم زوجي" هو $P(C)=\frac{4}{7}$

9. خواص قانون الاحتمال :

$\Omega=\{w_1;w_2;...;w_3\}$ مجموعة إمكانيات تجربة عشوائية و P احتمال معرف على Ω

1) من أجل كل حادثة A من Ω : $0\le P(A)\le 1$

2) لدينا : $P(\Omega)=1$ و $P(\phi)=0$

3) إذا كانت : $\overline{A}$ الحادثة المعاكسة للحادثة A ، فإن : $P(\overline{A})=1-P(A)$

4) إذا كانت: A و B حادثتين كيفيتين من Ω ، فإن : $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$

5) إذا كانت: A و B حادثتين غير متلائمتين من Ω، فإن : $P(A\cup B)=P(A)+P(B)$

5) إذا كانت: الحادثة A جزء من الحادثة B ، فان : $P(A)\le P(B)$

مثال: بالعودة إلى المثال السابق فإننا يمكن حساب احتمال الحادثة B كما يلي : $P(B)=1-P(A)=1-\frac{4}{7}=\frac{3}{7}$

لأن الحادثتين A و B متعاكستين

II) المتغير العشوائي :

أ. تعريف :

المتغير العشوائي X المعرف على Ω هو الدالة التي ترفق بكل إمكانية(مخرج) ناتج عن تجربة عشوائية،عددا حقيقيا x

- نرمز عادة لمجموعة قيم المتغير العشوائي X بالرمز $X(\Omega)$. و نكتب : $X(\Omega)=\{x_1;x_2;...;x_n\}$
- الحادثة: X يأخذ القيمة x_i يرمز لها بالرمز $(X=x_i)$ مع $i\in\{1;2;3;...;n\}$
- نرمز لاحتمال الحادثة $(X=x_i)$ بالرمز $P(X=x_i)$ مع $i\in\{1;2;3;...;n\}$

ب. قانون احتمال المتغير العشوائي :

قانون احتمال المتغير عشوائي X هو الدالة f المعرفة على المجموعة $X(\Omega)$

و التي ترفق بكل قيمة x_i من $X(\Omega)$ العدد $P(X=x_i)$

جـ. الأمل الرياضياتي :

X متغير عشوائي يأخذ القيم $x_1;x_2;...;x_n$ ، حيث : $P(X=x_i)=p_i$ مع $i\in\{1;2;3;...;n\}$

الأمل الرياضياتي للمتغير X هو الوسط الحسابي للقيم x_i مع $i\in\{1;2;3;...;n\}$ أو عليه : الأمل الرياضياتي للمتغير X

Mr ALLAOU Progress School

هوالعدد الحقيقي $E(X)$ حيث : $E(X)=\sum_{i=1}^{i=n} x_i \times p_i$ أي أن : $E(X)=(x_1\times p_1)+(x_2\times p_2)+...+(x_n\times p_n)$

د. التباين و الانحراف المعياري :

- التباين للمتغير العشوائي X هو العدد الحقيقي الموجب والمعرف بـ :

$V=\sum_{i=1}^{i=n}\left((x_i-E(X))^2\times p_i\right)$ أو : $V=\left(\sum_{i=1}^{i=n} x_i^2\times p_i\right)-(E(X))^2$

-الانحراف المعياري للمتغير العشوائي X هو العدد الحقيقي الموجب $\sigma=\sqrt{V}$

III) العد و توظيفه في حساب الاحتمالات (القوائم- الترتيبات و التوفيقات) :

1- القوائم :

أ. تعريف القائمة:

نعتبر E مجموعة تضم n عنصر حيث : $n\in\mathbb{N}^*$

كل عنصر من الشكل $(a_1;a_2;...;a_p)$ مع $a_i\in E$ هو قائمة ذات p عنصر من مجموعة ذات n عنصر

حيث p عدد طبيعي غير معدوم و $i\in\{1;2;3;...;n\}$

ب. عدد القوائم :

عدد القوائم ذات p عنصر من مجموعة ذات n عنصر هو : n^p

2-الترتيبات :

أ. تعريف الترتيبة:

نعتبر E مجموعة تضم n عنصر حيث : $n\in\mathbb{N}^*$

كل عنصر من الشكل $(a_1;a_2;...;a_p)$ مع $a_i\in E$ مع a_i عناصر من E مختلفة مثنى ، مثنى هو ترتيبة ذات r

عنصر من مجموعة ذات n عنصر حيث $p\in\mathbb{N}^*$ يحقق $1\le r\le n$ و $i\in\{1;2;3;...;n\}$

ب. عدد الترتيبات :

نرمز لعدد الترتيبات ذات r عنصر من مجموعة ذات n عنصر،بالرمز : A_n^r أو nP_r . و لدينا :

بما أن : $1\le r\le n$ ، فإن :

يوجد n اختيار للعنصر الأول من الترتيبة

لكل n اختيار للعنصر الأول ،هناك : $(n-1)$ اختيار للعنصر الثاني من الترتيبة

و لكل $(n-1)$ اختيار للعنصر الثاني من الترتيبة ، هناك $(n-2)$ لاختيار العنصر الثالث من الترتيبة

وهكذا.....، فمن اجل اختيار للعنصر r ،هناك $(n-(r-1))$ اختيار للعنصر الموالي

وباستعمال مبدأ الجداء ، نجد أن عدد الترتيبات هو : $nP_r=n\times(n-1)\times(n-2)\times...\times(n-p+1)$

ملاحظة: إذا كان: $n>r$ ،فإن : $nP_r=0$

3- عاملي عدد طبيعي :

أ. تعريف عاملي عدد طبيعي :

n عدد طبيعي ، عاملي n هو العدد الطبيعي الذي نرمز إليه بالرمز $n!$ و المعرف كما يلي : $\begin{cases}0!=1\\ n!=n\times(n-1)!\end{cases}$

مثال : $1!=1\times0!=1$ ، $2!=2\times1!=2$ ، $3!=3\times2!=3\times2=6$ ، $4!=4\times3!=4\times6=24$

ب.مبرهنة:

من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم: $n!=n\times(n-1)\times(n-2)\times...\times2\times1$

مثال: $4!=4\times3\times2\times1=24$ ، $6!=6\times5\times4\times3\times2\times1=720$

جـ . خاصية :

من أجل كل عدد طبيعي n من أجل كل عدد طبيعي r حيث ، $1 \le r \le n$

$$n! = n\times(n-1)\times(n-2)\times\ldots\times(n-r)\times(n-r-1)!$$

مثال : أ. $10! = 10\times9\times8!$ أو $10! = 10\times9\times7\times6\times5!$

ب. $\frac{10!}{6!} = \frac{10\times9\times7\times6!}{6!} = 10\times9\times8\times7 = 5040$ ،

جـ. $\frac{12!}{6!\times4!} = \frac{12\times11\times10\times9\times7\times6!}{6!\times4!} = 12\times11\times3\times2\times7 = 5544$

ملاحظة هامة: حذار من الخلط بين : $n\times(n-1)!!$ و $(n\times(n-1))!$

د. قانون أخر لعدد الترتيبات :

بما أن : من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم ، و من أجل كل عدد طبيعي r يحقق $1 \le r \le n$

$n! = n\times(n-1)\times(n-2)\times\ldots\times(n-r+1)\times(n-r)!$ ومن: $n\times(n-1)\times(n-2)\times\ldots\times(n-r+1) = \frac{n!}{(n-r)!}$

و عليه: إذا كان $1 \le r \le n$ ، فإن: $nP_r = \frac{n!}{(n-r)!}$

4 - التوفيقات :

أ. تعريف:

نعتبر E مجموعة تضم n عنصر حيث : $n \in \mathbb{N}^*$.

كل مجموعة جزئية A من E تضم r عنصرا ، هي توفيقة ذات r عنصر من مجموعة ذات n عنصر ، حيث : $0 \le r \le n$

مثال :

$E = \{a;b;c\}$. التوفيقات ذات عنصرين من عناصر E هي المجموعات $\{b;c\},\{a;c\},\{a;b\}$

ب. عدد التوفيقات :

نرمز لعدد التوفيقات ذات r عنصر من مجموعة ذات n عنصر بالرمز nC_r

من أجل كل عدد طبيعي r ، حيث $0 \le r \le n$: $nC_r = \frac{n!}{r!\times(n-r)!}$

ملاحظة: إذا كان: $n > r$ ، فإن : $nC_r = 0$

و. خواص:

أ . من أجل كل عددين طبيعيين n و p حيث: $n \ge p \ge 0$ لدينا: $C_n^p = C_n^{n-p}$

ب. من أجل كل عددين طبيعيين n و p حيث: $n-1 \ge p \ge 1$ لدينا: $C_n^p = C_{n-1}^p + C_{n-1}^{p-1}$

ملاحظة: تمكننا الخاصية الثانية من حساب C_n^p إذا علمنا C_{n-1}^{p-1} و C_{n-1}^p كما هو مبين في الشكل

مثلث باسكال :

n \ p	0	1	2	3	4	5	6
0	1						
1	1	1					
2	1	2	1				
3	1	3	3	1			
4	1	4	6	4	1		
5	1	5	10	10	5	1	
6	1	6	15	20	15	6	1

$C_{n-1}^p + C_{n-1}^{p-1} = C_n^p$

هـ. دستور ثنائي الحد:

a و b عددان طبيعيان , n عدد طبيعي $n \ge 1$ لدينا:

$$(a+b)^n=\sum_{p=0}^{n}C_n^p a^{n-p}\times b^p=a^n+C_n^1a^{n-1}b+.....+b^n$$

مثال: أحسب المجموعين : $A=\sum_{k=0}^{n}C_n^k\frac{1}{3^k}$ $B=\sum_{k=0}^{n}C_n^k\frac{3^{n-k}}{2^k}$

الجواب: بتوظيف دستور ثنائي الحد نجد :

- لدينا : $(1+\frac{1}{3})^n=\sum_{k=0}^{n}C_n^k(1)^{n-k}\times\left(\frac{1}{3}\right)^k$ ، ومنه : $A=\sum_{k=0}^{n}C_n^k\frac{1}{3^k}=\left(\frac{4}{3}\right)^n$
- لدينا : $(1+\frac{3}{2})^n=\sum_{k=0}^{n}C_n^k\left(\frac{3}{2}\right)^{n-k}\times(1)^k$ ، ومنه : $B=\sum_{k=0}^{n}C_n^k\frac{3^{n-k}}{2^k}=\left(\frac{5}{2}\right)^n$

IV) الاحتمال الشرطي و الحوادث المستقلة :

1- الاحتمال الشرطي :

أ. تعريف:

لتكن A و B حادثتان من مجموعة الإمكانيات (المخارج) Ω ، P احتمال معرف على Ω حيث $P(A)\neq 0$

إن احتمال تحقق الحادثة B علما أن الحادثة A قد تحققت هوا لاحتمال الذي نرمز إليه بالرمز $P_A(B)$

و المعرف كما يلي : $P_A(B)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}$

ب. مثال:

يحتوي كيس على أربع كرات ذات لون أبيض تحمل الأرقام 1;1;2;3 و ست كرات ذات لون أسود تحمل الأرقام 1;2;3;4;5

نسحب من الكيس ثلاث كرات في آن واحد

1- أحسب احتمال الحوادث التالية :

A "الكرات الثلاث من نفس اللون " ، B " الكرات الثلاث تحمل أرقام فردية "

2- أحسب كل من $P_A(B)$ و $P_B(A)$ ،هل $P_A(B)=P_B(A)$ ؟

جـ. الجواب :

1- عدد الحالات الممكنة هي : $10C_3=120$

أ . عدد الحالات المواتية لسحب ثلاث كرات من نفس اللون هو: $4C_3+6C_3=24$ ومنه $P(A)=\frac{1}{5}$.

ب- عدد الحالات المواتية لسحب ثلاث كرات تحمل أرقام فردية هو: $7C_3=35$ ومنه $P(B)=\frac{7}{24}$.

2 - حساب $P_A(B)$ و $P_B(A)$: نعلم أن $P_A(B)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}$ ، لنحسب $P(A\cap B)$. الحادثة $A\cap B$ هي الحادثة الحصول على ثلاث كرات من نفس اللون و تحمل أرقم فردية ، إذن $P(A\cap B)=\frac{3C_3+4C_3}{120}=\frac{1}{24}$ ومنه $P_A(B)=\frac{\frac{1}{24}}{\frac{1}{5}}=\frac{5}{24}$

و لدينا: $P_B(A)=\frac{P(B\cap A)}{P(B)}$ إن $P(A\cap B)=P(B\cap A)=\frac{1}{24}$ ومنه $P_B(A)=\frac{\frac{1}{24}}{\frac{7}{24}}=\frac{1}{7}$

نلاحظ أن : $P_A(B)\neq P_B(A)$

2- الحوادث المستقلة:

أ. تعريف1 :

نقول أن حادثة A مستقلة عن الحادثة B إذا و فقط إذا كان تحقق الحادثة A غير مرتبط بتحقق الحادثة B

ومنه: حادثة A مستقلة عن الحادثة B إذا و فقط إذا كان $P_B(A)=P(A)$

وبما أن : $P_B(A)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}$.

فإن : حادثة A مستقلة عن الحادثة B إذا و فقط إذا كان $\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=P(A)$

نتيجة: حادثة A مستقلة عن الحادثة B إذا و فقط إذا كان $P(A\cap B)=P(A)\times P(B)$

مثال:

هل الحادثتان A و B المعينتان في المثال السابق مستقلتان ؟

الجواب :

بما أن : $P(A\cap B)=\frac{1}{24}$ و $P(A)\times P(B)=\frac{1}{5}\times\frac{7}{24}=\frac{7}{120}$ فإن : $P(A\cap B)\neq P(A)\times P(B)$

وعليه : لحادثتان A و B المعينتان في المثال السابق غير مستقلتان

ب. تعريف2:

X و Y متغيران عشوائيان معرفان على نفس مجموعة الإمكانيات Ω

لتكن $x_1;x_2;...;x_n$ قيم المتغير X و $y_1;y_2;...;y_m$ قيم المتغير Y

نقول أن X و Y مستقلان عندما تكون الحادثتان $(X=x_i)$ و $(Y=y_j)$ مستقلتان من أجل كل i و j

حيث $(1\le i\le n$ و $1\le j\le m)$

مثال :

نرمي حجري نرد متزنين ، X المتغير العشوائي الذي يشمل مجموع الرقمين المحصل عليهما على الوجهين العلويين و Y يمثل جداؤهما .

