التحليل

الوحدة الأولى : حساب التفاضل وتطبيقاته.

علوم للجميع

البحث الأول : النهايات.

مبرهنات في النهايات.

لتكن الدالتان f,g المعرّفتان على $D \subseteq \mathbb{R}$ ولتكن M,L,λ أعداداً حقيقية.نفترض أنّ $\lim\limits_{x\to a} f(x)=M, \lim\limits_{x\to a} g(x)=L$ عندئذٍ تتحقق الخواص التالية:

$$1)\Big)\ \lim_{x\to a}\big[f(x)+g(x)\big]=\lim_{x\to a} f(x)+\lim_{x\to a} g(x)=M+L$$

(يمكن تعميم هذه المبرهنة على مجموع عددٍ منتهٍ من الدّوال)

$$2)\Big)\ \lim_{x\to a}\big[\lambda.f(x)\big]=\lambda.\lim_{x\to a} f(x)=\lambda.M \quad :\lambda\in\mathbb{R}$$

$$3)\Big)\ \lim_{x\to a}\big[f(x)-g(x)\big]=\lim_{x\to a} f(x)-\lim_{x\to a} g(x)=M-L$$

$$4)\Big)\ \lim_{x\to a}\big[f(x).g(x)\big]=\lim_{x\to a} f(x).\lim_{x\to a} g(x)=M.L$$

(يمكن تعميم هذه المبرهنة على جداء عدد منتهٍ من الدوال)

$$5)\Big)\ \lim_{x\to a}\frac{1}{g(x)}=\frac{1}{\lim\limits_{x\to a} g(x)}=\frac{1}{L} \qquad (L\neq 0)$$

$$6)\Big)\ \lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)}=\frac{M}{L} \qquad (L\neq 0)$$

$$7)\Big)\ \lim_{x\to a}\big[f(x)\big]^n=\Big[\lim_{x\to a} f(x)\Big]^n=M^n \qquad (n\in\mathbb{N}^*)$$

$$8)\Big)\ \lim_{x\to a}\sqrt{f(x)}=\sqrt{\lim_{x\to a} f(x)}=\sqrt{M} \qquad (M\geq 0, f\left(x\right)\geq 0)$$

ملاحظات:

1) إذا كانت $p(x)$ كثيرة حدود فإنه أياً كانت $a\in\mathbb{R}$ فلدينا $\lim\limits_{x\to a} p(x)=p(a)$.

2) إذا كانت $f(x)$ دالة كسرية حدودية و $a\in D_f$ فإنّ $\lim\limits_{x\to a} f(x)=f(a)$.

ملاحظات: إذا كان $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\ell$ فإنّ

$$[1]\ \lim_{x\to a}\sqrt[n]{f(x)}=\sqrt[n]{\ell}\ :\ n=3,5,7,\ldots$$

$$[2]\ \lim_{x\to a}\sqrt[n]{f(x)}=\sqrt[n]{\ell}\ :\ n=2,4,6,\ldots\ ,\ (\ell\geq 0)$$

تم التحميل من موقع علوم للجميع
http://www.3lom4all.com
المدرس أحمد عرابي الأحمد ٠٩٥١٧٥١٩٢٨

مُدرِّس الرياضيات:
أحمد عرابي الأحمد

مبرهنة الإحاطة:

مبرهنة (1): ليكن D مجالاً، ولتكن f,g دالتين معرّفتين على $D\setminus\{a\}$ وتحققان: $f(x)\le g(x)$ أياً كان $x\in D\setminus\{a\}$. إذا كانت النهايتان: $\lim\limits_{x\to a} f(x)=L, \lim\limits_{x\to a} g(x)=M$ موجودتين كان $L\le M$.

مبرهنة (2): ليكن D مجالاً، ولتكن f,g,h ثلاث دوالّ معرفة على $D\setminus\{a\}$ وتحقّق:في حالة $x\in D\setminus\{a\}$ المتراجحة $g(x)\le f(x)\le h(x)$. إذا كانت النهايتان $\lim\limits_{x\to a} g(x), \lim\limits_{x\to a} h(x)$ موجودتين ومتساويتين وقيمتهما المشتركة ℓ كان $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\ell$.

مبرهنة (3): ليكن D مجالاً، ولتكن f,g دالتين معرّفتين على $D\setminus\{a\}$.

1- إذا كان $g(x)\le f(x)$ وكان $\lim\limits_{x\to a} g(x)=+\infty$ فإنّ $\lim\limits_{x\to a} f(x)=+\infty$.

2- إذا كان $g(x)\ge f(x)$ وكان $\lim\limits_{x\to a} g(x)=-\infty$ فإنّ $\lim\limits_{x\to a} f(x)=-\infty$.

وتبقى المبرهنات السابقة صحيحة من أجل $a=+\infty$ أو $a=-\infty$.

مبرهنة: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$.

تذكرة : مساحة القطاع الدائري تساوي $\dfrac{1}{2}r^2x$ ، حيث r نصف قطر الدائرة ، و x زاوية القطاع.

حالات عدم التعيين: نقبل بصحّة المبرهنات التالية:

لتكن f,g دالتين معرّفتين في جوار عدد حقيقي a عندئذٍ:

$\lim\limits_{x\to a} f(x)$	$\ell\in\mathbb{R}$	$\ell\in\mathbb{R}$		$\ell\in\mathbb{R}$		$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	0	0
$\lim\limits_{x\to a} g(x)$	$M\in\mathbb{R}$	$+\infty$		$-\infty$		$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{x\to a}\left[f(x)+g(x)\right]$	$\ell+M$	$+\infty$		$-\infty$		$+\infty$	?	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{x\to a}\left[f(x).g(x)\right]$	$\ell.M$	$\ell>0$	$\ell<0$	$\ell>0$	$\ell<0$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	?	?
		$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$					

مدرس أحمد عرابي الأحمد ٠٩٥١٧٥١٩٢٨
التحميل من موقع علوم للجميع
http://www.3lom4all.com

$\lim\limits_{x\to a} f(x)$	$\ell \in \mathbb{R}$	$\ell \in \mathbb{R}$	$\ell \in \mathbb{R}$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{x\to a} g(x)$	$M \in \mathbb{R}^*$	$+\infty$	$-\infty$	$M > 0$	$M < 0$	$M > 0$	$M < 0$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)}$	$\dfrac{\ell}{M}$	0	0	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	?	?	?

وتعني $(?)$ أننا لا نستطيع إعطاء الجواب مباشرة.

تذكرة:

$$\lim_{\substack{x\to+\infty \\ or \\ x\to-\infty}} \frac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \dots + b_1 x + b_0} = \lim_{\substack{x\to+\infty \\ or \\ x\to-\infty}} \frac{a_n x^n}{b_m x^m} = \begin{cases} +\infty \quad or \quad -\infty & : (n > m) \\ \dfrac{a_n}{b_m} & : (n = m), (a_n \times b_m \neq 0) \\ 0 & : (n < m) \end{cases}$$

مبرهنات في النهايات.

$1]\ \lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$

$2]\ \lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$

$3]\ \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x^n} = +\infty,\ \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^n}{e^x} = 0 : n \geq 0$

$2]\ \lim\limits_{\substack{> \\ x\to 0}} \ln x = -\infty$

$5]\ \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - 1}{x} = 1$

$1]\ \lim\limits_{x\to+\infty} \ln x = +\infty$

$2]\ \lim\limits_{\substack{> \\ x\to 0}} \ln x = -\infty$

$3]\ \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0,\ \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x}{\ln x} = +\infty$

$4]\ \lim\limits_{\substack{> \\ x\to 0}} x \ln x = 0$

$5]\ \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+x)}{x} = 1$

تم التحميل من موقع علوم للجميع
http://www.3lom4all.com
المدرس: أحمد عرابي الأحمد ٠٩٥١٧٥١٩٢٨
مُدَرِّس الرياضيات: أحمد عرابي الأحمد

البحث الثاني : الاستمرار

تعريف : لتكن f دالة معرّفة على مجال مفتوح I، ولتكن $a \in I$ ، نقول إنّ f دالة مستمرة عند a إذا وفقط إذا كان $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$.