هل الحادثتين $(X=6)$ و $(Y=12)$ مستقلتين ؟

الجواب : عدد الحالات الممكنة هو 36

الحادثة $(X=6)$ هي الحصول على الثنائيات $(1;5),(5;1),(3;3),(4;2),(2;4)$ ، إذن : $P(X=6)=\frac{5}{36}$

الحادثة $(Y=12)$ هي الحصول على الثنائيات $(2;6),(6;2),(3;4),(4;3)$ ، إذن $P(Y=12)=\frac{4}{36}=\frac{1}{9}$

الحادثة $(X=6)\cap(Y=12)$ هي الحادثة المستحيلة ، ومنه : $P[(X=6)\cap(Y=12)]=0$

وعليه : الحادثتين $(X=6)$ و $(Y=12)$ غير مستقلتين

V) دستور الاحتمالات الكلية :

1.تجزئة مجموعة :

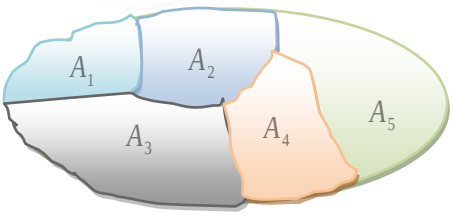
E مجموعة تضم n عنصر مع $n\in\mathbb{N}^*$ ، $P(E)$ مجموعة أجزاء المجموعة E

نقول أن $P(E)$ تشكل تجزئة للمجموعة E ، إذا وفقط إذا تحققت الشروط التالية :

1) $A_i\neq\phi$ مع $1\le i\le n$

2) $A_i\cap A_j=\phi$ مع $1\le i\le n$ و $1\le j\le n$

3) $A_1\cup A_2\cup A_3\cup...\cup A_n=E$



2. دستور الاحتمالات الكلية:

لتكن A_1،A_2،A_3،...،A_n حوادث احتمالاتها غير معدومة تشكل تجزئة للمجموعة الشاملة Ω و P احتمال معرف على Ω

لدينا من أجل كل حادثة B من Ω : $\boxed{P(B)=P(A_1\cap B)+P(A_2\cap B)+.....+P(A_n\cap B)}$

مع $P(A_k\cap B)=P(A_k)\times P_{A_k}(B)$ من أجل كل k حيث $1\le k\le n$

لاحظ أن العائلة $\{A_k\cap B;1\le k\le n\}$ تشكل تجزئة للحادثة B .

3. تطبيق:

1) يملك أمين حجر نرد مزور، سداسي الشكل يحمل الأرقام : $1;2;3;4;5;6$ ، بحيث احتمال ظهور رقم فردي هوضعف

احتمال ظهور رقم زوجي

أحسب احتمال ظهور كل رقم من الأرقام $6;5;4;3;2;1$

2) نعتبر الآن U_1 و U_2 علبتين ، حيث تضم العلبة U_1 أربع كرات من اللون الأبيض و ستة كرات من اللون الأحمر.
بينما تضم U_2 أربع كرات من اللون الأحمر و ستة كرات من اللون الأبيض
يقوم أمين بإلقاء حجر النرد مرة واحدة .

- إذا ظهر رقم فردي فإنه يسحب من العلبة U_1 كرتان على التوالي دون إرجاع الكرة المسحوبة قبل السحب الموالي
- إذا ظهر رقم زوجي فإنه يسحب من العلبة U_2 كرتان في آن واحد

احسب احتمال الحصول على كرتان من نفس اللون

4. حل التطبيق :

1) لنضع : $P(\{1\})=P(\{3\})=P(\{5\})=x$ و $P(\{2\})=P(\{4\})=P(\{6\})=y$

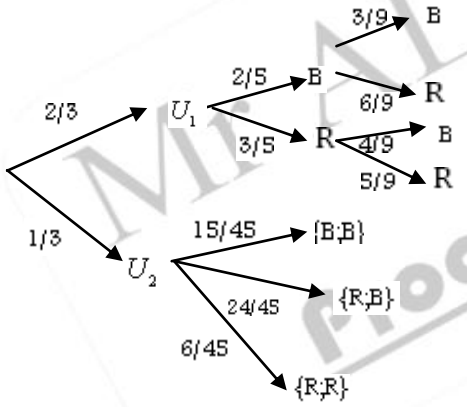
نعلم أن : $P(\{1\})+P(\{2\})+P(\{3\})+P(\{4\})+P(\{5\})+P(\{6\})=1$

إذن نحصل على: $\begin{cases} x=2y \\ 3x+3y=1 \end{cases}$ ، ومنه: $\begin{cases} x=2y \\ 3(2y)+3y=1 \end{cases}$ ، أي أن: $\begin{cases} x=2y \\ 9y=1 \end{cases}$ وعليه: $\begin{cases} x=\frac{2}{9} \\ y=\frac{1}{9} \end{cases}$

2) نعتبر الحوادث: A_1 " ظهور رقم فردي" و A_2 "ظهور رقم زوجي "
B "سحب كرة بيضاء اللون" و R " سحب كرة حمراء اللون" .

- إن : $P(A_1)=P(\{1\})+P(\{3\})+P(\{5\})=\frac{2}{3}$ و $P(A_2)=P(\{2\})+P(\{4\})+P(\{6\})=\frac{1}{3}$

نستعين بشجرة الاحتمالات للإجابة على الأسئلة :



نعتبر C حادثة الحصول على كرتان من نفس اللون

لدينا : $P(C)=P(C\cap A_1)+P(C\cap A_2)$

إن : $P(C\cap A_1)=P(A_1)\times P_{A_1}(C)$ ومنه : $P(C\cap A_1)=\frac{2}{3}\times\left(\frac{3}{5}\times\frac{5}{9}+\frac{2}{5}\times\frac{4}{9}\right)=\frac{14}{45}$

و $P(C\cap A_2)=P(A_2)\times P_{A_2}(C)$ ومنه : $P(C\cap A_1)=\frac{1}{3}\times\left(\frac{6}{45}+\frac{15}{45}\right)=\frac{7}{45}$

وعليه : $P(C)=\frac{14}{45}+\frac{7}{45}=\frac{7}{15}$

MR ALLAOU Progress School

مادة الريـــــاضيات بكالوريا 2020

الاحتمالات

خاص بالشعب العلمية

أهم المعلومات

الاحتمالات تحت المجهر

من إعداد الأستاذ : حـــــاقة محمد

... قِفْ على ناصية الحُلم وَ قَاتِلْ

https://www.facebook.com/okba.bac.2010

دليل الاحتمـــالات بصيغة مبسطة وشامل

إعداد الأستاذ محمد حاقة

قــف عنـــد ناصيـــة الحلـــم وقاتـــل

1) **التجربة العشوائية:** هي كل تجربة لا يمكن توقع نتيجتها، رغم معرفتنا لمجموعة النتائج الممكنة

2) **مجموعة الإمكانيات:** هي مجموعة النتائج الممكنة، ونرمز لها عادة بـ Ω

3) **الحادثة:** هي كل جزء من مجموعة الإمكانيات Ω

4) **نتيجة هامة:** في حالة تساوي الاحتمال،لدينا: $P(A)=\frac{\text{عدد عناصر } A}{\text{عدد عناصر } E}$

5) **خواص:** Ω هي مجموعة الإمكانيات مزودة بقانون احتمال P

- من أجل كل حادثة A : $\boxed{0 \le P(A) \le 1}$ ، $P(\varnothing)=0$ و $P(\Omega)=1$
- إذا كانت A و B حادثتان كيفيتين فان: $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$
- إذا كانت A و B حادثتان غير متلائمتين (منفصلتان) فان: $P(A\cup B)=P(A)+P(B)$
- إذا كانت $\overline{A}$ الحادثة العكسية للحادثة A فان: $\boxed{P(\overline{A})=1-P(A)}$
- إذا كانت $A\subseteq B$ (معناه A جزء من B) فان $P(A)\le P(B)$
- احتمال الحادثة B علما أنّ الحادثة A محققة هو العدد الحقيقي $P_A(B)$ حيث $P_A(B)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}$
- $P(A\cap B)=P(A)\times P_A(B)$ و $P(A\cap B)=P(B)\times P_B(A)$
- إذا كانت A و B حادثتان مستقلتان فان $P(A\cap B)=P(A)\times P(B)$ (معناه $P_A(B)=P(B)$)

مثال توضيحي: لتكن $\Omega=\{1;2;3;4;5;6;7;8;9\}$ مجموعة نتائج تجربة عشوائية ونعتبر الحادثتين

$$A=\{2;4;6;8\} \text{ و } B=\{7;8;9\}$$

- أحسب الاحتمالات التالية: $P(A)$ و $P(B)$ و $P(\overline{A})$ و $P(A\cup B)$ و $P(A\cap B)$ و $P_A(B)$

6) **العد: العاملي،القائمة ، الترتيبة ،التبديلة ، التوفيقة**

1) **العاملي:** $n!=n\times(n-1)\times\ldots\times2\times1$

مثال:أحسب $5!$ ، $5!=5\times4\times3\times2\times1=120$

تذكر: $\boxed{1!=1}$ و $\boxed{0!=1}$

2) **القائمة:** عدد القوائم ذات p عنصرا من مجموعة ذات n هي n^p

3) **الترتيبة**: ويرمز لعدد الترتيبات ذات p عنصرا من مجموعة ذات n عنصرا بالرمز A_n^p

حيث $A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!}$

مثال: أحسب A_5^2، $A_5^2 = \frac{5!}{(5-2)!} = \frac{5!}{3!} = \frac{120}{6} = 20$

تذكر: $\boxed{A_1^0 = 1}$ و $\boxed{A_1^1 = 1}$

4) **التوفيقة**: نرمز لعدد التوفيقات ذات p عنصرا من مجموعة ذات n بالرمز C_n^p ونكتب:

$$C_n^p = \frac{n!}{p!(n-p)!}$$

مثال: أحسب C_5^2، $C_5^2 = \frac{5!}{2!(5-2)!} = \frac{5!}{2!.3!} = \frac{120}{12} = 10$

تذكر: $\boxed{C_n^n = C_n^0 = 1}$ $\boxed{C_n^1 = n}$

5) **التبديلة**: عدد التبديلات هو $A_n^n = n!$

ملحوظة: عدد التبديلات مع التكرار (معامل الترتيب) يساوي: $\frac{n!}{n_1! \times n_2! \times \ldots \times n_k!}$

7) **العد وأنواع السحب** : n و p عددان طبيعيان غير معدومين،نسحب p عنصرا من مجموعة ذات n عنصرا.

السحب	القانون المستعمل
على التوالي بإرجاع	n^p
على التوالي دون إرجاع	A_n^p
في آن واحد	C_n^p
تشكيل لجنة مرفقة بمهام	A_n^p
تشكيل لجنة غير مرفقة بمهام (لهم نفس المهام)	C_n^p

8) **كيفية الحساب بالآلة الحاسبة**

هناك رمز ! X مقصود به العاملي نصل إليها عن طريق SHIFT

هناك خانة مكتوب عليها nCr تمثل التوفيقة، مثلا لحساب C_5^2 : نضغط على 5 وبعد nCr وبعد 2

هناك خانة مكتوب عليها nPr نصل إليها عن طريق SHIFT هي نفس خانة nCr تمثل الترتيبة، مثلا لحساب A_5^2 : نضغط على 5 وبعد SHIFT وبعد nPr وبعد 2

ملحوظة: هناك نوع تجد الرمز nCr و nPr في خانة × و ÷

معلومة: في الحساب ('و' تعني الضرب) (' أو' تعني الجمع)

9) الأمل الرياضي، التباين و الانحراف المعياري لمتغير عشوائي X

الأمل الرياضي $E(X)$	$E(X)=\sum_{i=1}^{n} x_i p_i$
التباين $V(X)$	$V(X)=\sum_{i=1}^{n}\left(x_i-E(X)\right)^2 p_i$ أو $V(X)=\sum_{i=1}^{n} x_i^2 p_i-\left(E(X)\right)^2$
الانحراف المعياري $\sigma(X)$	$\sigma(X)=\sqrt{V(X)}$

10) خواص متعلقة بالمتغير العشوائي X

a و b عددان حقيقيان، لدينا

$$E(aX+b)=a\times E(X)+b$$

$$V(aX+b)=a^2\times V(X)$$

$$\sigma(aX+b)=|a|\times\sigma(X)$$

11) المثلث العددي

n \ P	0	1	2	3	4	5	6
0	1						
1	1	1					
2	1	2	1				
3	1	3	3	1			
4	1	4	6	4	1		
5	1	5	10	10	5	1	
6	1	6	15	20	15	6	1

$C_{n-1}^{n}+C_{n-1}^{n-1}$

C_{n}^{n}

12) دستور ثنائي الحد

a و b عددان طبيعيان ، n عدد طبيعي $(n\geq 1)$ لدينا

$$\boxed{(a+b)^n=\sum_{p=0}^{n} C_n^p a^{n-p} b^p=a^n+C_n^1 a^{n-1}b+\ldots+C_n^{n-1} a\, b^{n-1}+b^n}$$

13) دستور الاحتمالات الكلية :

لتكن A_1، A_2، A_3، ...، A_n حوادث احتمالاتها غير معدومة تشكل تجزئة للمجموعة الشاملة E

لدينا من أجل كل حادثة B : $\boxed{p(B)=p(A_1\cap B)+p(A_2\cap B)+\ldots\ldots+p(A_n\cap B)}$

مع $p(A_k\cap B)=p(A_k)\times p_{A_k}(B)$ من أجل كل k حيث $1\leq k\leq n$

البصمة الجميلة تبقى وإن غاب صاحبها ،،، محبكم في الله الأستاذ محمد حاقة - King

طبعة ممتازة

زاد المعرفة

الأساتذة: بوعجاب عبد القادر - شبين عمر

في

المراجعة النهائية للرياضيات

دروس ملخصة | تمارين نموذجية | مواضيع بكالوريا | حلول مفصلة

- الدوال العددية
- الدوال الأسية واللوغاريتمية
- المتتاليات العددية
- الاحتمالات
- الأعداد المركبة والتحويلات النقطية
- الدوال الأصلية والحساب التكاملي
- الهندسة الفضائية

3AS ثانوي

علوم تجريبية - رياضيات

تقني رياضي

منشورات كليك

C icEditions

الاحتمالات

■ الاحتمالات:

الأمل الرياضياتي والتباين والانحراف:

* الأمل الرياضياتي لقانون احتمال هو المعدل μ

حيث $\mu = \sum_{i=1}^{n} P_i x_i$

* التباين لقانون احتمال هو العدد V حيث

$$V = \sum_{i=1}^{n} P_i (x_i - \mu)^2$$

* الانحراف المعياري هو $\sigma = \sqrt{V}$

■ ملاحظات:

❶ كما في الإحصاء يميز العدد V تشتت القيم حول المعدل μ.

❷ يمكن حساب V بالدستور $V = \sum_{i=1}^{n} P_i x_i^2 - \mu^2$

■ خواص:

❶ عند إضافة عدد ثابت a لكل القيم x_i يضاف a إلى الأمل الرياضياتي.

❷ عند ضرب كل قيم x_i يضرب الأمل الرياضياتي في العدد a.

مثال: يرمي اللاعب حجر نرد متوازن و يربح 10 دنانير إذا حصّل على مضاعف للعدد 3 و يخسر 5 دنانير في الحالات الأخرى.

لدينا: $\mu = 10 \times \frac{1}{3} - 5 \times \frac{2}{3} = 0$

$$V = \sum_{i=1}^{n} P_i x_i^2 - \mu^2 = 10^2 \times \frac{1}{3} + 5^2 \times \frac{2}{3} - 0 = 50$$

و $\sigma = \sqrt{V} = 5\sqrt{2}$

تمرين تطبيقي 1

يدفع لاعبان A و B، 6 و 10 دينارا على الترتيب ويرمي منظم اللعبة حجري نرد متوازنين كل منهما ذو أربعة أوجه مرقمة من 1 إلى 4 ويدفع للاعبين ضعف مجموع رقمي الوجهين الظاهرين بعد الرمي.

- احسب أمل الربح لكل لاعب.

الحل:

عند رمي الحجرين مجموعة النتائج الممكنة هي $S = \{2,3,4,5,6,7,8\}$ باعتبار أن النتيجة هي مجموع الرقمين الظاهرين يدفع اللاعب A ستة دنانير ويأخذ ضعف النتيجة وبالتالي

$E' = \{-2,0,2,4,6,8,10\}$

قانون الاحتمال يعطى بالجدول التالي:

x_i	-2	0	2	4	6	8	10
p_i	$\frac{1}{16}$	$\frac{2}{16}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{4}{16}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{2}{16}$	$\frac{1}{16}$

■ الأمل الرياضياتي هو:

$$\mu = \frac{1}{16} \times (-2) + \frac{2}{16} \times (0) + \frac{3}{16} \times (2) + \frac{4}{16} \times (4) + \frac{3}{16} \times (6) + \frac{2}{16} \times (8) + \frac{1}{16} \times (10) = \frac{64}{16} = 4$$

إذن أمل الربح بالنسبة للاعب A هو 4 دينارا.

- لحساب أمل الربح للاعب B نطرح 4 من كل القيم x_i للاعب A وبالتالي أمل ربحه

$$\mu' = \mu - 4 = 0$$

بالنسبة للاعب B اللعبة عادلة (لا له و لا عليه)

تمرين تطبيقي 2

يحوي صندوق 5 كريات مرقمة من 1 إلى 5 لا نفرق بينها عند اللمس. نسحب على التوالي 3 كريات بالإرجاع (أي بعد كل سحبة نعيد الكرية إلى الصندوق) نسجل بالترتيب الأرقام التي تحملها الكريات المسحوبة لنحصل عندئذ على ثلاثة أرقام من بين 1 ، 2 ، 3 ، 4 ، 5.

1) ما هو عدد الأعداد الممكنة؟

2) نعيد التجربة هذه المرّة لكن دون إرجاع الكرية المسحوبة. ما هو عدد الأعداد الممكنة؟

- ما احتمال الحادثة A «الكرية الثانية المسحوبة تحمل الرقم 4»

الحل:

1) الأعداد المحصل عليها مشكلة من المئات والعشرات والآحاد (هناك 5 إمكانيات بالنسبة لرقم المئات، من أجل كل إمكانية هناك 5 إمكانيات لرقم العشرات أي 25 إمكانية ومن أجل كل إمكانية للعشرات هنا 5 إمكانيات لرقم الآحاد) و بالتالي هناك $5\times5\times5=125$ عددا ممكنا.

2) في الحالة الثانية هناك $5\times4\times3=60$ عددا (باعتبار أن الأرقام مختلفة مثنى مثنى ، الكرية المسحوبة لا ترجع)

- المخرج الذي يحقق الحادثة A يناسب وضع الرقم 4 رقما للعشرات فتبقى 4 إمكانيات لرقم المئات ولكل إمكانية تبقى 3 إمكانيات لرقم الآحاد أي $4\times3=12$ حالة ملائمة و بالتالي:

$$P(A)=\frac{12}{60}=\frac{1}{5}=0,2$$

العد:

1 – المبدأ الأساسي للعد:

إذا كان هناك إجراء معين يتم بـ : n_1 طريقة و إجراء ثان يتم بـ n_2 طريقة ، ... ، ثم إجراء من رتبة k يتم ب n_k طريقة فإن هذه الإجراءات تتم على التتابع بـ $n_1\times n_2\times...\times n_k$ طريقة

2 – القوائم: تعريف:

n و p عددان طبيعيان غير معدومين E مجموعة ذات n عنصرا.

كل عنصر من الشكل $(a_1,a_2,.....a_p)$ يسمى قائمة ذات p عنصرا من المجموعة E.

حيث: $a_1,a_2,.....a_p$ هي عناصر E وهي ليست جميعها مختلفة.

عدد القوائم:

عدد القوائم ذات p عنصرا من المجموعة E ذات n عنصرا هو n^p.

3 – الترتيبات: تعريف:

n و p عددان طبيعيان حيث : $p\le n$

نسمى ترتيبه ذات p عنصرا من مجموعة ذات n عنصرا كل قائمة ذات p عنصرا متمايزة مثنى مثنى.

عدد الترتيبات:

لتكن الترتيبة $(a_1, a_2, ..., a_p)$ من E عدد الترتيبات:

$$A_n^p = n(n-1)(n-2)\times...\times(n-p+1)$$

4 – التبديلات: تعريف:

n عدد طبيعي غير معدوم.

نسمى تبديلة المجموعة E ذات n عنصرا كل ترتيبة ذات n عنصرا من E.

عدد التبديلات : $A_n^n = n(n-1)(n-2)...(n-n+1)$

إذن: $A_n^n = n(n-1)(n-2)\times...\times 1$

الرمز عاملي: العدد $n(n-1)(n-2)\times...\times 2\times 1$

يرمز له بالرمز $n!$ ونكتب $n! = n(n-1)\times...\times 2\times 1$

الرمز $n!$ يقرأ : n عاملي.

اصطلاحا : $1! = 1$ و $0! = 1$ ومنه:

$$A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!} \quad \text{و} \quad A_n^n = n!$$

5 – التوفيقات: تعريف:

n و p عددان طبيعيان حيث: $p \le n$.

E مجموعة ذات n عنصرا.

نسمى توفيقة ذات p عنصرا من E كل جزء من E يشمل p عنصرا من E.

عدد التوفيقات :

يعطي عدد التوفيقات ذات p عنصرا من E

بالعبارة: $C_n^p = \frac{A_n^p}{p!}$ أي: $C_n^p = \frac{n!}{(n-p)!\times p!}$

ملاحظة:

نرمز لعدد التوفيقات بالرمز: C_n^p أو $\binom{n}{p}$

■ خواص C_n^p:

لدينا الخواص التالية للعدد C_n^p:

$C_n^0 = 1$ ؛ $C_n^1 = n$ ؛ $C_n^n = 1$ ؛ $C_n^p = C_n^{n-p}$

؛ $C_n^p = C_{n-1}^{p-1} + C_{n-1}^p$

6 – المثلث العددي: و يعتمد في حساب C_n^p على الخواص الخمسة السابقة:

n \ p	0	1	2	3	4	5	6	7
0	1							
1	1	1						
2	1	2	1					
3	1	3	3	1				
4	1	4	6	4	1			
5	1	5	10	10	5	1		
6	1	6	15	20	15	6	1	
7	1	7	21	35	35	21	7	1

7– دستور ثنائي الحد: إذا كان a و b عددان حقيقيان و n عدد طبيعي غير معدوم فإن:

$$(a+b)^n = C_n^0 a^n b^0 + C_n^1 a^{n-1} b^1 + ... + C_n^n a^0 b^n$$

$$= \sum_{k=0}^{k=n} C_n^k a^{n-k} b^k$$

■ الاحتمالات الشرطية:

A و B حادثتان من E حيث احتمال A غير معدوم.

يرمز لاحتمال الحادثة B علما أن A محققة بالرّمز $p_A(B)$ و يعرّف بالنسبة $p_A(B) = \frac{p(A\cap B)}{p(A)}$

ملاحظة: عند تساوي الاحتمال يكون لدينا

$$p_A(B)=\frac{\text{عدد عناصر المجموعة } A\cap B}{\text{عدد عناصر المجموعة } A}$$

ينتج من التعريف:

$$p(A\cap B)=p(A)\times p_A(B)$$
$$=p(B)\times p_B(A)$$

مثال: نرمي حجر نرد متوازن ونعتبر الحادثتين A «الحصول على رقم فردي»، B «الحصول على مضاعف للعدد 3»

$$p_A(B)=\frac{p(A\cap B)}{p(A)}=\frac{1}{3}$$

لأن: $A=\{1,3,5\}$ ، $B=\{3,6\}$ ، $A\cap B=\{3\}$

■ التجزئة:

نقول أن الحوادث A_1، A_2، .... A_n تشكل تجزئة للمجموعة E عندما تكون هذه الحوادث غير متلائمة مثنى مثنى واتحادها هو E وكلها ليست خالية. من أجل كل i و j يكون $A_i\cap A_j=\varnothing$ ، $A_1\cup A_2\cup.....\cup A_n=E$ ومن أجل كل i يكون $A_i\neq\varnothing$.

■ دستور الاحتمالات الكلية:

A حادثة احتمالها غير معدوم، $\overline{A}$ حادثتها العكسية.

A و $\overline{A}$ تشكل تجزئة لـ E.

B حادثة من E . إذن الحادثتان $B\cap A$ و $B\cap\overline{A}$ غير متلائمتين و $(B\cap\overline{A})\cup(B\cap A)=B$

وبالتالي: $p(B)=p(B\cap A)+p(B\cap\overline{A})$

$$p(B)=p_A(B)\times p(A)+p_{\overline{A}}(B)\times p(\overline{A})$$

مبرهنة:

الحوادث A_1، A_2، ....، A_n تشكل تجزئة لـ E .

B حادثة من E لدينا:

$$p(B)=p(A_1\cap B)+p(A_2\cap B)+....+p(A_n\cap B)$$
$$=p_{A_1}(B)\times p(A_1)+...+p_{A_n}(B)\times p(A_n)$$

تمرين تطبيقي 1

تستقبل ثانوية L تلاميذ السنة الأولى من ثلاث متوسطات M1 ، M2 ، M3.

25 ٪ من التلاميذ يأتون من المتوسطة M1 ، 40 ٪ من المتوسطة M2 والباقي من المتوسطة M3.

5 ٪ من تلاميذ من المتوسطة M1 ، 10 ٪ من تلاميذ M2 و 0,1 ٪ من تلاميذ M3 يعيدون السنة.

نختار تلميذا عشوائيا.

a) كوّن شجرة متوازنة تترجم الوضعية.

b) احسب احتمال الحادثة A «التلميذ الذي تم اختياره يعيد السنة».

الحل:

نرمز بالرمز A_i للحادثة «التلميذ قادم من المتوسطة M_i »مع $1\leq i\leq 3$ وبالرمز B للحادثة «التلميذ يعيد السنة».

a) بما أن القانون ذو توزيع منتظم(تساوي احتمال) ترجم النسب إلى الاحتمالات التالية:

$$p(A_2)=0,40\ ;\ p(A_1)=0,25$$
$$p(A_3)=1-p(A_1)-p(A_2)=0,35$$

➢ نشكل الشجرة المتوازنة:

نضع على الفروع الأولى الاحتمالات السابقة

$$p(A_1)+p(A_2)+p(A_3)=1$$

➢ تظهر في نص التمرين الاحتمالات الشرطية كما يلي:

احتمال أن يكون التلميذ معيدا إذا كان قادما من المتوسطة M1 هو 0,05

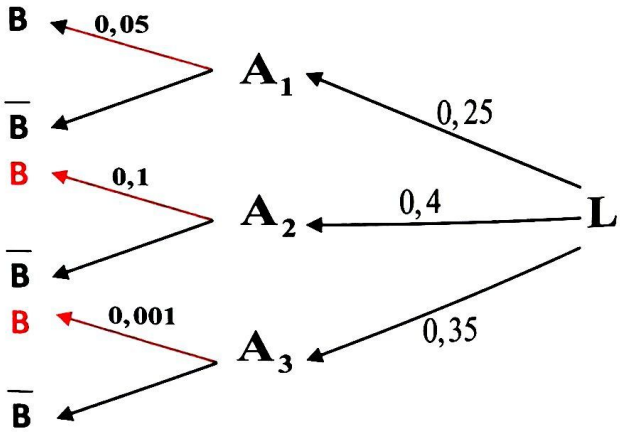
أي $p_{A_1}(B)=0,05$ وكذلك نقرأ $p_{A_2}(B)=0,1$

و $p_{A_3}(B)=0,001$

➢ نكمل الشجرة بفروع تتجه نحو B أو $\overline{B}$

($\overline{B}$ الحادثة العكسية للحادثة B)

الفروع مثقلة بالاحتمالات الشرطية.