علوم للجميع

ملاحظات:

1. كل كثيرة حدود تكون مستمرة على $\mathbb{R}$.
2. كل دالة كسرية مستمرة على أي مجال محتوى في D_f .
3. إذا كانت كل من f, g دالة مستمرة عند a، وكان c عدداً ثابتاً، فإن كلاً من الدوال الآتية مستمرة عند النقطة a :
$f+g$ ، $f-g$ ، $c.f$ ، $f.g$ ، $\dfrac{f}{g}$ حيث $g(a) \neq 0$.
4. إذا كانت f مستمرة عند b، وكانت $\lim\limits_{x \to a} g(x) = b$ فإن $\lim\limits_{x \to a} f\left(g(x)\right) = f\left(\lim\limits_{x \to a} g(x)\right) = f(b)$.
5. إذا كانت g مستمرة عند a، وكانت f مستمرة عند $g(a)$، فإنّ $f \circ g$ مستمرة عند a .
6. الدالتان $\sin, \cos$ مستمرتان على $\mathbb{R}$.

تم التحميل من موقع علوم للجميع

البحث الثالث : الدالة المشتقة

http://www.3lom4all.com

تعريف : لتكن $f : D \to \mathbb{R}, x \mapsto f(x)$ دالة معرفة على مجال D.في حالة x_0 من D،نعرّف على $D \setminus \{x_0\}$ دالة نسبة التغير عند x_0، التي نرمزها Δ_{f,x_0} بالصيغة $\Delta_{f,x_0}(x) = \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$. فإذا كان لهذه الدالة نهاية حقيقية عندما تسعى x إلى x_0 في D، رمزنا إلى هذه النهاية بالرمز $f'(x_0)$ وأسمينا هذه النهاية العدد المشتق للدالة f عند x_0.وعندئذٍ نقول إن الدالة f اشتقاقية عند x_0 .

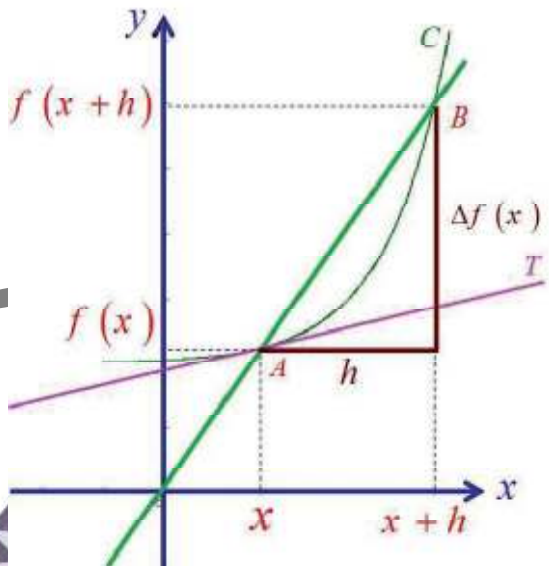
تعريف: لتكن $f : D \to \mathbb{R}, x \mapsto f(x)$ دالة معرّفة على مجال D.نقول إن الدالة f اشتقاقية على مجال جزئي I محتوى في D، إذا كانت اشتقاقية عند كل x من D، وعندئذٍ نعرّف الدالة المشتقة f' على I بأنها تلك الدالة التي تقرن بكل x من I قيمة العدد المشتق $f'(x)$ عند x. أي $x \mapsto f'(x)$.

خواص:

*إذا كانت الدالة f اشتقاقية على I فهي مستمرة على هذا المجال.

*إذا كانت f دالة مستمرة عند x_0 فليس من الضروري أن تكون اشتقاقية عند x_0 .

* $$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$



تذكرة:

مدرس الرياضيات:
أحمد عرابي الأحمد

إذا كانت الدالة $x \mapsto f(x)$ اشتقاقية عند x_0 فإن ميل المماس لمنحني الدالة $y = f(x)$ عند النقطة $M_0(x_0, y_0)$ منه هو $f'(x_0)$.أما معادلة المماس فهي: $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$.

تذكرة: إن معادلة مستقيم ميله m ويمر من نقطة معلومة $M_0(x_0, y_0)$ هي $y - y_0 = m(x - x_0)$.

البحث الرابع: الدالة المشتقة لمركب دالتين عدديتين (قاعدة السلسلة)

قاعدة: إذا كانت الدالة g اشتقاقية على مجال مفتوح I والدالة h اشتقاقية على كل مجال محتوى في $g(I)$ فإن الدالة $h \circ g$: $(h \circ g)(x) = h(g(x))$ اشتقاقية على المجال I وقاعدة اشتقاقها هي

$(h \circ g)'(x) = h'(g(x))g'(x)$.

قواعد الاشتقاق:

القاعدة الأولى : مشتق قوة دالة

إذا كانت الدالة g اشتقاقية على مجال مفتوح $I \subseteq \mathbb{R}$ وكانت الدالة f من الشكل $r \in Q$: $f(x) = (g(x))^r$ اشتقاقية على $I_1 \subseteq I$ فإن $f'(x) = r(g(x))^{r-1}.g'(x)$.

القاعدة الثانية: مشتق الدوال المثلثية الأساسية لدالة

إذا كانت الدالة g اشتقاقية على مجال مفتوح $I \subseteq \mathbb{R}$ وكانت الدالة f من الشكل

$f(x) = \sin(g(x))$	$f'(x) = g'(x).\cos(g(x))$
$f(x) = \cos(g(x))$	$f'(x) = -g'(x).\sin(g(x))$
$f(x) = \tan(g(x))$	$f'(x) = g'(x).(1 + \tan^2(g(x))) = \dfrac{g'(x)}{\cos^2(g(x))}$
$f(x) = \cot(g(x))$	$f'(x) = -g'(x).(1 + \cot^2(g(x))) = \dfrac{g'(x)}{\sin^2(g(x))}$

القاعدة الثالثة: مشتق الدالة الأسية لدالة ، من الشكل $f(x) = e^{g(x)}$

إذا كانت الدالة g اشتقاقية على مجال مفتوح $I \subseteq \mathbb{R}$ وكانت الدالة f من الشكل $f(x) = e^{g(x)}$ فإن مشتقها $f'(x) = g'(x)e^{g(x)} = g'(x).f(x)$.

القاعدة الرابعة: مشتق الدالة اللوغارتمية لدالة ، من الشكل $f(x) = \ln g(x)$

إذا كانت الدالة g اشتقاقية على مجال مفتوح $I \subseteq \mathbb{R}$ وكانت الدالة f من الشكل $f(x) = \ln g(x)$.إن f اشتقاقية على كل مجال محتوى في المجال I يكون فيه $g(x) > 0$ ومشتقها $f'(x) = \dfrac{g'(x)}{g(x)}$.

مُدَرِّس الرياضيات:
أحمد عرابي الأحمد

البحث الخامس : تطبيقات الاشتقاق في اشتقاق دوال عددية متنوعة.

تعريف : لتكن f دالة عددية اشتقاقية على المجال $D=]a,b[$ نسمي الدالة $f':D\to\mathbb{R}:x\mapsto f'(x)$ المشتق الأول للدالة f.

إذا كانت f' اشتقاقية على مجال مفتوح D_1 نسمي الدالة $f'':D_1\to\mathbb{R}:x\mapsto\left(f'(x)\right)'$ المشتق الثاني للدالة f.

إذا كانت f'' اشتقاقية على مجال مفتوح $D_2\subseteq D_1$ نسمي الدالة $f^{(3)}:D_2\to\mathbb{R}:x\mapsto\left(f''(x)\right)'$ المشتق الثالث للدالة f ...وهكذا نستطيع تعريف $f^{(4)}$ ، $f^{(5)}$ ،...، $f^{(n)}$ المشتقات المتتالية للدالة f كما نسمي $f^{(n)}$ المشتق من المرتبة $n\left(n\in\mathbb{N}^*\right)$ للدالة f.

تطبيقات المشتق:

1−تماس خطين بيانيين:

أولاً – تماس مستقيم وخط بياني:

ليكن d مستقيماً معادلته $f_1(x)=mx+\lambda$ ، وليكن C خطاً بيانياً لدالة f اشتقاقية ، ولتكن $A(x_1,y_1)$ نقطة من المستوي المحدّث بمعلم متجانس عندئذٍ: الشرط اللازم والكافي ليكون المستقيم d مماساً للخطّ البياني للدالة f في النقطة A هو $A\in d\cap C$ & $f_1'(x)=m$.

ثانياً – تماس منحنيين بيانيين لدالتين:

إذا كان C_1 خطاً بيانياً لدالة f_1 و C_2 الخطّ البياني لدالة f_2 كلاهما اشتقاقيتان.نقول إن الخطين البيانيين C_1,C_2 متماسّان في النقطة $A(x_1,y_1)$ إذا وفقط إذا كان :

$A\in C_1\cap C_2$ و C_1,C_2 يقبلان مماساً مشتركاً في النقطة A

إذن يكون C_1,C_2 متماسّان في النقطة $A(x_1,y_1)$ إذا وفقط إذا كان

$$f_1'(x_1)=f_2'(x_1)\ \&\ f_1(x_1)=f_2(x_1)$$

ملاحظة مهمة: من شروط تماس خطين بيانيين لدالتين نستنتج أن للخطّين البيانيين مماساً مشتركاً في نقطة تماسّهما.