لا تنس أن مجموع احتمالات الفروع في نفس المستوي يساوي 1

$p_{A_1}(B)+p_{A_1}(\overline{B})=1$ وكذلك

$$p(A_i\cap B)=p(A_i)\times p_{A_i}(B)$$

b) نحسب $p(B)$ باستعمال دستور الاحتمالات الكلية:

$$p(B)=p(A_1\cap B)+p(A_2\cap B)+p(A_3\cap B)$$

$$p(B)=0,25\times 0,05+0,4\times 0,1+0,35\times 0,001$$

$$p(B)=0,05285$$

■ الحوادث المستقلة:

نقول أن A و B مستقلتان عندما يكون احتمال إحداهما مستقلا عن تحقق الأخرى.

بعبارة أخرى $p_A(B)=p(B)$ أو $p_B(A)=p(A)$

أي أن استقلال A و B معناه أن احتمال «A و B» هو جداء احتماليهما $p(A\cap B)=p(A)\times p(B)$

👍 نقبل أنه إذا كانت A و B مستقلتين فإن $\overline{A}$ و B مستقلتان وكذلك A و $\overline{B}$ ، $\overline{A}$ و $\overline{B}$ أيضا

نلاحظ على الشجرة المتوازنة

$$p(B)=p_A(B)=p_{\overline{A}}(B)$$

و بالتالي $p(A\cap B)=p(A)\times p_A(B)$

$$=p(A)\times p(B)$$

وكذلك $p(\overline{A}\cap B)=p(\overline{A})\times p_{\overline{A}}(B)$

$$=p(\overline{A})\times p(B)$$

مثال: نرمي قطعة نقد ثم حجر نرد مكعب مرقم من 1 إلى 6 ثم قطعة نقد ثم قطعة نقد و أخيرا حجر نرد ذا أربعة أوجه مرقمة من 1 إلى 4 .

كل نتيجة لا تؤثر في التي تليها. و عليه فاحتمال الحصول على القائمة $\{F,2,P,P,3\}$ مثلا هو:

$$\frac{1}{2}\times\frac{1}{6}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{192}$$

مادة الريـــــاضيات بكالوريا 2020

الاحتمالات

خاص بالشعب العلمية

معلومات مفيدة بنكهة خاصة

الاحتمالات تحت المجهر

من إعداد الأستاذ : عبعوب محمد

- تذكروا أن ؛ تعب المراجعة أفضل من ألم السقوط .

https://www.facebook.com/okba.bac.2010

الاحتـــــــــمالات

كي يعطيك مجموعتين ويقلك w هي المجموعة الكلية و A هي المجموعة الجزئية و تمثل الأعداد الزوجية و B هي مجموعة جزئيـــــة من w

$$w = \{1.2.3.4.5.6.7.8.9\}$$
$$A = \{2.4.6.8\}$$
$$B = \{7.8.9\}$$

احسب الاحتمالات التالية : $P(A)$ و $P(B)$ و $P(\bar{A})$ و $P(A \cup B)$ و $P(A \cap B)$ و $P_A(B)$

$$P(A) = \frac{\text{عددعناصر } A}{\text{عددعناصر } w} = \frac{4}{9}$$

$$P(B) = \frac{\text{عددعناصر } B}{\text{عددعناصر } w} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$$

$P(\bar{A})$ يمثل الاحـــــــتمال العكسي لـ $P(A)$

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A) = 1 - \frac{4}{9} = \frac{5}{9}$$

بطريقة أخرى يعني مجموعة $\bar{A}$ هي عكس الأعداد الزوجية وهي الأعداد الفردية $\bar{A} = \{1.3.5.7.9\}$

$$P(\bar{A}) = \frac{\text{عددعناصر } \bar{A}}{\text{عددعناصر } w} = \frac{5}{9}$$

نروحو نحسبو المجموعتين $A \cap B$ و $A \cup B$

$$A \cap B = \{8\}$$
$$A \cup B = \{2.4.6.8.7.9\}$$

$$P(A \cap B) = \frac{\text{عددعناصر } A \cap B}{\text{عددعناصر } w} = \frac{1}{9}$$

$$P(A \cup B) = \frac{\text{عددعناصر } A \cup B}{\text{عددعناصر } w} = \frac{6}{9}$$

بطريقة اخرى لحساب $P(A \cap B)$

$$P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B)$$
$$P(A \cap B) = \frac{4}{9} + \frac{3}{9} - \frac{6}{9} = \frac{7-6}{9} = \frac{1}{9}$$

نحسبو $P_A(B)$ اذا كـــــــانت عندك $P(A)$ و $P(A \cap B)$ نقـــولولك بصحتك ديرت لافـــير هاوليك القانون

$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

$$P_A(B) = \frac{\frac{1}{9}}{\frac{4}{9}} = \frac{1}{9} \cdot \frac{9}{4} = \frac{1}{4}$$

كوايح لي لازم تعرفهـــــــــ

5.القائمة:

هذا هو القـــــانون n^p

مثال صندوق به 9 كريات نسحب منه ثلاث كريات و بإرجاع الكرية المسحوبة إلى الصندوق الحل هو عدد الكريات في الصندوق أس ثلاثة

$$9^3 = 729$$

6.لعفايس تاع الأسئلة:

أ.الجمعيـــــــات:

كي يقلك جمعية مكونة من مدير ومراقب وووو وساعات ميذكرلكش الوظيفة شوف بواه تخدم

إذا ذكر وظيفة الأشخاص اخـــدم بالترتيبة A_n^p

إذا لم يذكر الوظيفة اخـــدم بالتوفيقة C_n^p

ب.السـحب:

لـــدينا n كرية و نســـحب p كرية

كي يقلك نسحب في آن واحد ولا نسحب ونرجع ولا نسحب و منرجعش شوف بواه تخدم

إذا قالك نسحب في آن واحد تخدمو بالتوفيقة C_n^p

إذا قالك نسحب على التوالي و بدون إرجاع هنا تخدمـــــــو بالترتيبة A_n^p

إذا قالك نسحب على التوالي بالإرجاع هنـــا تخدمـــــــو بالقائمة n^p

7.كيفاه تحسب بالآلة الحاسبة:

كاين رمز $X!$ يقصد به العاملي تروحلو بـــ SHIFT كاين خانة مكتوب عليها ncr هذيـــك معناها التوفيقة باه تحسب مثلا C_5^2 شـــوف واش دير كليكي على 5 ومنبعد ncr ومنبعد كليكي على 2 كاين خانة مكتوب عليها npr تروحلها SHIFT هي نفس الخانة تاع ncr هذيك معناها الترتيبة باه تحسب مثلا A_5^2 شوف واش دير كليكي على 5 ومنبعد SHIFT ومنبـــعد ncr و كليكي على 2 كاين نوع تلقى الرمز ncr و npr في خانة × و ÷ عارفكم هاربين في الآلة الحاسبة أكيد فهمتوني

8.تمرين بسيط وشامل :

صندوق به 12 كرية 5 حمراء و3 صفراء و4 سوداء نسحب 3 كريات في آن واحد

- ماهو عدد السحبات الممكنة
- ماهو احتمال ظهور 3 كريات حمـــــراء فقط
- ماهو احتمال ظهور كرية سوداء واحـــــدة عـــــــــلى الأقل
- ماهو احتمال ظهور كريتين صفراء على الأكثر
- ماهو احتمال ظهور كريتين حمراء وكرية سوداء

ليكن X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل سحبـــــة عددالكريـــــــــــــــات الحمراء

- حدد القيم التي يأخذها X
- حدد قانون الاحتمال
- احسب الأمل الرياضي
- احسب التباين
- احسب الانحراف المعياري

الإجـــــابة

أول حاجة تخدمو بالتوفيقة C_n^p على خاطر قالك نســـــــحب في آن واحد

السحبات الممكنة هو من 12 نهزو 3 يعـــني

$$C_{12}^3 = 220$$

- احتمال ظهور 3 كرات حمراء فقط يعني من 5 نهزو 3 يعني $C_5^3 = 10$ ونقسمهم على الحالات الممـــكنة $P(A) = \frac{10}{220}$

- احتمال ظهور كرية سوداء واحدة على الأقل يعـني واحدة أو اثنان أو ثلاث

mohammed aboub

شوف كي تلقى او يعني الجمع

كي تلقى و يعني الضرب

C_4^1 يعني من 4 سوداء نهزو واحدة و نكملو من 8 لخرين لي بقاو نكملو زوج يعني C_8^2 نستعملو الضرب

شوف الخدمة لي نديروها سا!!!

معناه لي غلط في قيمة الأمل الرياضي نقولولو عظم الله أجرك وربي يعوضهالك في الفلسفـــة

9.تمرين ثاني ابسط من الأول :

صندوق به 12 كرية 5 حمراء و3 صفراء و4 سوداء نسحب 3 كريات على التوالي بدون إرجاع

- ماهو عدد السحبات الممكنة
- ماهو احتمال ظهور 3 كريات حمراء فقط
- ماهو احتمال ظهور كرية سوداء على الأقل
- ماهو احتمال ظهور كريتين صفراء على الأكثر

الإجـــــابة

نفس الخدمة نتاع مقبيل غير نخدمو بالترتيبة

عدد السحبات الممكنة $A_{12}^{3} = 1320$

$$P(A) = \frac{A_5^3}{1320} = \frac{60}{1320}$$

$$P(B) = \frac{3A_4^1A_8^2+3A_4^2A_8^1+A_4^3A_8^0}{1320} = \frac{984}{1320}$$

$$P(C) = \frac{3A_3^2A_9^1+3A_3^1A_9^2+A_3^0A_9^3}{1320} = \frac{1314}{1320}$$

10.دستور ثنـــــائي الحد :

اسمو كبر منو متخافش غير قـــانون برك

$$(a+b)^n = \sum_{P=0}^{P=n} C_n^p a^{n-p} b^p$$

$$(a+b)^n = C_n^0 a^{n-0} b^0 + C_n^1 a^{n-1} b^1 + C_n^2 a^{n-2} b^2 \dots + C_n^n a^{n-n} b^n$$

نديرو مثال باه تفهموني مليح مليح هيا تبـع معايا

$$(a+b)^3 = C_3^0 a^{3-0} b^0 + C_3^1 a^{3-1} b^1 + C_3^2 a^{3-2} b^2 + C_3^3 a^{3-3} b^3$$

يعني n تبقى تساوي 3 وأما P قيمتها تتغير من 0 إلى 3 عاود شوف القـــــانون دوك تفهم

$$(a+b)^3 = 1a^3 1 + 3a^2b^1 + 3a^1b^2 + 1a^0b^3$$
$$= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

11.شجرة الاحتمـــــال:

مع احتراماتي للشجر هذه أسمط شجرة الهم عمتي الشجرة تقولكم كي نسحبو عشـــوائيا بإرجاع ولا بدون إرجاع الحاجة المسحـــــــوبة

هههههه تبع معايا نعطيكم مثال... ابتسم

نديرو مثال أحسن باه تفهموني قـــــولو بسم الله

المثال الأول

صندوق به 7 كريات منها 4 حمراء و3ســـوداء نسحب عشوائيا كرية نسجل لونها ثم نعيدها إلى الصندوق ثم نسحب مرة أخرى كرية ونسجل لونها حاب يقول نسحب كريتان بإرجاع الكرية المسحوبة

الأسئلة

- أنشئ شجرة الاحتمالات
- ماهو احتمال الحصول على كريتين حمراوين
- ماهو احتمال الحصول على كريتين سوداوين
- ماهو احتمال الحصـــــــــول على كريتين مختلفتين في اللـــــــــــــون

الاجابة

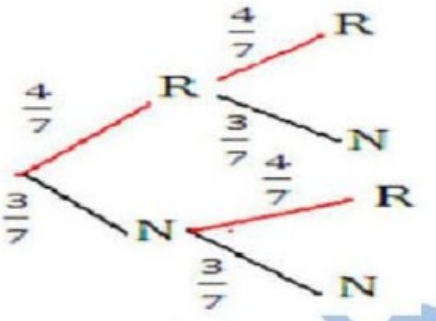
شوف معايا أنت كي تسحب مرتين وترجع الكرية المسحوبة معنـــــاه العدد تاعهم يبقى نفسو نرمزو للكرية الحمراء R والسوداء N

$\frac{3}{7}$ نقصدو بيها 3 كريات سوداء من العدد الكلي 7

$\frac{4}{7}$ نقصدو بيها 4 كريات حمراء من العـــدد الكلي 7

شوف معايا كي تسحب الأولى ممـــكن تكون حمراء ولا سوداء يعني إما $\frac{3}{7}$ او $\frac{4}{7}$ كي تريد تسحب الثانية يعني تكون أنت رجعت الأولى يعني يبقى العـــدد نفسو معناه الثانية قد تكون $\frac{3}{7}$ او $\frac{4}{7}$

mohammedaboub



باه تعرف روحك صحيح كي تجمع زوج أغصان احمر مع اسود يجيك الناتج واحد يعني $\frac{3}{7}+\frac{4}{7}=1$

- ماهو احتمال حصـــــول على كريتين حمراوين او احتمال حصول على سوداوين يعني إما الزوج حمورة ولا الزوج سوداء مثلا كي شغل تقول الأولى حمراء و الثانية حمراء نديرو الضرب نتبعو الغصن لي فيه R

اذا كانو زوج حمراء R——R

$$P(R)=\frac{4}{7}.\frac{4}{7}=\frac{16}{49}$$

اذا كانو زوج سوداء N——N

$$P(N)=\frac{3}{7}.\frac{3}{7}=\frac{9}{49}$$

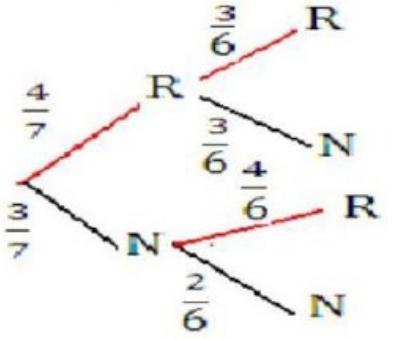
- ماهو احتمال حصـول على كريتين مختلفتين في اللـون نشوفو الاغصان وين تكون R مع N يعني إما الأولى حمراء والثانية سوداء او الاولى سوداء والثانية حمراء يعني أجمع R——N N——R

$$P(B)=\frac{3}{7}.\frac{4}{7}+\frac{4}{7}.\frac{3}{7}=\frac{24}{49}$$

تحقق من أحساب باستخدام القـــــائمة n^p

المثال الثاني

نفس الاسئلة بصح نسحب كريتان بـــدون ارجاع الكرية المسحوبة شوف يعني اذا كـــانت الاولى سوداء ففي السحبة الثانية يكونو ناقصـين كرية وحدة سوداء واذا كانت الأولى حمراء يعـــني في السحبة الثانية يكونو ناقصين حمورة وحـــدة على خاطر تسحب وماترجعش معناه يبـــقو 3 كي ماترجعش الكرية المسحوبة يعني الصندوق في السحبة الاولى يكونو فيه 7وفي السحبة الثانية يكونو فيـــه 6 ياااااااو راك مترجعش لمسحوبة



نفس طريقـــــــــــــــــــــة الإجابة

اذا كانو زوج حمراء

$$P(R)=\frac{4}{7}.\frac{3}{6}=\frac{12}{42}$$

واذا كانو زوج سوداء

$$P(N)=\frac{3}{7}.\frac{2}{6}=\frac{6}{42}$$

اذا كانو مختلفين في اللون

$$P(B)=\frac{4}{7}.\frac{3}{6}+\frac{3}{7}.\frac{4}{6}=\frac{24}{42}$$

تحقق من أحساب باستخدام الترتـــــيبة A_n^p

....كان فهمتني مليح وجد الشحشوحة....

وعرضني متنسـانيش

😍😍😍😍

.....

الثقة بالنفس بعد التـــــوكل على الله مطلوبة شرعا ، فالمسلم يتعين عليه أن يحسن الظن بالله تعـــــــــالى وأن يتفاءل لنفسه أخير والنجـــــاح دائماً ويسعى باستمرار في سبيـــــل الارتقاء لتحصيل الكمـــــــــال

mohammed aboub

مادة الريـــــاضيات بكالوريا 2020

الاحتمالات

خاص بالشعب العلمية

حصيلة ختامية شاملة

الاحتمالات تحت المجهر

من إعداد الأستاذ : توامي عمر

... في قاموس النّاجحين :

هاءُ الهَزِيمةِ تُنطقُ عَيناً

https://www.facebook.com/okba.bac.2010

★ الاحتمالات ★

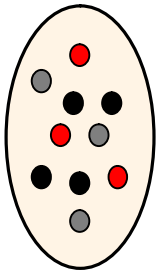
احتمال الحادثة A	$P(A)=\dfrac{\text{عدد الحالات الملائمة}}{\text{عدد الحالات الممكنة (الكلية)}}$
احتمال الحادثة العكسية $\overline{A}$	$P(\overline{A})=1-P(A)$
الاحتمال الشرطي (A علماً B)	$P_B(A)=\dfrac{P(A\cap B)}{P(B)}$
الحوادث المستقلة	$P(A\cap B)=P(A)\times P(B)$

① أنواع السحب

توجد ثلاث أنواع من السحب و هي :

❶ السحب في آن واحد ❷ السحب على التوالي و بإرجاع ❸ السحب على التوالي و بدون إرجاع

– ما هو عدد طرق لسحب p كرة من كيس يحتوي على n كرة ($n\geq 2$) ؟



n كرة

سحب p كرة

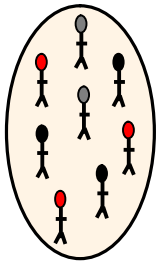
- على التوالي و بإرجاع : n^p — الترتيب مهم، يسمح التكرار، لا شرط على n و p
- على التوالي دون إرجاع : $A_n^p=\dfrac{n!}{(n-p)!}$ — الترتيب مهم، لا يسمح التكرار، $n\geq p$
- في آن واحد : $C_n^p=\dfrac{n!}{p!(n-p)!}$ — الترتيب غير مهم، $n\geq p$

② اللجان (الجمعيات)

عند تكوين لجنة معينة أو جمعية من عدة أشخاص ، يجب معرفة أمرين أساسيان ، هما :

❶ ذكر وظيفة الأشخاص في اللجنة ❷ عدم ذكر وظيفة الأشخاص في اللجنة .

– ما هو عدد طرق لتكوين لجنة تتألف من p شخص من بين مجموعة ذات n شخص مع ($n\geq 2$) ؟



n شخص

اختيار p شخص

- مع ذكر وظيفة كل شخص : $A_n^p=\dfrac{n!}{(n-p)!}$ — الترتيب مهم، لا يسمح التكرار، $n\geq p$
- عدم ذكر وظيفة كل شخص : $C_n^p=\dfrac{n!}{p!(n-p)!}$ — الترتيب غير مهم، $n\geq p$

③ عدد طرق لإجراء تجربة

عند إجراء تجربة معينة بـ n_1 طريقة (إمكانية) و تجربة أخرى بـ n_2 طريقة (إمكانية) فإن :

❶ عدد طرق إجراء التجربتين معاً (التجربة الأولى و الثانية) هو الجداء : $n_1\times n_2$.

❷ عدد طرق إجراء إحدى التجربتين فقط (التجربة الأولى أو الثانية) هو المجموع : n_1+n_2 .

مادة الريـــــاضيات بكالوريا 2020

الاحتمالات

خاص بالشعب العلمية

الهدية الختامية الممتازة

من دولة المغرب الشقيق

من إعداد الأستاذ : مرابطي سفيان

... في قاموس النّاجحين :

هاءُ الهَزِيمةِ تُنطقُ عَيناً

https://www.facebook.com/okba.bac.2010

الإحتمـــــــــــال

I) الوضعيات العشوائية:

1- تعريف:

- إذا رمينا قطعة نقود في الهواء فإننا لا نعلم مسبقا هل ستعين وجها أم ظهرا.
- إذا رمينا نردا مكعبا فإننا لا نعلم مسبقا الرقم الذي سيعينه.
- إن مثل هذه الوضعيات تسمى وضعيات عشوائية.

2- أمثلة:

مثال (1):

نرمي قطعة نقود في الفضاء. هناك حالتان: إما أن نحصل على P أو F.

المجموعة: $\Omega=\{P,F\}$ المكونة من جميع الإمكانيات تسمى كون الإمكانيات. وكل عنصر من Ω يسمى إمكانية.

مثال (2):

صندوق يحتوي على 4 كرات تحمل الأرقام 1، 2، 3، 4 نسحب عشوائيا وفي آن واحد كرتين من الصندوق.

- ليكن Ω كون الإمكانيات:

لتكن $U=\{1,2,3,4\}$ المجموعة المكونة من الكرات.

كل إمكانية هي عبارة عن تأليفة لعنصرين من بين 4 عناصر المجموعة U. إذن:

$$card\Omega=C_4^2=\frac{4.3}{2.1}=6$$

ولدينا:

$$\Omega=\{\{1,2\},\{1,3\},\{1,4\},\{2,3\},\{2,4\},\{3,4\}\}$$

الإمكانية $\{2,3\}$ تحقق الحدث: "الحصول على كرتين مجموعهما يساوي 5 ".

والإمكانية $\{1,4\}$ كذلك.

المجموعة: $A=\{\{1,4\},\{2,3\}\}$ تسمى حدثا.

ونقول: ليكن A الحدث: " الحصول على مجموع يساوي 5 ".

3- مصطلحات:

نربط كل وضعية عشوائية بالمجموعة Ω المكونة من جميع الحالات الممكنة.

1- Ω تسمى كون الإمكانيات.

2- كل عنصر من Ω يسمى إمكانية.

3- كل جزء A من Ω يسمى حدثا. وبالتالي ستكون $P(\Omega)$ هي مجموعة الأحداث.

4- الحدث $\varnothing$ يسمى الحدث المستحيل.

5- الحدث Ω يسمى الحدث الأكيد.

6- الأحداث المكونة من إمكانية تسمى الأحداث الابتدائية.

7- ليكن A و B حدثين

- الحدث $A\cap B$ يسمى الحدث A و B.
- الحدث $A\cup B$ يسمى الحدث A أو B.
- نقول إن الحدثين A و B غير منسجمين إذا كان وفقط إذا كان $A\cap B=\varnothing$.

II) الفضاءات الاحتمالية المنتهية:

1- مثال:

نرمي نردا مكعبا وجوهه الستة مرقمة من 1 إلى 6.

كون الإمكانيات: $\Omega=\{1,2,3,4,5,6\}$

- لدينا حظ واحد على 6 للحصول على الرقم 1.

نقول إن احتمال الحصول على 1 هو $\frac{1}{6}$ أو احتمال الحدث A "الحصول على 1 " هو $p(A)=\frac{1}{6}$.

- احتمال الاحداث الابتدائية هو:

$$i\in\{1,2,3,...,6\};\ p(\{i\})=\frac{1}{6}$$

2- تعريف:

نعتبر المجموعة: $\Omega=\{a_1,a_2,...,a_n\}$ (كون الإمكانيات)

نقول إننا قد عرفنا احتمالا p على Ω إذا ربطنا كل عنصر a_i بعدد حقيقي p_i بحيث $0\le p_i\le 1$ و $\sum_{i=1}^{n}p_i=1$

ونكتب: $p(a_i)=p(\{a_i\})=p_i$

- الزوج (Ω,p) يسمى فضاءا احتماليا منتهيا.

3- احتمال حدث:

ليكن (Ω,p) فضاءا احتماليا منتهيا وليكن A حدثا.

احتمال الحدث A هو مجموع احتمالات الأحداث الابتدائية التي تكونه.

يعني: إذا كان: $A=\{a_1,a_2,...,a_n\}$

فإن: $p(A)=p(a_1)+p(a_2)+...+p(a_n)$

ملاحظة:

ليكن (Ω,p) فضاءا احتماليا منتهيا.

1- ليكن A حدثا. لدينا $0\le p(A)\le 1$.

2- $p(\varnothing)=0$

3- $p(\Omega)=1$

أمثلة:

مثال 1: نعتبر $\Omega=\{P,F\}$

- نعتبر الاحتمال p_1 المعرف بما يلي:

$$p_1(P)=\frac{1}{2},\ p_1(F)=\frac{1}{2}.$$

- نعتبر الاحتمال p_2 المعرف بما يلي:

$$p_2(P)=\frac{2}{3},\ p_2(F)=\frac{1}{3}$$

تمرين:

نرمي نردا وجوهه مرقمة من 1 إلى 6 ومغشوش.
بحيث الوجوه التي تحمل رقما زوجيا لها نفس الاحتمال.
والوجوه التي تحمل رقما فرديا لها نفس الاحتمال.
واحتمال الحصول على رقم زوجي يضاعف احتمال الحصول على رقم فردي.

1- احسب احتمال الحصول على رقم زوجي.
2- احسب احتمال الحصول على مضاعف ل 3.
3- احسب احتمال الحصول على رقم فردي.

ليكن Ω كون الإمكانيات: $\Omega=\{1,2,3,4,5,6\}$

لنحسب احتمال الاحداث الابتدائية.

لدينا $p(2)=p(4)=p(6)=x$

و $p(1)=p(3)=p(5)=y$

ولدينا: $x=2y$

ونعلم أن:

$$p(1)+p(2)+p(3)+p(4)+p(5)+p(6)=1$$

يعني $3y+3x=1$

يعني $3y+6y=1$

$9y=1$

إذن $y=\frac{1}{9}$ و $x=\frac{2}{9}$

إذن: $p(1)=p(3)=p(5)=\frac{1}{9}$

$p(2)=p(4)=p(6)=\frac{2}{9}$

1- ليكن A الحدث " الحصول على رقم زوجي ".

لدينا: $A=\{2,4,6\}$

إذن $p(A)=p(2)+p(4)+p(6)=\frac{6}{9}=\frac{2}{3}$

2- ليكن B الحدث " الحصول على مضاعف ل 3 ".

لدينا $B=\{3,6\}$

إذن $p(B)=p(3)+p(6)=\frac{1}{3}$

3- ليكن C الحدث " الحصول على رقم فردي ".

لدينا $C=\{1,3,5\}$

إذن: $p(C)=p(1)+p(3)+p(5)=\frac{3}{9}=\frac{1}{3}$

4- خاصيات:

ليكن (Ω,p) فضاءا احتماليا منتهيا.