2−توظيف الاشتقاق في التقريب الخطّي:

تعريف: إذا كانت الدالة f اشتقاقية عند a فإنّ التقريب الخطّي للدالة في جوار للنقطة a يُعطى بالعلاقة:

$$f(x)\approx L(x)=f(a)+f'(a)(x-a)$$

أو بالصيغة المكافئة

$$f(a+h)\approx f(a)+f'(a)h$$

وكلما كانت قيمة $h=x-a$ صغيرة كان هذا التقريب جيداً.

علوم للجميع
المدرس: أحمد عرابي الأحمد
تم التحميل من موقع علوم للجميع
http://www.3lom4all.com
٠٩٥٧٥١٩٢٨
مُدرِّس الرياضيات: أحمد عرابي الأحمد

3− توظيف الاشتقاق في إيجاد معدلات التغير:

إذا كانت x دالة تابعة للزمن t فإننا نسمي $\frac{dx}{dt}$ معدّل تغير x في اللحظة t.

البحث السادس : توظيف المشتقات في دراسة تغيرات دالة عددية.

1− اطّراد دالة عددية

مبرهنة: إذا كانت الدالة f اشتقاقية على مجال ما عندئذٍ:

$[1]$ الشرط اللازم والكافي لتكون f متزايدة تماماً على مجال هو أن يكون $f'(x) \geq 0$ على هذا المجال، وألا تنعدم على أي مجال جزئي من هذا المجال.

$[2]$ الشرط اللازم والكافي لتكون f متناقصة تماماً على مجال هو أن يكون $f'(x) \leq 0$ على هذا المجال، وألا تنعدم على أي مجال جزئي من هذا المجال.

ملاحظة 1 : نقصد بدراسة اطراد دالة عددية تعرف المجالات التي تكون الدالة متزايدة تماماً عليها أو متناقصة تماماً عليها أو ثابتة عليها. ويمكن أن تجرى هذه الدراشة بالاستفادة من المبرهنة السابقة عن طريق دراسة إشارة المشتق الأول، وتنظيم جدول بهذه الدراسة إذا طلب ذلك.

ملاحظة 2 : إذا كانت الدالة f مستمرة على مجال I من النمط $[a,b]$ أو $[a,b[$ أو $]a,b]$ أو $]a,b[$ وكانت متزايدة تماماً على المجال المفتوح $]a,b[$ كانت f متزايدة تماماً على المجال I.

وتبقى هذه الخاصة صحيحة إذا استبدلنا التناقص التام بالتزايد التام في العبارة السابقة.

القيمة الكبرى الشاملة والقيمة الصغرى الشاملة لدالة:

تعريف: لتكن الدالة f المعرفة على D.

- نقول إن $f(x_0)$ هي قيمة كبرى شاملة للدالة f إذا وفقط إذا: مهما كانت $x \in D$ كان $f(x) \leq f(x_0)$.
- نقول إن $f(x_0)$ هي قيمة صغرى شاملة للدالة f إذا وفقط إذا: مهما كانت $x \in D$ كان $f(x) \geq f(x_0)$.

ملاحظة مهمة: إذا سعت دالة f معرفة في جوار a إلى $+\infty$ عند a، فليس لهذه الدالة قيمة كبرى شاملة، وكذلك إذا سعت دالة f معرّفة في جوار a إلى $-\infty$ عند a، فليس لهذه الدالة قيمة صغرى شاملة.

البحث السابع : القيم الكبرى والقيم الصغرى محلياً.

1− تعريف القيم الكبرى والقيم الصغرى محلياً.

لتكن f الدالة المعرفة على مجموعة جزئية D من $\mathbb{R}$، وليكن x_0 عنصراً من D.

$1''$) نقول إن $f(x_0)$ قيمة كبرى محلياً للدالة f إذا وفقط إذا وُجد مجال مفتوح D_1 يضمّ x_0 بحيث: أياً كان x من $D \cap D_1$، فإن $f(x) \leq f(x_0)$.

$2''$) نقول إن $f(x_0)$ قيمة صغرى محلياً للدالة f إذا وفقط إذا وُجد مجال مفتوح D_1 يضمّ x_0 بحيث: أياً كان x من $D \cap D_1$، فإن $f(x) \geq f(x_0)$.

مُدرِّس الرياضيات:
أحمد عرابي الأحمد

ملاحظة 1 : ليس من الضروري أن يكون المجال D_1 محتوى في مجموعة التعريف D .

ملاحظة 2 : درسنا سابقاً القيم الكبرى الشاملة والقيم الصغرى الشاملة. إن القيم الكبرى الشاملة هي قيم كبرى محلية، وكذلك تكون القيم الصغرى الشاملة قيم صغرى محلية،(خذ $D_1 = \mathbb{R}$ في الحالتين).ولكن العكس غير صحيح.

ملاحظة 3 : في حالة لدينا دالة متزايدة تماماً أو متناقصة تماماً على مجال مفتوح، لا توجد لهذه الدالة على هذا المجال قيم كبرى محلياً ولا قيم صغرى محلياً.

مبرهنات القيم الكبرى محلياً والصغرى محلياً.

مبرهنة: لتكن f دالة معرفة على مجموعة D ، ولتكن x_0 نقطة من D ، و $]a,b[$ مجالاً مفتوحاً تنتمي إليه x_0 ومحتوى في D .نفترض أن f اشتقاقية على $]a,b[$ عندئذٍ :

$1''$) إذا كان $f'(x) > 0$ على المجال $]a,x_0[$ وكان $f'(x) < 0$ على المجال $]x_0,b[$ ، كانت $f(x_0)$ قيمة كبرى محلياً للدالة f .

$2''$) إذا كان $f'(x) < 0$ على المجال $]a,x_0[$ وكان $f'(x) > 0$ على المجال $]x_0,b[$ ، كانت $f(x_0)$ قيمة صغرى محلياً للدالة f .

مبرهنة: لتكن f دالة اشتقاقية على مجال مفتوح $]a,b[$.ولتكن x_0 نقطة من $]a,b[$ ، إذا كانت $f(x_0)$ قيمة كبرى محلياً أو صغرى محلياً للدالة f كان $f'(x_0) = 0$.

ملاحظة: ليس بالضرورة أن تكون الدالة f اشتقاقية عند x_0 لتكون $f(x_0)$ قيمة كبرى أو صغرى محلياً.

الوحدة الثانية : التكامل وتطبيقاته.

البحث الأول : التكامل غير المحدد.

تعريف : لتكن f دالة معرفة على مجال $I \subseteq \mathbb{R}$. نقول إن F دالة أصلية على المجال I للدالة f إذا وفقط إذا تحقق : الدالة F اشتقاقية على المجال I ، وأياً كان $x \in I$ فإن $F'(x) = f(x)$.

- إذا كانت F دالة أصلية على المجال $I \subseteq \mathbb{R}$ للدالة f ، عندئذٍ مجموعة الدوال الأصلية على I للدالة f هي من الشكل $x \mapsto F(x) + c$ حيث c ثابت كيفي، وهي مجموعة غير منتهية تختلف كل دالة أصلية منها عن الأخرى بقيمة الثابت c .

مفهوم التكامل غير المحدد:

تعريف : إذا كانت f دالة مستمرة على مجال $I \subseteq \mathbb{R}$ فإن مجموعة الداوال الأصلية لها على I هي من الشكل $F(x) + c$ وتسمى التكامل غير المحدد للدالة f ونرمزها $\int f(x)dx = F(x) + c$.

نسمي $\int$ إشارة التكامل، f الدالة المكاملة، x متغير التكامل، F دالة أصلية للدالة f ، c ثابت التكامل.

الخواص الأساسية للتكامل غير المحدد:

(1) في حالة f دالة مستمرة على مجال $I \subseteq \mathbb{R}$ لدينا على I : $\left(\int f(x)dx\right)' = f(x)$.

مُدرِّس الرياضيات:
أحمد عرابي الأحمد
المدرس أحمد عرابي الأحمد ٠٩٥١٧٥١٩٢٨
تم التحميل من موقع علوم للجميع
http://www.3lom4all.com

(2) في حالة دالة ذات مستقة مستمرة على مجال $I \subseteq \mathbb{R}$ لدينا على I : $\int f'(x)dx = f(x) + c$.