خاصية (1):

ليكن A و B حدثين بحيث $A\cap B=\varnothing$

لدينا: $p(A\cup B)=p(A)+p(B)$

برهان:

نضع $A=\{a_1,a_2,...,a_n\}$

و $B=\{b_1,b_2,...,b_n\}$

لدينا: $A\cap B=\varnothing$ إذن $a_i\neq b_j$

إذن: $A\cup B=\{a_1,a_2,...,a_n,b_1,b_2,...,b_n\}$

إذن

$$p(A\cup B)=p(a_1)+...+p(a_n)+p(b_1)+...+p(b_n)$$
$$=p(A)+p(B)$$

ملاحظة:

- لتكن $A_1,A_2,...,A_n$ احداثا منفصلة مثنى مثنى.

يعني: $\forall i\neq j\quad A_i\cap A_j=\varnothing$

لدينا: $p\left(\bigcup_{i=1}^{n}A_i\right)=\sum_{i=1}^{n}p(A_i)$

خاصية (2):

ليكن A و B حدثين.

لدينا $p(A\cup B)=p(A)+p(B)-p(A\cap B)$

برهان:

لدينا $A\cup B=A\cup(B-A)$

ولدينا $A\cap(B-A)=\varnothing$

إذن: $p(A\cup B)=p(A\cup(B-A))$

$p(A\cup B)=p(A)+p(B-A)$

ولدينا:

$B=(A\cap B)\cap(B-A)$

و $(A\cap B)\cap(B-A)=\varnothing$

إذن $p(B)=p((A\cap B)\cup(B-A))$

$=p(A\cap B)+p(B-A)$

إذن $p(B-A)=p(B)-p(A\cap B)$

ومنه: $p(A\cup B)=p(A)+p(B)-p(A\cap B)$

خاصية (3):

ليكن A حدثا. و $\bar{A}$ الحدث المضاد ل A.

لدينا: $p(\bar{A})=1-p(A)$

برهان:

لدينا $A\cup\bar{A}=\Omega$ و $A\cap\bar{A}=\varnothing$

إذن $p(A\cup\bar{A})=p(\Omega)$

يعني $p(A)+p(\bar{A})=1$

إذن $p(\bar{A})=1-p(A)$

خاصية (4):

ليكن A و B حدثين.

إذا كان $A\subset B$ فإن $p(A)\leq p(B)$

5- فرضية تساوي الاحتمالات:

a) تعريف:

ليكن (Ω, p) فضاءا احتماليا منتهيا.
نقول إن هذا الفضاء يحقق فرضية تساوي الاحتمالات إذا وفقط إذا كان لكل الإمكانيات نفس الاحتمال.
ليكن (Ω, p) فضاءا احتماليا يحقق فرضية تساوي الاحتمالات

*) نضع: $Card\Omega = n; \Omega = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$

لنحسب احتمال الاحداث الابتدائية:

لدينا: $p(a_1) = p(a_2) = ... = p(a_n) = x$

ولدينا: $p(a_1) + p(a_2) + ... + p(a_n) = 1$

يعني: $\underbrace{x + x + ... + x}_{\text{n مرة}} = 1$

يعني $nx = 1$

يعني $x = \frac{1}{n}$

أي $x = \frac{1}{card\Omega}$

إذن: $\forall i \in \{1, 2, ..., n\} \quad p(a_i) = \frac{1}{card\Omega}$

*) ليكن A حدثا بحيث $CardA = q$

لدينا A يحتوي على q إمكانية. ولدينا $p(A)$ هو مجموع احتمالات هذه الإمكانيات.

وهذه الإمكانيات لها نفس الاحتمال $\frac{1}{n}$

إذن $p(A) = \underbrace{\frac{1}{n} + \frac{1}{n} + ... + \frac{1}{n}}_{\text{q مرة}}$

إذن $p(A) = q.\frac{1}{n}$

$$p(A) = \frac{cardA}{card\Omega}$$

خاصية:

ليكن (Ω, p) فضاءا احتماليا منتهيا يحقق فرضية تساوي الاحتمالات.

*) احتمال الاحداث الابتدائية هو $\frac{1}{Card\Omega}$

*) إذا كان A حدثا فإن: $p(A) = \frac{CardA}{Card\Omega}$.

ملاحظة:

*) عناصر Ω تسمى الحالات الممكنة.

*) عناصر A تسمى الحالات المرغوب فيها.

$$p(a) = \frac{\text{عدد الحالات المرغوب فيها}}{\text{عدد الحالات الممكنة}}$$

*) إن فرضية تساوي الاحتمالات يمكن أن تظهر في النص بعبارة صحيحة أو بطريقة غير مباشرة. مثلا: نرمي نرد مغشوش صندوق يحتوي على كرات لا يمكن التمييز بينها باللمس...

تمارين تطبيقية:

تمرين1

صندوق يحتوي على 5 بيضاء تحمل الأرقام 1, 2, 3, 4, 5 و 3 كرات سوداء تحمل الأرقام 1, 2, 3.
وكرتان حمراوان تحملان الرقم 1, 2.
نسحب تآنيا وعشوائيا 3 كرات من الصندوق (الكرات لا يمكن التمييز بينها باللمس).
احسب احتمال الحصول على:

1) 3 كرات بيضاء.
2) 3 كرات من نفس اللون.
3) كرة واحدة بالضبط تحمل رقما فرديا.
4) كرة واحدة على الأقل تحمل رقما زوجيا.
5) كرة واحدة على الأكثر بيضاء.
6) 3 كرات تحمل أرقاما مجموعها زوجي.
7) 3 كرات من نفس اللون وتحمل أرقاما مجموعها فردي.
8) 3 كرات مختلفة الألوان مثنى مثنى.
9) لونين بالضبط.

ليكن Ω كون الإمكانيات.
كل إمكانية هي عبارة عن تأليفة ل 3 عناصر من بين 10 عناصر المجموعة U:

$$U = \{B_1, B_2, B_3, B_4, B_5, N_1, N_2, N_3, R_1, R_2\}$$

إذن: $Card\Omega = C_{10}^3 = \frac{10.9.8}{3.2} = 120$

1) ليكن A الحدث: " الحصول على 3 كرات بيضاء ".
كل إمكانية من A هي عبارة عن تأليفة ل 3 عناصر من بين عناصر المجموعة: $\{B_1, B_2, B_3, B_4, B_5\}$

إذن: $CardA = C_5^3 = \frac{5.4.3}{3.2} = 10$

إذن: $p(A) = \frac{CardA}{Card\Omega} = \frac{10}{120} = \frac{1}{12}$

2) ليكن B الحدث: " الحصول على 3 كرات من نفس اللون "
الحدث B يعني الحصول على $3B$ أو $3N$

إذن $CardB = C_5^3 + C_3^3 = 10 + 1 = 11$

إذن $p(B) = \frac{CardB}{Card\Omega} = \frac{11}{120}$

3) ليكن C الحدث: " كرة واحدة بالضبط تحمل رقما فرديا "
الحدث C يعني الحصول على $3I$ و $2P$
إذن:

$$CardC = C_6^1.C_4^2 = 6.6 = 36$$

إذن:

$$p(C) = \frac{CardC}{Card\Omega} = \frac{36}{120} = \frac{3}{10}$$

4) ليكن D الحدث: " كرة واحدة على الأقل تحمل رقما زوجيا "

الحدث D يعني الحصول على: $(1I\ ;\ 2P)$ أو $(2I\ ;\ 1P)$ أو $3P$.

$$CardD = C_4^2.C_6^1 + C_4^1.C_6^2 + C_4^3$$

إذن $= \frac{4.3}{2}.6 + 4.\frac{6.5}{2} + 4$

$$CardD = 100$$

إذن $p(D) = \frac{CardD}{Card\Omega} = \frac{100}{120} = \frac{5}{6}$

طريقة 2: ليكن $\bar{D}$ الحدث المضاد ل D

الحدث $\bar{D}$ يعني الحصول على $3I$

$$Card\bar{D} = C_6^3 = 20$$

إذن: $p(\bar{D}) = \frac{20}{120} = \frac{1}{6}$

إذن $p(D) 1 - p(\bar{D}) = \frac{5}{6}$

5) ليكن E الحدث " كرة واحدة على الأكثر بيضاء "

الحدث E يعني الحصول $(1B\ ;\ 2\bar{B})$ أو $3\bar{B}$

إذن: $CardE = C_5^1.C_5^2 + C_5^3$

$= 5.10 + 10 = 60$

إذن $p(E) = \frac{CardE}{Card\Omega} = \frac{60}{120} = \frac{1}{2}$

6) ليكن F الحدث " 3 كرات تحمل أرقاما مجموعها زوجي "

الحدث F يعني الحصول على $3P$ أو $(1P\ ;\ 1B_I)$

إذن $p(F) = \frac{CardF}{Card\Omega} = \frac{64}{120} = \frac{8}{15}$

7) ليكن G الحدث " 3 كرات من نفس اللون أرقامها مجموعها فردي "

الحدث G يعني الحصول على $3B_I$ أو $(2B_p\ ;\ 1B_I)$

إذن: $CardG = C_3^3 + C_3^1.C_2^2 = 4$

إذن $p(G) = \frac{CardG}{Card\Omega} = \frac{4}{120} = \frac{1}{30}$.

8) ليكن H الحدث " 3 كرات مختلفة الألوان مثنى مثنى ".

الحدث H يعني الحصول على $\{1R, 1N, 1B\}$

إذن: $CardH = C_5^1 + C_3^1.C_2^1 = 30$

إذن: $p(H) = \frac{CardH}{Card\Omega} = \frac{30}{120} = \frac{1}{4}$

9) ليكن J الحدث " الحصول على لونين بالضبط "

الحدث J يعني $\{2B\ ;1\bar{B}\}$ أو $\{2N\ ,1\bar{N}\}$ أو $\{2R\ ,1\bar{R}\}$

إذن: $CardJ = C_5^2.C_5^1 + C_3^2.C_7^1 + C_2^2.C_8^1 = 79$

إذن: $p(J) = \frac{CardJ}{Card\Omega} = \frac{79}{120}$

تمرين (2):

نرمي نردين وجوه كل واحد مرقمة من 1 إلى 6 وغير مغشوشين.

احسب احتمال الحصول على:

1) رقمين متساويين.

2) رقمين مختلفين.

3) رقمين مجموعهما زوجي.

4) رقمين مجموعهما أصغر أو يساوي 6.

نرمز لكل إمكانية ب (x, y) حيث x الرقم الذي عينه الفرد الأول و y الرقم الذي عينه الفرد الثاني. ليكن Ω كون الإمكانيات. كل إمكانية هي عبارة عن ترتيبة بتكرار لعنصرين من بين 6 عناصر E : $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

إذن: $Card\Omega = 6^2 = 36$

1) ليكن A الحدث " الحصول على رقمين متساويين ".

ليدنا: $A = \{(1,1), (2,2), (3,3), (4,4), (5,5), (6,6)\}$

إذن $CardA = 6$

ومنه: $p(A) = \frac{CardA}{Card\Omega} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$

2) ليكن B الحدث " الحصول على رقمين مختلفين. "

ليكن $\bar{B}$ الحدث المضاد ل B

لدينا $\bar{B} = A$ إذن $p(\bar{B}) = p(A)$

إذن

$$p(B) = 1 - p(\bar{B})$$
$$= 1 - p(A)$$

$$p(B) = 1 - p(A) = \frac{5}{6}$$

3) ليكن C الحدث " الحصول على رقمين مجموعهما زوجي ".

	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

من خلال الجدول لدينا $CardC = 18$

إذن: $p(C) = \frac{CardC}{Card\Omega} = \frac{18}{36} = \frac{1}{2}$

4) ليكن D الحدث " الحصول على رقمين مجموعهما أصغر أو يساوي 6 "

من خلال الجدول لدينا: $CardD = 15$

إذن $p(D) = \frac{CardD}{Card\Omega} = \frac{15}{36}$

III- الاحتمال الشرطي:

1) مثال:

نرمي نردين غير مغشوشين: A و B. وجوه كل واحد منهما مرقمة من 1 إلى 6.

ليكن Ω كون الإمكانيات.

لدينا: $\Omega = E\times E \ / \ E=\{1,2,3,4,5,6\}$

$Card\Omega = 36$

ليكن B الحدث: " الحصول على مجموع أكبر أو يساوي 10 "

لدينا: $B=\{(4,6),(5,5),(5,6),(6,4),(6,5),(6,6)\}$

إذن: $p(B)=\dfrac{CardB}{Card\Omega}=\dfrac{6}{36}=\dfrac{1}{6}$

نفترض أننا قد علمنا أن النرد A قد عين الرقم 6.

أمام هذا الخبر تصبح الحالات الممكنة:

$\{(6,1),(6,2),(6,3),(6,4),(6,5),(6,6)\}$

والحالات المرغوب فيها:

$\{(6,4),(6,5),(6,6)\}$

إذن احتمال B يصبح:

$$p(B)=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$$

هذا الاحتمال يسمى احتمال الحدث B علما أن الحدث A قد تحقق حيث A هو الحدث " النرد A عين رقم 6 ".

ونرمز له ب $p(B/A)$ أو $P_1(B)$

إذن $P_1(B)=\dfrac{1}{2}$

ملاحظة:

$$p(B/A)=\frac{3}{6}=\frac{3/36}{6/36}$$

$$=\frac{\dfrac{Card(A\cap B)}{Card\Omega}}{\dfrac{CardA}{Card\Omega}}=\frac{P(A\cap B)}{p(A)}$$

إذن $p(B/A)=\dfrac{p(A\cap B)}{p(A)}$

2) تعريف:

ليكن (Ω,p) فضاءا احتماليا منتهيا.