(3) في حالة ثابت k ودالتين f, g مستمرتين على مجال $I \subseteq \mathbb{R}$ لدينا على I :

$$\int k.f(x)dx = k.\int f(x)dx$$

$$\int [f(x) + g(x)]dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$$

جدول قواعد التكامل غير المحدد لبعض الدوال الشهيرة :

ملاحظات	التكامل $\int f(x)dx$
c ثابت كيفي	$\int 0.dx = c$
$m \neq 0$ ثابت	$\int m.dx = mx + c$
$n \neq -1$	$\int x^n.dx = \frac{1}{n+1}x^{n+1} + c$
$a \neq 0$ ثابت	$\int \cos(ax+b).dx = \frac{1}{a}\sin(ax+b) + c$
$a \neq 0$ ثابت	$\int \sin(ax+b).dx = -\frac{1}{a}\cos(ax+b) + c$
$k \neq 0$ ثابت	$\int \sec^2(kx).dx = \frac{1}{k}\tan(kx) + c$
$k \neq 0$ ثابت	$\int \csc^2(kx).dx = -\frac{1}{k}\cot(kx) + c$
$k \neq 0$ ثابت	$\int e^{kx}.dx = \frac{1}{k}e^{kx} + c$
$k \neq 0$ ثابت	$\int \frac{1}{x}.dx = \begin{cases} \ln(x) + c & : x > 0 \\ \ln(-x) + c & : x < 0 \end{cases}$ $: x \neq 0$ ويمكن أن نكتب $\int \frac{1}{x}.dx = \ln\lvert x\rvert + c : x \neq 0$
$a \neq 0$, $n \neq -1$	$\int (ax+b)^n.dx = \frac{(ax+b)^n}{a(n+1)} + c$
$g(x) \neq 0$	$\int \frac{g'(x)}{g(x)}.dx = \ln\lvert g(x)\rvert + c$
	$\int g'(x).dx = e^{g(x)} + c$

علوم للجميع
تم التحميل من موقع علوم للجميع
http://www.3lom4all.com
المدرس أحمد عرابي الأحمد ٠٩٥٧٧٥٩٢٣٨
مُدرِّس الرياضيات: أحمد عرابي الأحمد

المنحني التكاملي:

تعريف: يدعى الخط البياني لكل دالة أصلية F على المجال $I \subseteq \mathbb{R}$ للدالة f منحنياً تكاملياً.

ملاحظة : لإيجاد المنحني التكاملي للدالة f المار بالنقطة (x_0, y_0) نعوض $F(x_0) = y_0$ فنحصل على قيمة الثابت c ثم نعوضها في المعادلة $y = F(x) + c$ فنحصل على معادلة المنحني التكاملي المطلوب.

البحث الثاني : التكامل بالتجزئة والتكامل بالتعويض

طريقة تغيير المتحول في التكامل غير المحدد:

ليكن I, J مجالين من $\mathbb{R}$ ولتكن $g : I \to \mathbb{R}$ دالة لها مشتقة مستمرة على I، نفترض أن g تأخذ قيمتها في J أي $g(I) \subset J$. وكذلك لتكن $f : J \to \mathbb{R}$ دالة مستمرة ، تقبل دالة أصلية لها على J. عندئذٍ

$$\int F[g(x)]\, g'(x).dx = F[g(x)] + C$$

حساب التكامل بطريقة التكامل بالتجزئة:

إذا كانت كل من الدالتين u, v اشتقاقية بالنسبة للمتغير x ومشتقة كل منهما مستمرة على المجال $I \subseteq \mathbb{R}$ ، عندئذٍ يكون الجداء $u.v$ دالة أصلية للدالة $u'.v + u.v'$ ومنه نستنتج أن

$$\int v(x)u'(x)dx + \int u(x)v'(x)dx = u(x)v(x) + c$$

أو

$$\int u(x)v'(x)dx = u(x)v(x) - \int v(x)u'(x)dx + c$$

تسمى هذه العلاقة التكامل بالتجزئة وتستخدم لحساب التكاملات من الشكل:

$$\int x^m \sin(ax)dx \quad , \quad \int x^m \cos(ax)dx \quad , \quad \int x^m e^{ax}dx \quad , \quad \int x^m \ln(x)dx$$

حيث $\mathbb{N} \ni m \neq 0$ ، $a \neq 0$.

نعتبر $u = x^m$ في الحالات الثلاث الأولى ، و $u = \ln x$ في الحالة الرابعة.

البحث الثالث : تكاملات الكسور الجزئية.

تفريق كسر بسيط(فعلي) إلى مجموع كسور جزئية:

مبرهنة: كل كثيرة حدود $p(x)$ يمكن أن تحلل إلى جداء عوامل من الدرجة الأولى من الشكل $ax + b$ مختلفة أو مكررة وعوامل من الدرجة الثانية لا يمكن تحليلها(مميزها سالب) من الشكل $(ax^2 + bx + c)$ مختلفة أو مكررة.

تعريف: الدالة الكسرية البسيطة هي دالة كسرية حدودية، درجة بسطها أصغر تماماً من درجة مقامها ومكتوبة بأبسط شكل (أي لا يوجد عامل مشترك بين البسط والمقام).

مُدَرِّس الرياضيات:
أحمد عرابي الأحمد

تكامل دالة كسر بسيطة $f(x)=\dfrac{p(x)}{q(x)}$ اعتماداً على الكسور الجزئية.

علوم للجميع

الحالة الأولى : يمكن تحليل المقام $q(x)$ إلى عوامل من الدرجة الأولى(جذور المقام بسيطة وغير مكررة)من الشكل

$$q(x)=(x-a_1)(x-a_2)\dots(x-a_n)$$

نقبل في هذه الحالة أنه يمكن تفريق الدالة $f(x)=\dfrac{p(x)}{q(x)}$ كما يأتي:

$$f(x)=\frac{p(x)}{q(x)}=\frac{A_1}{x-a_1}+\frac{A_2}{x-a_2}+\dots+\frac{A_n}{x-a_n} \qquad (*)$$

حيث $A_1,A_2,\dots,A_n$ أعداد حقيقية يتم تعيينها.

فلحساب A_1 نضرب طرفي المساواة $(*)$ بالمقدار $(x-a_1)$ ، ونأخذ النهايات في الناتج عندما تسعى x إلى a_1 فنحصل على A_1 .

تم التحميل من موقع علوم للجميع

ولحساب A_2 نضرب طرفي المساواة $(*)$ بالمقدار $(x-a_2)$ ، ونأخذ النهايات في الناتج عندما تسعى x إلى a_2 فنحصل على A_2 ، وهكذا نحصل على قيم الأعداد $A_1,A_2,\dots,A_n$ ونعوضها في العلاقة $(*)$ ثم نكامل طرفي هذه العلاقة فنحصل على

http://www.3lom4all.com

$$\int f(x)dx=\int\frac{A_1}{x-a_1}dx+\int\frac{A_2}{x-a_2}dx+\dots+\int\frac{A_n}{x-a_n}dx$$

ثم نتابع الحل.

ملاحظة : إذا طلب منا مكاملة كسر صحيح $\dfrac{p(x)}{q(x)}$ ، درجة بسطه أكبر من درجة مقامه أو تساويها، عندئذٍ نقسّم البسط على المقام فنحصل على

$$\frac{p(x)}{q(x)}=H(x)+\frac{r(x)}{q(x)}$$

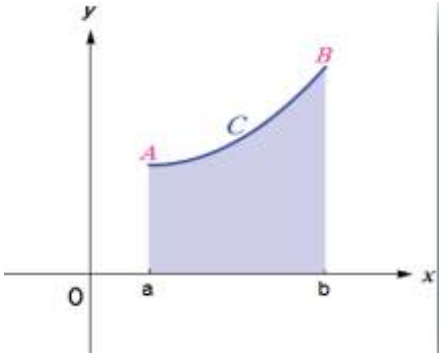
حيث خارج القسمة H دالة حدودية و $r(x)$ باقي القسمة وتكون $\dfrac{r}{q}$ دالة كسرية بسيطة(فعلية)، وعندئذٍ نردّ التكامل غير المحدد للدالة الكسرية $\dfrac{p}{q}$ إلى مجموع تكاملين غير محددين ، الأول $\int H(x)dx$ وهو مألوف (تكامل دالة حدودية) والثاني $\int\dfrac{r(x)}{q(x)}dx$ تكامل كسر من النوع الذي درسناه.

المدرس أحمد عرابي الأحمد ٠٩٥٦٧٥١٩٢٨

مُدَرِّس الرياضيات:
أحمد عرابي الأحمد

البحث الرابع : التكامل المحدد.

تعريف: ليكن C الخط البياني للدالة f المستمرة على المجال $[a,b]$ حيث $f(x) \geq 0$.



مساحة السطح المحصور بـ C والمحور $x'x$ والمستقيمين اللذين معادلتهما $x=a, x=b$ تسمى مساحة شبه المنحرف المنحني $aAbB$.

تعريف التكامل المحدد : لتكن f دالة مستمرة على المجال $[a,b]$ ولتكن $F(x)$ دالة أصلية لـ $f(x)$ على $[a,b]$ عندئذٍ نعرّف $\int_a^b f(x)dx$ بالعلاقة $\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b)-F(a)$.

خواص التكامل المحدد :

لتكن f دالة مستمرة على مجال $I \subseteq \mathbb{R}$ وليكن k عدداً حقيقياً، عندئذٍ أياً كانت الأعداد a,b,c من المجال I فإن:

1) $\int_a^a f(x)dx = 0$

2) $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$

3) $\int_a^b kf(x)dx = k\int_b^a f(x)dx$

4) $\int_a^b f(x)dx = \int_b^a f(t)dt$

5) $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$

6) إذا كانت f_1, f_2 دالتين مستمرتين على المجال $I \subseteq \mathbb{R}$ عندئذٍ:

$$\int_a^b [f_1(x)+f_2(x)]dx = \int_a^b f_1(x)dx + \int_a^b f_2(x)dx$$

علوم الجميع
المدرس: أحمد عرابي الأحمد ٠٩٥١٧٥١٩٢٨
تم التحميل من موقع علوم للجميع
http://www.3lom4all.com
مُدرِّس الرياضيات: أحمد عرابي الأحمد

التكامل المحدد بالتعويض:

مبرهنة: لتكن $g : I \to \mathbb{R}$ دالة ذات مشتق مستمر على مجال I. ولنفترض أن g تأخذ قيمها في مجال J أي $g(I) \subset J$. ثم لتكن $f : J \to \mathbb{R}$ دالة مستمرة على J. عندئذٍ أياً كان العددان a,b من I كان:

$$\int_a^b f(g(x))g'(x)\,dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u)\,du$$

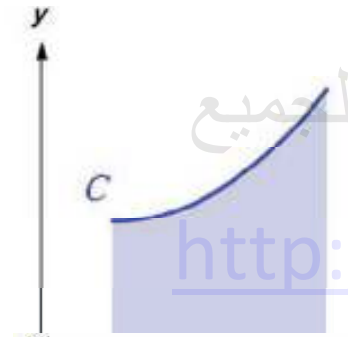
التكامل المحدد بالتجزئة:

إذا كان لكل من الدالتين u,v مشتق مستمر على المجال $[a,b]$ فعندها

$$\int_a^b u(x)v'(x)\,dx = \left[u(x)v(x)\right]_a^b - \int_a^b v(x)u'(x)\,dx$$

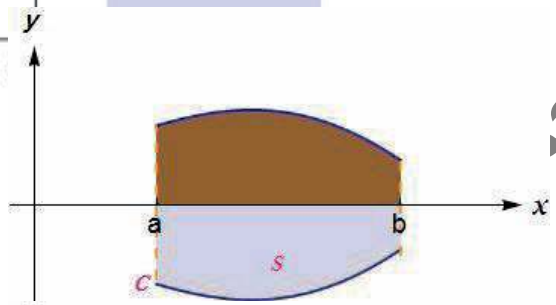
البحث الخامس: تطبيقات التكامل.

أولاً – حساب مساحة سطح مستوٍ:



–الحالة الأولى : إذا كان السطح فوق $x'x$ فإن المساحة

$$S = \int_a^b f(x)dx = \left[F(x)\right]_a^b = F(b) - F(a)$$

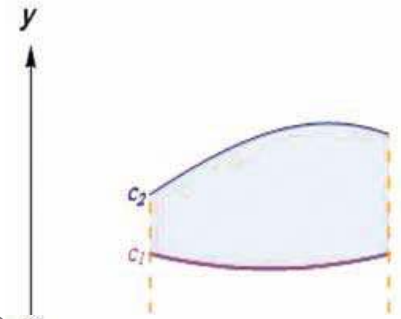


–الحالة الثانية : إذا كان السطح تحت $x'x$ فإن المساحة

$$S = \int_a^b -f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx$$

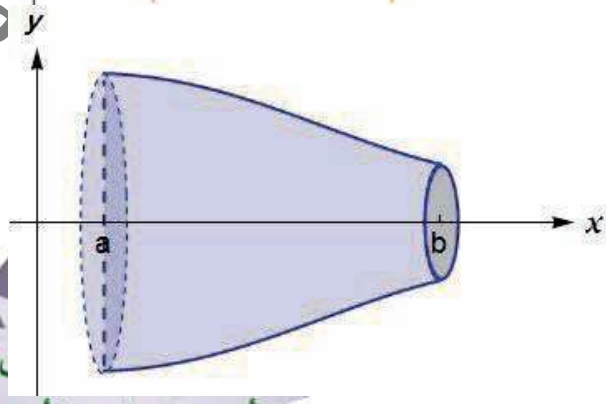
–الحالة الثالثة : إذا كان السطح يقطع $x'x$ فإن المساحة

$$S = \int_a^b |f(x)|dx$$



–الحالة الرابعة : السطح محصور بين خطين بيانيين لدالتين f_1, f_2 مستمرتين على المجال $[a,b]$ حيث $f_2(x) \le f_1(x)$ أياً كان $x \in [a,b]$ فإن المساحة

$$S = \int_a^b \left[f_2(x) - f_1(x)\right]dx =$$

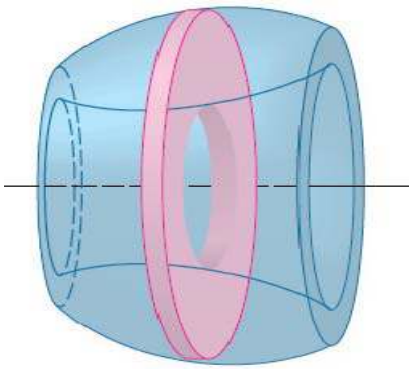


أحمد عرابي الأحمد
المدرس: أحمد عرابي الأحمد
تم التحميل من موقع علوم للجميع
http://www.3lom4all.com

ثانياً – حساب حجم مجسم دوراني:

–طريقة القرص: إذا دارت المنطقة المحددة بالخط C والمحور $x'x$ والمستقيمين $x=a, x=b$ حول المحور $x'x$ فإنه يتولد عن هذا الدوران مجسمٌ يسمى مجسماً دورانياً يعطى حجمه بالدستور

$$V=\int_a^b \pi\left[f(x)\right]^2 dx$$

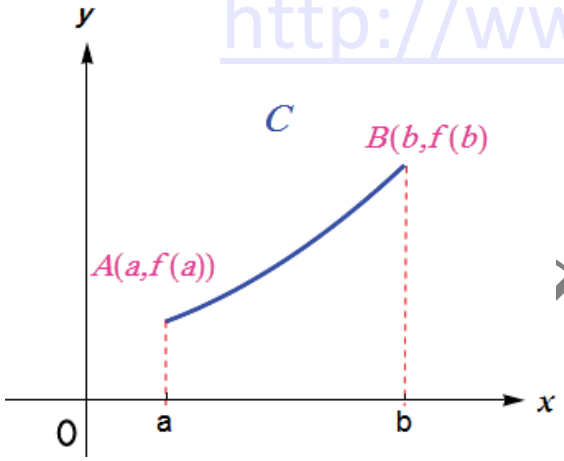


–طريقة الحلقة: إذا دارت المنطقة المحددة بالخطين C_1, C_2 للتابعين f_1, f_2 حيث $f_1(x) \geq f_2(x) \geq 0 \quad \forall x \in [a,b]$ والمستقيمين $x=a, x=b$ حول $x'x$ فإن حجم المجسم الناتج عن هذا الدوران يعطى بالدستور:

$$V=\int_a^b \pi\left\{\left[f_1(x)\right]^2-\left[f_2(x)\right]^2\right\}dx$$

ثالثاً – حساب طول منحنٍ أملس:

تعريف: ليكن C منحني الدالة f المستمرة على $[a,b]$ نقول إن C أملس على $[a,b]$ إذا كان للدالة f مشتق مستمر على $[a,b]$.