ليكن A و B حدثين بحيث $A\neq B$

نسمي احتمال الحدث B علما أن الحدث A محقق العدد الذي نرمز له ب $p(B/A)$ أو $p_A(B)$ والمعرف بما يلي:

$$p(B/A)=\frac{p(A\cap B)}{p(A)}$$

ملاحظة:

إذا كانت لدينا فرضية تساوي الاحتمالات فإن:

$$p(B/A)=\frac{Card(A\cap B)}{CardA}$$

تمارين تطبيقية:

تمرين (1):

صندوق يحتوي على 6 كرات حمراء تحمل الأرقام 0, 0, 1, 1, 1, 1 و 8 كرات بيضاء: 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 1.

نسحب تآنيا كرتين من الصندوق

1) إذا كانت الكرتان المسحوبتان تحملان الرقم 1، فما هو الاحتمال لكي تكونا بيضاوين؟

2) احسب احتمال الحصول على كرتين تحملان نفس اللون علما أنهما تحملان الرقم 1.

ليكن Ω كون الإمكانيات. لدينا:

$$Card\Omega=C_{14}^2=\frac{14\times13}{2}=91$$

1) ليكن A الحدث " الحصول على كرتين تحملان الرقم 1 "

وليكن B الحدث " الحصول على كرتين بيضاوين ".

الاحتمال المطلوب هو $p(B/A)$

لدينا: $p(B/A)=\dfrac{p(B\cap A)}{p(A)}$

ولدينا $CardA=C_9^2=36$

إذن: $p(A)=\dfrac{36}{91}$

الحدث $A\cap B$ يعني الحصول على $2B$ وتحملان الرقم 1.

إذن $Card(A\cap B)=C_5^2=10$

إذن $p(A\cap B)=\dfrac{10}{91}$

ومنه: $p(B/A)=\dfrac{\frac{10}{91}}{\frac{36}{91}}=\dfrac{10}{36}=\dfrac{5}{18}$

$$p(B/A)=\frac{5}{18}$$

2) ليكن C الحدث " الحصول على كرتين من نفس اللون "

الاحتمال المطلوب هو $p(C/A)$

$$p(C/A)=\frac{p(A\cap C)}{p(A)}$$

لدينا $p(A)=\dfrac{36}{91}$

الحدث $A\cap C$ يعني الحصول على كرتين من نفس اللون وتحملان الرقم 1. يعني الحصول على $2B_1$ أو $2R_1$

إذن: $Card(A\cap C)=C_5^2+C_4^2=10+6=16$

إذن $p(A\cap C)=\dfrac{16}{91}$

ومنه: $p(C/A)=\frac{p(A\cap C)}{p(A)}=\frac{16}{36}=\frac{4}{9}$

تمرين (2):

عائلة لها طفلان.

1) ما هو الاحتمال لكي يكون الطفلان ذكرين علما أن أكبرهما ذكر؟

2) ما هو الاحتمال لكي يكون الطفلان ذكرين علما أن أحدهما ذكر؟

نرمز لكل إمكانية بالزوج (x,y) حيث x الطفل الكبير و y الطفل الصغير.

ليكن Ω كون الإمكانيات. لدينا:

$$\Omega=\{(G,G);(G,F);(F,G);(F,F)\}$$

1) ليكن A الحدث " أكبر الطفلين ذكر ".

وليكن B الحدث " الطفلان ذكران ".

الاحتمال المطلوب $p(B/A)$

$$p(B/A)=\frac{p(A\cap B)}{p(A)}$$

لدينا: $A=\{(G,G),(G,F)\}$

و $A\cap B=\{(G,G)\}$

إذن $p(A)=\frac{2}{4}$ et $p(A\cap B)=\frac{1}{4}$

إذن $p(B/A)=\frac{1}{2}$

2) ليكن C الحدث " أحد الطفلين ذكر ".

الاحتمال المطلوب هو $p(B/C)$

$$p(B/C)=\frac{p(B\cap C)}{p(C)}$$

لدينا: $C=\{(G,G),(G,F),(F,G)\}$

و $B\cap C=\{(G,G)\}$

إذن $p(C)=\frac{3}{4}$ et $p(B\cap C)=\frac{1}{4}$

ومنه $p(B/C)=\frac{1}{3}$

3) صيغة الاحتمالات المركبة:

خاصية:

ليكن (Ω,p) فضاءا احتماليا منتهيا.

ليكن A و B حدثين بحيث $p(A)\neq 0$

لدينا: $p(A\cap B)=p(A).p(B/A)$

ملاحظة:

إذا كان $p(B)\neq 0$ فإن: $p(A\cap B)=p(B).p(A/B)$

تمارين تطبيقية:

تمرين (1):

صندوقان U_1 و U_2 بحيث U_1 يحتوي على $4B$ و $3R$، و U_2 يحتوي على $2B$ و $5R$.

نسحب كرتين في آن واحد من U_1 نضعهما في U_2 ثم نسحب كرتين تآنيا من U_2.

1) احسب احتمال الحصول على 4 كرات بيضاء.

2) احسب احتمال الحصول على كرة بيضاء على الأقل.

3) احسب احتمال الحصول على كرة بيضاء بالضبط.

1) ليكن A الحدث " الحصول على $2B$ في السحبة الأولى "

وليكن B الحدث " الحصول على $2B$ في السحبة الثانية ".

الاحتمال المطلوب هو $p(A\cap B)$

$$p(A\cap B)=p(A).p(B/A)$$

لدينا: $p(A)=\frac{C_4^2}{C_7^2}=\frac{2}{7}$

و $p(B/A)=\frac{C_4^2}{C_9^2}=\frac{1}{6}$

إذن: $p(A\cap B)=\frac{2}{7}.\frac{1}{6}=\frac{2}{42}=\frac{1}{21}$

ملاحظة:

يمكن تطبيق صيغة الاحتمالات المركبة بطريقة غير مباشرة بدون إبراز الحدث A و B... كما يلي:

1) ليكن A الحدث " الحصول على $4B$ ".

نرمز لكل إمكانية ب (x,y) حيث x نتيجة السحبة (1) و y نتيجة السحبة الثانية.

الحدث A يعني الحصول على $(2B,2B)$

إذن: $p(A)=\frac{C_4^2}{C_7^2}.\frac{C_4^2}{C_9^2}=\frac{2}{7}.\frac{1}{6}=\frac{1}{21}$

2) ليكن B الحدث " الحصول على بيضاء على الأقل "

ليكن $\overline{B}$ الحدث المضاد ل B.

$\overline{B}$ يعني الحصول على $(2R,2R)$

إذن: $p(\overline{B})=\frac{C_3^2}{C_7^2}.\frac{C_7^2}{C_9^2}=\frac{1}{12}$

ومنه $p(B)=1-\frac{1}{12}=\frac{11}{12}$

3) ليكن C الحدث " الحصول على كرة بيضاء بالضبط "

الحدث C يعني الحصول على $(2R,\{B,R\})$ أو $(\{R,B\},2R)$

إذن $p(C)=\frac{C_3^2}{C_7^2}.\frac{C_2^1.C_7^1}{C_9^2}+\frac{C_4^1.C_3^1}{C_7^2}.\frac{C_6^2}{C_9^2}$

$$=\frac{3}{21}.\frac{2.7}{36}+\frac{4.3}{21}.\frac{15}{36}$$

$$p(C)=\frac{1}{18}+\frac{5}{21}$$

تمرين (2):

صندوق يحتوي على $2N;3B;4R$

نسحب بتتابع وبدون إحلال 3 كرات من الصندوق.

احسب احتمال الحصول على:

1) 3 كرات بيضاء.

2) كرة بيضاء بالضبط.

3) كرة بيضاء على الأقل.

4) 3 كرات من نفس اللون.

نرمز لكل إمكانية ب (x,y,z) حيث x نتيجة السحبة (1).

y نتيجة السحبة (2) و z نتيجة السحبة (3).

1) ليكن A الحدث " الحصول على $3B$ ".

A يعني الحصول على (B,B,B).

إذن: $p(A)=\frac{3}{9}.\frac{2}{8}.\frac{1}{7}=\frac{1}{84}$.

2) ليكن B الحدث " الحصول على كرة بيضاء بالضبط ".

الحدث B يعني الحصول على $(B,\bar{B},\bar{B})$ أو $(\bar{B},B,\bar{B})$ أو $(\bar{B},\bar{B},B)$ إذن:

$$p(B)=\left(\frac{3}{9}.\frac{6}{8}.\frac{5}{7}\right)+\left(\frac{6}{9}.\frac{3}{8}.\frac{5}{7}\right)+\left(\frac{6}{9}.\frac{5}{8}.\frac{3}{7}\right)=\frac{15}{28}$$

3) ليكن C الحدث " الحصول على بيضاء على الأقل ".

ليكن $\bar{C}$ الحدث المضاد ل C.

$\bar{C}$ يعني الحصول على $(\bar{B},\bar{B},\bar{B})$.

إذن: $p(\bar{C})=\frac{6}{9}.\frac{5}{8}.\frac{4}{7}=\frac{5}{21}$

ومنه: $p(C)=1-\frac{5}{21}=\frac{16}{21}$

4) ليكن D الحدث " الحصول على 3 كرات من نفس اللون "

الحدث D يعني الحصول على (R,R,R) أو (B,B,B)

إذن: $p(D)=\left(\frac{4}{9}.\frac{3}{8}.\frac{2}{7}\right)+\left(\frac{3}{9}.\frac{2}{8}.\frac{1}{7}\right)$

$$p(D)=\frac{5}{84}$$

تعميم:

$$p(A\cap B\cap C\cap D)=p(A)\,p(B/A)\,p(C/A\cap B)\,p(D/A\cap B\cap C)$$

4) صيغة الاحتمالات الكلية:

تعريف:

ليكن (Ω,p) فضاءا احتماليا منتهيا.

نقول إن الأحداث $A_1,A_2,...,A_n$ أحداثا تكون تجزيئا ل Ω إذا وفقط إذا كان: $\bigcup_{i=1}^{n}A_i=\Omega$

و $\forall i\neq j\ \ A_i\cap A_j\neq\varnothing$

مثال:

A و $\bar{A}$ يكونان تجزيئا ل Ω.

خاصية (صيغة الاحتمالات الكلية:)

ليكن (Ω,p) فضاءا احتماليا منتهيا.

$A_1,A_2,...,A_n$ أحداثا تكون تجزيئا ل Ω

لكل حدث B لدينا:

$$p(B)=p(A_1)\,p(B/A_1)+p(A_2)\,p(B/A_2)+...+p(A_n)\,p(B/A_n)$$
$$=\sum_{i=1}^{n}p(A_i)\,p(B/A_i)$$

برهان:

لدينا $B\subset\Omega$

إذن $B=B\cap\Omega$

$$=B\cap(A_1\cup A_2\cup...\cup A_n)$$
$$=(B\cap A_1)\cup(B\cap A_2)\cup...\cup(B\cap A_n)$$

ولدينا

$$\forall i\neq j\ \ (B\cap A_i)\cap(B\cap A_j)=\varnothing$$

لأن $(B\cap A_i)\subset A_i$

و $A_i\cap A_j\neq\varnothing$ و $B(A_i\cap A_j)$

إذن:

$$p(B)=p(A_1\cap B)+p(A_2\cap B)+...+p(A_n\cap B)$$
$$=p(A_1)\,p(B/A_1)+p(A_2)\,p(B/A_2)+...+p(A_n)\,p(B/A_n)$$

تمارين تطبيقية:

تمرين (1):

نعتبر 3 صناديق U_1,U_2,U_3 بحيث U_1 يحتوي على $2B$ و $3N$ U_2 يحتوي على $3B$ و $4N$ و U_3 يحتوي على $5B$ و $3N$.

نختار عشوائيا صندوقا من بين الصناديق الثلاثة، ونسحب منه تآنيا كرتين.

1) احسب احتمال الحصول على كرتين بيضاوين.

2) إذا علمنا أن الكرتين المسحوبتين من نفس اللون، فما هو الاحتمال لكي تكونا مسحوبتين من U_3؟

الحل

1) ليكن A الحدث " الحصول على كرتين بيضاوين "

ليكن A_i الحدث " اختيار الصندوق U_i " $i\in\{1,2,3\}$

لدينا: $p(A_i)=\frac{1}{3}$

لدينا الأحداث A_3, A_2, A_1 تكون تجزيئا ل Ω. إذن حسب صيغة الاحتمالات الكلية لدينا:

$$p(A)=p(A_1)p(A/A_1)+p(A_2)p(A/A_2)+p(A_3)p(A/A_3)$$

$$=\frac{1}{3}.\frac{C_2^2}{C_5^2}+\frac{1}{3}.\frac{C_3^2}{C_7^2}+\frac{1}{3}.\frac{C_5^2}{C_8^2}$$

$$p(A)=\frac{1}{5}$$

ملاحظة:

يمكن تطبيق صيغة الاحتمالات الكلية بطريقة غير مباشرة كما يلي:

نرمز لكل إمكانية بالزوج (x,y) حيث x نتيجة اختيار الصندوق و y نتيجة السحب.

ليكن A الحدث " الحصول على $2B$ ".

الحدث A يعني الحصول على $(U_1;2B)$ أو $(U_2,2B)$ أو $(U_3,2B)$.

إذن $$p(A)=\frac{1}{3}.\frac{C_2^2}{C_5^2}+\frac{1}{3}.\frac{C_3^2}{C_7^2}+\frac{1}{3}.\frac{C_5^2}{C_8^2}=\frac{1}{5}$$

2) ليكن B الحدث " الكرتان المسحوبتان من نفس اللون "

ليكن A_3 الحدث " اختيار الصندوق U_3 ".

الاحتمال المطلوب هو $p(A_3/B)$

لدينا: $$p(A_3/B)=\frac{p(A_3\cap B)}{p(B)}$$

ولدينا $(A_3\cap B)$ يعني الحصول على $(U_3,2B,2N)$

إذن: $$p(A_3\cap B)=\frac{1}{3}\left(\frac{C_5^2+C_3^2}{C_8^2}\right)=\frac{13}{84}$$

ولدينا B يعني الحصول على $(U_1,2B,2N)$ أو $(U_2,2B,2N)$ أو $(U_3,2B,2N)$.