تعريف: ليكن C منحني الدالة f المستمرة على $[a,b]$، ولنفترض أن المنحني C أملس عندئذٍ يعطى طول القوس AB من C بالصيغة $L=\int_a^b \sqrt{1+\left[f'(x)\right]^2}\,dx$.

البحث السادس : المعادلات التفاضلية الخطية(من المرتبة الثانية على الأكثر)

تعريف: المعادلة التفاضلية هي كل معادلة تحوي مشتقاً واحداً على الأقل للدالة المجهولة f.

المعادلة التفاضلية الخطية: تكون المعادلة التفاضلية خطية إذا أمكن إرجاعها إلى الشكل:

$$y^{(n)}+c_{n-1}y^{(n-1)}+\ldots+c_1y'+c_0y=g(x)$$

حل المعادلة التفاضلية: نسمي حلاً للمعادلة التفاضلية السابقة كل دالة $x \mapsto y=\varphi(x)$ اشتقاقية n مرة متتالية في المجال $I \subseteq \mathbb{R}$ وتحقق مع مشتقاتها المعادلة التفاضلية المفروضة.

الحل العام للمعادلة التفاضلية الخطية: هو الصيغة العامة للدوال التي تمثل مجموعة جميع حلول المعادلة التفاضلية المدروسة.

مُدَرِّس الرياضيات:
أحمد عرابي الأحمد

الحل الخاص للمعادلة التفاضلية: هو أحد حلول المعادلة التفاضلية المدروسة.

ونسمي حل معادلة تفاضلية إيجاد حلها العام.

تشكيل معادلة تفاضلية : هو تشكيل معادلة تفاضلية من معادلة جبرية تحتوي على ثابت كيفي أو أكثر ويتم باشتقاق المعادلة عدداً من المرات يساوي عدد الثوابت الكيفية، ثم نحذف هذه الثوابت من المعادلة الجبرية ومشتقاتها فنحصل بذلك على المعادلة المطلوبة.

نماذج من معادلات تفاضلية بسيطة:

أولاً– المعادلة $y' = f(x)$ وحلها $y = \int f(x)dx$.

ثانياً – المعادلة $y'' = f(x)$ وحلها $y = \int\left[\int f(x)dx\right]dx$.

ثالثاً – المعادلة $y'' = -\omega^2 y$ حيث $\omega \neq 0$ وحل هذه المعادلة $y = c_1 \sin \omega x + c_2 \cos \omega x$ حيث c_1, c_2 ثابتان اختياريان.

رابعاً – المعادلة التفاضلية $a \in \mathbb{R}$: $y' + ay = 0$ وحلها هو $y = c.e^{-ax}$ حيث c ثابت كيفي.

خامساً – المعادلة $a, k \in \mathbb{R}$: $y' + ay = k$ ونميز حالتين:

الحالة الأولى: $a = 0$ فنحصل على المعادلة $y' = k$ وحلها $y = kx + c$.

الحالة الثانية: $a \neq 0$ فنحصل على المعادلة $y' = -ay + k$ وحلها $y = ce^{-ax} + \frac{k}{a}$.

الوحدة الثالثة : الدوال العددية ورسم خطوطها البيانية.

البحث الأول : المستقيمات المقاربة.

–المستقيم المقارب الموازي للمحور $x'x$:

تعريف: ليكن C الخط البياني للدالة f المعرفة على $D \subseteq \mathbb{R}$ حيث D يحوي مجالاً من الشكل $]a, +\infty[$ أو من الشكل $]-\infty, a[$ ، وليكن Δ مستقيماً موازياً للمحور $x'x$ معادلته $y = b$. إذا كانت نهاية $(f(x) - b)$ تساوي الصفر عندما تسعى x إلى $+\infty$ أو إلى $-\infty$، قلنا إن $y = b$: Δ مستقيم مقارب للخط C موازٍ لـ $x'x$.

–المستقيم المقارب الموازي للمحور $y'y$:

تعريف: ليكن Δ مستقيماً موازياً للمحور $y'y$ معادلته $x = a$ وليكن C الخط البياني للدالة f، إذا كانت نهاية الدالة f تساوي $+\infty$ أو $-\infty$ عندما تسعى x إلى a من اليمين أو من اليسار. نقول عندئذٍ إن $x = a$ مستقيم مقارب للخط C موازي لـ $y'y$.

تذكر : لتعيين الوضع النسبي للخط البياني C للدالة f بالنسبة إلى مقاربه Δ الموازي للمحور $x'x$ ندرس إشارة الفرق $f(x) - y_\Delta$ ونميز حالتين :

1) $f(x) - y_\Delta < 0$ فإن C يقع تحت Δ .

2) $f(x) - y_\Delta > 0$ فإن C يقع فوق Δ .

مُدرِّس الرياضيات:
أحمد عرابي الأحمد

المقارب المائل:

تعريف: ليكن C الخط البياني للدالة f للدالة المعرفة على $D \subseteq \mathbb{R}$ حيث D يحوي مجالاً من النمط $]a,+\infty[$ أو $]-\infty,a[$ ، وليكن Δ مستقيماً معادلته $\Delta : y = g(x) = mx + p : (m \in \mathbb{R}^*, p \in \mathbb{R})$ إذا كان الفرق $f(x) - g(x)$ نهاية تساوي الصفر ، عندما تسعى x إلى $+\infty$ أو $-\infty$ قلنا إن المستقيم Δ مقارب للخط C .

الجبر

الوحدة الأولى: الاحتمالات والإحصاء.

الاحتمال:

المفاهيم الأساسية في الاحتمال :

- **الاختبار** : هو تجربة يمكن إجراؤها أو استعراض لظاهرة طبيعية أو اجتماعية نعلم مسبقاً مجموعة نتائجها الممكنة (لكننا لا نعلم النتيجة التي سنحصل عليها عند إجراء التجربة).
- **فضاء العينة** : هو مجموعة النتائج الممكنة للاختبار ، سنرمز لها بالحرف Ω ، ويحددها الغرض من الاختبار ، وقد تكون Ω منتهية أو غير منتهية ؛ ولكن سنقتصر في دراستنا على الحالة التي يكون فيها Ω مجموعة منتهية.
- **الحدث** : عندما يكون عدد عناصر فضاء العينة منتهياً نعرّف الحدث بأنه أي مجموعة جزئية من فضاء العينة Ω ، نرمز إلى الأحداث بحروف كبيرة $A, B, C, \ldots$. ونرمز بالرمز $P(\Omega)$ إلى مجموعة جميع الأحداث ، أي جميع أجزاء Ω ، ونسميه فضاء الأحداث.
- **أحداث مميزة :**

1. الحدث الأكيد Ω
2. الحدث المستحيل ϕ
3. الحدث البسيط (هو حدث وحيد العنصر)
4. الحدثان المتنافيان: هما حدثان يقتضي وقوع أحدهما عدم وقوع الآخر أي (الحدثان A و B متنافيان) يكافئ $(A \cap B = \phi)$
5. الحدثان المتتامان : هما حدثان وقوع أحدهما يكافئ عدم وقوع الآخر أي (الحدثان A و B متضادان) يكافئ $(B = \Omega \setminus A = A')$

- **العمليات على الأحداث :**

لتكن Ω فضاء العينة المرتبط بتجربة ما ، وليكن $P(\Omega)$ فضاء الأحداث مجموعة الأحداث المرتبطة بتلك التجربة. نعرّف العمليات على الأحداث كما يأتي :

1) اجتماع حدثين : اجتماع حدثين A و B هو الحدث الذي يقع إذا وفقط إذا وقع أحد الحدثين A أو B أو كلاهما ورمزه $A \cup B$.

مُدرِّس الرياضيات: أحمد عرابي الأحمد
المدرس أحمد عرابي الأحمد ٠٩٥١٧٥١٩٢٨
تم التحميل من موقع علوم الجميع
http://www.3lom4all.com

2) تقاطع حدثين : تقاطع حدثين A و B هو الحدث الذي يقع إذا وفقط إذا وقع الحدثان A و B في آنٍ معاً ورمزه $A \cap B$.

3) فرق حدثين : الحدث A فرق B هو الحدث الذي يقع إذا وفقط إذا وقع A ولم يقع B ورمزه $A \setminus B$

- **دالة الاحتمال** : ليكن Ω فضاء العينة لاختبار ، ولنفترض أن Ω مجموعة منتهية، نسمي دالة احتمال كل دالة منطلقها فضاء الأحداث $P(\Omega)$ وتأخذ قيمها في المجال $[0,1]$ وتحقق الشرطين :

1) $P(\Omega)=1$.

2) إذا كان $(A \cap B = \phi)$ كان $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

وعندئذٍ نسمي الثلاثية $(\Omega, P(\Omega), P)$ فضاءاً احتمالياً منتهياً.

وجدنا أن احتمال حدث يساوي مجموع احتمالات الأحداث البسيطة المكونة له.نقول عن فضاء احتمالي $(\Omega, P(\Omega), P)$ إنه **متساوي الاحتمال (منتظم)** إذا وفقط إذا كانت جميع الأحداث البسيطة متساوية الاحتمال. وعندها يعطى احتمال حدث A بالصيغة $P(A) = \dfrac{n(A)}{n(\Omega)}$.

نذكر ببعض المبرهنات في الاحتمال التي درستها في دراستك السابقة.

في فضاء احتمالي $(\Omega, P(\Omega), P)$ تتحقق الخواص الآتية أياً كان الحدثان A و B :

$\boxed{1}$ $P(\phi) = 0$

$\boxed{2}$ $P(A') = 1 - P(A)$

$\boxed{3}$ $A \subseteq B \Rightarrow P(A) \le P(B)$

$\boxed{4}$ $P(A \setminus B) = P(A) - P(A \cap B)$

$\boxed{5}$ $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

الاحتمال المشروط:

تعريف الاحتمال الشرطي : ليكن $(\Omega, P(\Omega), P)$ فضاءاً احتمالياً منتهياً ، وليكن B حدثاً يحقق $P(B) \neq 0$ ، عندئذٍ ، أياً كان الحدث A من $P(\Omega)$ ، نعرف احتمال A مشروطاً بوقوع B ، أو احتمال A علماً أن B قد وقع بأنه المقدار

$$P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

علوم للجميع
المدرس أحمد عرابي الأحمد ٠٩٥١٧٥١٩٢٨
تم التحميل من موقع علوم للجميع
http://www.3loom4all.com
مُدرِّس الرياضيات: أحمد عرابي الأحمد

مبرهنة : ليكن $\left(\Omega,\mathrm{P}(\Omega),P\right)$ فضاءاً احتمالياً منتهياً، وليكن B حدثاً يحقق $P(B)\neq 0$ ، عندئذٍ ، تكون الدالة

$$P_B:\mathrm{P}(\Omega)\to[0,1],A\to P_B(A)$$

دالة احتمالية، تسمى دالة الاحتمال المشروط بالحدث B.

نتائج :

1) لما كانت P_B دالة احتمال فإن جميع خواص دالة الاحتمال محققة وعلى وجه الخصوص :

$\boxed{1}$ $P_B(A')=1-P_B(A)$

$\boxed{2}$ $P_B(A_1\cup A_2)=P_B(A_1)+P_B(A_2)-P_B(A_1\cap A_2)$

2) قاعدة الاحتمال المركب لحدثين : إذا كان A و B حدثين من فضاء احتمالي $\left(\Omega,\mathrm{P}(\Omega),P\right)$ ، وكان $P(A)\neq 0$ و $P(B)\neq 0$ كان :

$$P(A\cap B)=P(B)P_B(A)$$
$$P(A\cap B)=P(A)P_A(B)$$

3) يمكن تعميم الخاصة الأخيرة على عددٍ منتهٍ من الأحداث ، فمثلاً إذا كانت A و B و C أحداثاً من $\mathrm{P}(\Omega)$ ، وكان $P(A)\neq 0$ و $P(A\cap B)\neq 0$ كان :

$$P(A\cap B\cap C)=P((A\cap B)\cap C)=P(A\cap B).P_{A\cap B}(C)$$

4) في حالة الفضاء المتساوي الاحتمال لدينا

$$P_B(A)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{n(A\cap B)}{n(B)}$$

الاستقلال الاحتمالي.

تعريف : إذا كان A و B حدثين في فضاء احتمالي $\left(\Omega,\mathrm{P}(\Omega),P\right)$ ، نقول إن الحدثين A و B مستقلان احتمالياً إذا وفقط إذا تحقق الشرط $P(A\cap B)=P(A).P(B)$.

في حالة $P(B)\neq 0$ يكافئ الاستقلال الاحتمالي للحدثين A و B أن يكون

$$P_B(A)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{P(A).P(B)}{P(B)}=P(A)$$

مبرهنة : في فضاء احتمالي $\left(\Omega,\mathrm{P}(\Omega),P\right)$ ، إذا كان الحدثان A و B مستقلين احتمالياً كان الحدثان A و B' مستقلين احتمالياً أيضاً.

الإثبات :

$$P(A\cap B')=P(A\setminus B)=P(A)-P(A\cap B)\qquad(*)$$

مُدرِّس الرياضيات:
أحمد عرابي الأحمد

ولأن A و B مستقلان احتمالياً فإن $P(A\cap B)=P(A).P(B)$ نعوض في العلاقة $(*)$ نجد

$$P(A\cap B')=P(A)-P(A).P(B)=P(A)[1-P(B)]=P(A).P(B')$$

فالحدثان A و B' مستقلان احتمالياً.

نتيجتان :

في فضاء احتمالي $(\Omega,\mathrm{P}(\Omega),P)$

1) إذا كان الحدثان A و B مستقلين احتمالياً كان الحدثان A' و B مستقلين احتمالياً .

2) إذا كان الحدثان A و B مستقلين احتمالياً كان الحدثان A' و B' مستقلين احتمالياً أيضاً.

المتغير العشوائي والتوزيع الاحتمالي.

تعريف : ليكن $(\Omega,\mathrm{P}(\Omega),P)$ فضاءاً احتمالياً منتهياً. نعرف المتغير العشوائي بأنه دالة منطلقها فضاء العينة Ω ، ومستقرها مجموعة الأعداد الحقيقية $\mathbb{R}$، إذا رمزنا إلى هذه الدالة بالرمز X ، رمزنا إلى مجموعة القيم التي تأخذها بالرمز $X(\Omega)$ ، وأسميناها مجموعة قيم المتغير العشوائي X ، وإذا كانت r إحدى القيم التي يأخذها المتغير العشوائي X ، أي $r\in X(\Omega)$ ، عرفنا الحدث $\{X=r\}$ بأنه مجموعة الأحداث البسيطة التي يأخذ عندها المتغير العشوائي X القيمة r.

تعريف : ليكن $(\Omega,\mathrm{P}(\Omega),P)$ فضاءاً احتمالياً منتهياً. وليكن X متغيراً عشوائياً على Ω مجموعة قيمه $X(\Omega)=\{r_1,r_2,...,r_n\}$. نسمي الدالة

$$f_X : X(\Omega)\to\mathbb{R} : r\mapsto f_X(r)=P(X=r)$$

القانون الاحتمالي للمتغير العشوائي X .

تعريف التوقع الرياضي : ليكن $(\Omega,\mathrm{P}(\Omega),P)$ فضاءاً احتمالياً منتهياً. وليكن X متغيراً عشوائياً على Ω مجموعة قيمه $X(\Omega)=\{r_1,r_2,...,r_n\}$ ، وقانونه الاحتمالي f_X . عندئذٍ نسمي العدد

$$\sum_{k=1}^{n} r_k.p(x=r_k)=r_1f_X(r_1)+r_2f_X(r_2)+...+r_nf_X(r_n)$$

التوقع الرياضي للمتغير العشوائي X ونرمز إليه بالرمز $E(X)$. أي :

$$E(X)=\sum_{k=1}^{n} r_kf_X(r_k)$$

مُدَرِّس الرياضيات:
أحمد عرابي الأحمد

الإحصاء:

تعريف : إذا كانت $\left(x_1, x_2, ..., x_n\right)$ تمثل عينة مكونة من n قراءة لمقدار إحصائي.عندئذٍ نعرف:

-**المتوسط الحسابي** لهذه العينة بأنه المقدار $\bar{x}$ المعرف بالصيغة :

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + ... + x_n}{n} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k$$

-**تباين العينة** $\left(x_1, x_2, ..., x_n\right)$ بأنه المقدار V_x المعرف بالصيغة :

$$V_x = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(x_k - \bar{x}\right)^2 = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k^{\,2} - \left(\bar{x}\right)^2 = \overline{\left(x^2\right)} - \left(\bar{x}\right)^2$$

حيث رمزنا بالرمز $\overline{\left(x^2\right)}$ إلى المتوسط الحسابي لمربعات قيم العينة أي $\left(x_1^{\,2}, x_2^{\,2}, ..., x_n^{\,2}\right)$.

-**الانحراف المعياري للعينة** $\left(x_1, x_2, ..., x_n\right)$ ، بأنه المقدار $\sigma_x = \sqrt{V_x}$. وهو مقدّر إحصائي يقيس مدى تباعد العينة عن متوسطها الحسابي.