إذن:

$$p(B)=\frac{1}{3}.\frac{C_2^2+C_3^2}{C_5^2}+\frac{1}{3}.\frac{C_3^2+C_4^2}{C_7^2}+\frac{1}{3}.\frac{C_5^2+C_3^2}{C_8^2}=\frac{307}{420}$$

ومنه: $$p(A_3/B)=\frac{65}{307}$$

تمرين (2):

صندوق يحتوي على 3 نرود. النرد A له وجهان يحملان رقما زوجيا و 4 أوجه تحمل أرقاما فردية.

النرد B له 3 أوجه تحمل رقم زوجي و3 أوجه تحمل رقم فردي.

النرد C له 5 أوجه تحمل رقم زوجي ووجه يحمل رقم فردي.

اخترنا عشوائيا أحد النرود ورميناه فإذا به يعين رقما زوجيا.

ما هو الاحتمال لكي يكون النرد الذي تم رميه هو النرد C؟

الحل

نرمز لكل إمكانية بالزوج (x,y) حيث x نتيجة اختيار النرد و y نتيجة رمي النرد.

ليكن E الحدث " الحصول على رقم زوجي ".

ليكن F الحدث " اختيار النرد C ".

الاحتمال المطلوب هو $p(F/E)$.

لدينا: $$p(F/E)=\frac{p(E\cap F)}{p(E)}$$

ولدينا $(E\cap F)$ يعني: (C,R).

إذن: $$p(E\cap F)=\frac{1}{3}.\frac{5}{6}=\frac{5}{18}$$

ولدينا E يعني (A,P) أو (B,P) أو (C,P).

إذن $$p(E)=\frac{1}{3}.\frac{2}{6}+\frac{1}{3}.\frac{3}{6}+\frac{1}{3}.\frac{5}{6}=\frac{10}{18}$$

ومنه: $$p(F/E)=\frac{1}{2}$$

5) الاستقلالية:

a) الأحداث المستقلة:

تعريف:

ليكن (Ω,p) فضاءا احتماليا منتهيا.

نقول إن الحدثين A وB مستقلين إذا وفقط إذا كان:

$$p(A\cap B)=p(A).p(B)$$

ملاحظة:

لدينا: $$p(A\cap B)=p(A).p(B)$$

يعني: $$p(A).p(B/A)=p(A).p(B)$$

يعني: $$p(B/A)=p(B)$$

ويعني كذلك:

$$p(A)=p(A/B)$$

إذن يكون الحدثان A وB مستقلين إذا وفقط إذا كان تحقيق أحدهما لا يؤثر على تحقيق الآخر.

تمرين:

نعتبر تلميذين x وy اجتازا اختبارا.

احتمال نجاح التلميذ x هو $\frac{1}{3}$ واحتمال نجاح y هو $\frac{2}{5}$

1) احسب احتمال نجاح التلميذين معا.
2) احسب احتمال نجاح التلميذ x فقط.
3) احسب احتمال نجاح تلميذ واحد فقط.
4) احسب احتمال نجاح تلميذ واحد على الأقل.

الحل

1) ليكن A الحدث " نجاح التلميذ x "

وليكن B الحدث " نجاح التلميذ y ".

الاحتمال المطلوب هو $p(A\cap B)$

من خلال النص يظهر أن الحدثين A و B مستقلان.

إذن: $$p(A\cap B)=p(A).p(B)=\frac{2}{15}$$

ملاحظة:

يمكن تطبيق صيغة الاستقلالية بطريقة غير مباشرة كما يلي:

نرمز لكل إمكانية بالزوج (a,b) حيث a هي نتيجة x و b نتيجة التلميذ y

R يعني نجاح التلميذ و $\bar{R}$ عدم نجاحه

1) ليكن E الحدث " نجاح x و y ".

E يعني (R,R).

إذن: $p(E)=\frac{1}{3}.\frac{2}{5}=\frac{2}{15}$

2) ليكن F الحدث " نجاح التلميذ x فقط "

F يعني $(R,\bar{R})$

إذن: $p(F)=\frac{1}{3}.\left(1-\frac{2}{5}\right)=\frac{1}{5}$

3) ليكن G الحدث " نجاح تلميذ واحد فقط ".

G يعني $(R,\bar{R})$ أو $(\bar{R},R)$

إذن: $p(G)=\frac{1}{3}\left(1-\frac{2}{5}\right)+\left(1-\frac{1}{3}\right).\frac{2}{5}$

$p(G)=\frac{7}{15}$

4) ليكن H الحدث " نجاح تلميذ على الأقل "

ليكن $\bar{H}$ الحدث المضاد ل H.

$\bar{H}$ يعني $(\bar{R},\bar{R})$:

إذن: $p(\bar{H})=\left(1-\frac{1}{3}\right).\left(1-\frac{2}{5}\right)=\frac{2}{5}$

ومنه $p(H)=1-p(\bar{H})=1-\frac{2}{5}$

$p(H)=\frac{3}{5}$

b) الاختبارات المستقلة:

تعريف:

يمكن لتجربة أن تكون مكونة من اختبار واحد أو من عدة اختبارات، ونقول إن هذه الاختبارات مستقلة إذا كانت نتائج إحداها لا تؤثر على الباقي.

أمثلة:

1) إذا رمينا قطعة نقود عدة مرات فإن الاختبارات تكون مستقلة.

2) السحب بتتابع وبإحلال يشكل اختبارات مستقلة.

3) إذا رمينا نفس النرد عدة مرات تكون الاختبارات مستقلة.

4) إذا كانت تجربة تتكرر في نفس الظروف فإن الاختبارات تكون مستقلة.

تمرين:

نرمي نرد وجهه مرقمة من 1 إلى 6، 5 مرات.

احسب احتمال الحصول على مضاعف ل 3 مرتين بالضبط.

– نرمز لكل إمكانية ب (x_1,x_2,x_3,x_4,x_5) حيث x_i هي نتيجة الرمية رقم i.

. ليكن A الحدث " الحصول على مضاعف ل 3 في رمية واحدة "

لدينا $p(A)=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$

. ليكن B الحدث " الحصول على مضاعف ل 3 مرتين بالضبط"

الحدث B يعني " الحدث A يتحقق مرتين بالضبط "

إذن الحدث B مكون من الخماسيات المكونة من $2A$ و $3\bar{A}$

ومن أجل تكوين خماسيات من هذا النوع يكفي اختيار مكانين ما بين 5 أماكن نضع فيها A و $\bar{A}$ في الباقي.

وعدد إمكانيات اختيار مكانين من بين 5 أماكن هو C_5^2

إذن عدد هذه الخماسيات هو C_5^2.

واحتمال كل واحد منها هو:

$$p=\frac{1}{3}.\frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{3}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)$$

$$=\left(\frac{1}{3}\right)^2\left(1-\frac{1}{3}\right)^3$$

إذن: $p(B)=C_5^2\left(\frac{1}{3}\right)^2\left(1-\frac{1}{3}\right)^3$

$p(B)=640$

خاصية:

نعتبر n اختبار مستقل.

ليكن A حدث احتمال تحقيقه في اختبار واحد هو p، ولا يتغير خلال الاختبارات.

ليكن B الحدث " الحدث A يتحقق K مرة بالضبط ".

لدينا: $p(B)=C_n^k p^k(1-p)^{n-k}$

برهان:

نفس الطريقة المتبعة في التمرين السابق.

تمارين تطبيقية:

تمرين (1):

صندوق يحتوي على $2N,4R,3B$.

نسحب تآنيا 3 كرات من الصندوق ونعيد هذه التجربة 6 مرات مع إرجاع الكرات بعد كل تجربة.

– ما هو احتمال الحصول على 3 كرات من نفس اللون 4 مرات بالضبط؟

الحل

– ليكن A الحدث " الحصول على 3 كرات من نفس اللون في سحبة واحدة ".

لدينا $p(A)=\frac{C_3^3+C_4^3}{C_9^3}=\frac{5}{84}$

– ليكن B الحدث " الحصول على 3 كرات من نفس اللون 4 مرات بالضبط ".

الحدث B يعني " الحدث A يتحقق 4 مرات ".

إذن:

facebook.com/merabti.math YouTube.com/MrMerabti

$$p(B)=C_6^4 p(A)^4(1-p(A))^{6-4}$$

$$p(B)=C_6^4\left(\frac{5}{84}\right)^4\left(\frac{79}{84}\right)^2$$

تمرين (2):

صندوق يحتوي على $2N,4R,3B$

نسحب بتتابع وبإحلال 6 كرات من الصندوق.

ما هو احتمال الحصول على كرة حمراء مرتين بالضبط؟

الحل

ليكن A الحدث " الحصول على كرة حمراء في سحبة واحدة "

لدينا: $p(A)=\frac{4}{9}$

ليكن B الحدث " الحصول على كرة حمراء مرتين بالضبط "

B يعني " الحدث A يتحقق مرتين بالضبط ".

إذن: $p(B)=C_6^2 p(A)^2(1-p(A))^{6-2}$

$$p(B)=C_6^2\left(\frac{4}{9}\right)^2\left(\frac{5}{9}\right)^4$$

تمرين (3):

رام يتمرن على إصابة هدف.

احتمال إصابة الهدف في طلقة واحدة هو: $p=\frac{2}{3}$

ما هو احتمال إصابة الهدف 6 مرات بعد 20 طلقة؟

الحل

ليكن A الحدث " إصابة الهدف في طلقة واحدة ".

لدينا: $p(A)=\frac{2}{3}$

ليكن B الحدث " إصابة الهدف 6 مرات ".

B يعني " الحدث A يتحقق 6 مرات بالضبط ".

إذن $p(B)=C_{20}^6\left(\frac{2}{3}\right)^6.\left(1-\frac{2}{3}\right)^{14}$

$$p(B)=C_{20}^6\left(\frac{2}{3}\right)^6\left(\frac{1}{3}\right)^{14}$$

تمرين (4):

يقوم مراقب بزيارة تجار في مدينة، وعددهم 20.

في كل زيارة الاحتمال لكي يجد المراقب التاجر موجودا هو $p=\frac{2}{5}$

قام المراقب ب 10 زيارات. ما هو الاحتمال لكي يكون المراقب قد وجد 6 تجار.

الحل

ليكن A الحدث " المراقب يجد التاجر في زيارة واحدة "

لدينا $p(A)=\frac{2}{5}$

ليكن B الحدث " المراقب يجد 6 تجار في الزيارات العشر "

B يعني " الحدث A يتحقق 6 مرات بالضبط "

إذن: $p(B)=C_{10}^6\left(\frac{2}{5}\right)^6.\left(1-\frac{2}{5}\right)^4$

$$p(B)=C_{10}^6\left(\frac{2}{5}\right)^6\left(\frac{3}{5}\right)^4$$

تمرين (5):

يحتوي صندوق على 4 كرات حمراء و 3 كرات خضراء.

نسحب كرة واحدة من الصندوق.

* إذا كانت حمراء نسحب تآنيا كرتين من بين باقي الكرات.
* إذا كانت خضراء نسحب بتتابع وبدون إحلال كرتين من بين باقي الكرات.

1) a) ما هو عدد الحالات الممكنة؟

b) احسب احتمال الحصول على 3 كرات من نفس اللون.

2)إذا علمنا أنه حصلنا على كرتين خضراوين بالضبط، فما هو الاحتمال لكي تكون الكرة الأولى المسحوبة خضراء؟

الحل

1) نرمز لكل إمكانية ب (x,y) حيث x نتيجة السحبة الأولى و y نتيجة السحبة الثانية.

a) ليكن Ω كون الإمكانيات.

الحالات الممكنة مكونة من:

– الحالات التي نحصل فيها على كرة حمراء في السحبة الأولى وعددها هو: $4.C_6^2=4\times15=60$

– الحالات التي نحصل فيها على كرة خضراء في السحبة الأولى وعددها هو: $3\times6\times5=90$

ومنه:

$$Card\Omega=150$$

b) ليكن A الحدث " الحصول على 3 كرات من نفس اللون "

A يعني الحصول على $(R,2R)$ أو $(V,(V,V))$

إذن:

$$p(A)=\frac{4}{7}.\frac{C_3^2}{C_6^2}+\frac{3}{7}.\left(\frac{2}{6}.\frac{1}{5}\right)$$

$$p(A)=\frac{1}{7}$$

2) ليكن B الحدث " الحصول على $2V$ بالضبط ".

ليكن C الحدث " الكرة الأولى خضراء "

الاحتمال المطلوب هو $p(C/B)$

لدينا $p(C/B)=\frac{p(C\cap B)}{p(B)}$

– لدينا $B\cap C$ يعني $(V,(V,R))$ أو $(V,(R,V))$

إذن: $p(B\cap C)=\frac{3}{7}.\frac{2}{6}.\frac{4}{5}+\frac{3}{7}.\frac{4}{6}.\frac{2}{5}$

$$=2.\left(\frac{3}{7}.\frac{2}{6}.\frac{4}{5}\right)=\frac{8}{35}$$

- الحدث B يعني $(V,(V,R))$ أو $(V,(R,V))$ أو $(R,\{2V\})$.

إذن: $p(B)=\frac{8}{35}+\frac{4}{7}.\frac{C_3^2}{C_6^2}=\frac{12}{35}$

ومنه: $p(C/B)=\frac{8}{12}=\frac{2}{3}$

facebook.com/merabti.math

YouTube.com/MrMerabti

MATH

تَعب المُراجعة أَفْضلُ مِنْ أَلمِ السُّقُوطْ

صنـاعة الطريق الذهبي نحو بكالوريـا 2020

بالتوفيق و النجاح لجميع التلاميذ الشُّرفـاء في شهادة البكـالوريـا 2020

عقبة بن نافع

https://www.facebook.com/okba.bac.2010