تعريف:إذا كانت $\left\{\left(x_k, y_k\right) : 1 \le k \le n\right\}$ تمثل عينة مكونة من n قراءة لثنائيات من المقادير الإحصائية.عندئذٍ نعرف **تغاير هذه العينة** بأنه المقدار σ_{xy} المعرف بالصيغة :

$$\sigma_{xy} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(x_k - \bar{x}\right)\left(y_k - \bar{y}\right) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k y_k - \bar{x}.\bar{y} = \overline{x.y} - \bar{x}.\bar{y}$$

حيث $\bar{x}$ و $\bar{y}$ هما المتوسطان الحسابيان للعينتين $\left(x_1, x_2, ..., x_n\right)$ و $\left(y_1, y_2, ..., y_n\right)$ بالترتيب.

ورمزنا بالرمز $\overline{xy}$ إلى المتوسط الحسابي للجداءات $\left(x_1y_1, x_2y_2, ..., x_ny_n\right)$.

مبرهنة(دون برهان) : ليكن مقياس الخطأ

$$\Delta = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(f\left(x_i\right) - y_i\right)^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(ax_i + b - y_i\right)^2$$

أي المتوسط الحسابي لمربعات الأخطاء المرتكبة عند تقدير كل قيمة مُشاهدة y_i بالقيمة المحسوبة $f\left(x_i\right)$. عندئذٍ يأخذ الخطأ Δ أصغر قيمة له (ونرمز إليها بالرمز Δ^*) عندما يأخذ المقداران a, b القيمتين a^*, b^* المعرفتين كما يلي:

$$b^* = \bar{y} - a^*\bar{x} \qquad a^* = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x^2}$$

وعندئذٍ يكون $\Delta^* = \sigma_y^2\left(1 - r_{xy}^2\right)$ ، حيث $r_{xy} = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x\sigma_y}$.

تعريف : إذا كانت $\left\{\left(x_k, y_k\right) : 1 \le k \le n\right\}$ تمثل عينة مكونة من n قراءة لثنائيات من المقادير الإحصائية.عندئذٍ نعرف معامل ارتباط العينة بأنه المقدار r_{xy} المعطى بالصيغة :

مُدرِّس الرياضيات:
أحمد عرابي الأحمد

$$r_{xy}=\frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x\sigma_y}=\frac{\overline{x.y}-\bar{x}.\bar{y}}{\sqrt{\left(\overline{x^2}\right)-\left(\bar{x}\right)^2}\sqrt{\left(\overline{y^2}\right)-\left(\bar{y}\right)^2}}$$

حيث σ_{xy} هو تغاير العينة ، و σ_x,σ_y هما الانحرافان المعياريان للعينتين $\left(x_1,x_2,\dots,x_n\right)$ و $\left(y_1,y_2,\dots,y_n\right)$ بالترتيب.

تعريف: إذا كانت $\left\{\left(x_k,y_k\right):1\le k\le n\right\}$ تمثل عينة مكونة من n قراءة لثنائيات من المقادير الإحصائية.عندئذٍ نعرف مستقيم انحدار العينة بأنه المستقيم الذي معادلته $y=a^*x+b^*$ ، حيث :

$$b^*=\bar{y}-a^*\bar{x}\quad,\quad a^*=\frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x^2}$$

حيث σ_{xy} هو تغاير العينة ، و σ_x,σ_y هما الانحرافان المعياريان للعينتين $\left(x_1,x_2,\dots,x_n\right)$ و $\left(y_1,y_2,\dots,y_n\right)$ بالترتيب، و $\bar{x}$ و $\bar{y}$ هما المتوسطان الحسابيان للعينتين $\left(x_1,x_2,\dots,x_n\right)$ و $\left(y_1,y_2,\dots,y_n\right)$ بالترتيب.تُكتب معادلة مستقيم انحدار العينة بالصيغة المتناظرة الآتية :

$$\frac{y-\bar{y}}{\sigma_y}=r_{xy}.\left(\frac{x-\bar{x}}{\sigma_x}\right)$$

ملاحظة هامة جداً :

عادة نقول إن :

- **الارتباط قوي** في حالة $r_{xy}^{\ 2}\ge\frac{1}{2}$ أو $\left|r_{xy}\right|\ge 0.7$
- **الارتباط متوسط** في حالة $\frac{1}{4}\le r_{xy}^{\ 2}<\frac{1}{2}$ أو $0.5\le\left|r_{xy}\right|\le 0.7$
- **الارتباط ضعيف** في حالة $r_{xy}^{\ 2}<\frac{1}{4}$ أو $\left|r_{xy}\right|<0.5$.

-نلاحظ أيضاً أن إشارة r_{xy} هي من إشارة a^* (ميل مستقيم الانحدار) لذلك نقول إن :

- **الارتباط سلبي** في حالة $r_{xy}<0$ ،
- **الارتباط إيجابي** في حالة $r_{xy}>0$.

-إن حالة $r_{xy}=1$ أو $r_{xy}=-1$ توافق $\Delta^*=0$ ، أي تقع جميع نقاط سحابة الانتشار على المستقيم الذي معادلته $y=a^*x+b^*$ ، ويكون لدينا **ارتباط تام**.

-يمر مستقيم الانحدار $y=a^*x+b^*$ دوماً من النقطة $\left(\bar{x},\bar{y}\right)$.

علوم للجميع
المدرس: أحمد عرابي الأحمد ٠٩٥١٧٥١٩٢٨
تم التحميل من موقع علوم للجميع
http://www.3lom4all.com
مُدرِّس الرياضيات: أحمد عرابي الأحمد

الوحدة الثانية : المصفوفات والمعادلات الخطية.

التحويلات السطرية الأولية على المصفوفات:

علوم للجميع

لتكن المصفوفة

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & . & a_{1j} & . & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & . & a_{2j} & . & a_{2n} \\ . & . & . & . & . & . \\ a_{i1} & a_{i2} & . & a_{ij} & . & a_{in} \\ . & . & . & . & . & . \\ a_{m1} & a_{m2} & . & a_{mj} & . & a_{mn} \end{bmatrix}$$

ذات m سطراً و n عموداً ونرمزها اختصاراً بالرمز $A=\left[a_{ij}\right]$ حيث $i\in\{1,2,...,m\}, j\in\{1,2,...,n\}$ إن كل إجراء مما يأتي على المصفوفة A يسمى تحويلاً سطرياً على المصفوفة A :

1) المبادلة بين السطر i والسطر j ونرمزه $i\leftrightarrow j$.

2) ضرب السطر j بالعدد k حيث $k\neq 0$ ونرمزه $kR_j\to R_j$.

3) ضرب السطر j بالعدد k ثم إضافته إلى السطر i ونرمزه $R_i+kR_j\to R_i$

تم التحميل من موقع علوم للجميع
http://www.3lom4all.com

المصفوفتان المتكافئتان: نقول عن المصفوفتين A,B إنهما متكافئتين إذا كانت إحداهما تنتج عن الأخرى بإجراء عدد منتهٍ من التحويلات السطرية الأولية ونكتب عندئذٍ $A\sim B$.

المصفوفة المدرجة سطرياً (أو اختصاراً المصفوفة المدرجة):

تعريف 1 : إن أول عنصر غير معدوم في كل سطر (يُقرأ من اليسار إلى اليمين) في مصفوفة يسمى عنصراً رائداً في سطره.

تعريف 2 : السطر الصفري (المعدوم) في مصفوفة هو سطر جميع عناصره معدومة.

تعريف 3 : المصفوفة المدرّجة هي مصفوفة تحقق ما يأتي:

a) العنصر الرائد في كل سطر يقع إلى يمين العنصر الرائد في السطر الذي يسبقه.

b) الأسطر غير الصفرية تسبق الأسطر الصفرية (إن وجدت).

مبرهنة: أياً كانت المصفوفة A فإنه توجد على الأقل مصفوفة مدرجة مكافئة لها.

جمل المعادلات الخطية.

تعاريف واصطلاحات.

تعريف 1 : المعادلة الخطية ذات n مجهولاً $x_1,x_2,...,x_n$ هي كل معادلة من الشكل:

$$a_1x_1+a_2x_2+...+a_nx_n=b$$

حيث $a_1,a_2,...,a_n,b$ ثوابت حقيقية. تسمى الثوابت a_i $(i=1,2,...,n)$ أمثال حدود المعادلة، ويسمى b الحد الثابت للمعادلة.

مُدرِّس الرياضيات:
أحمد عرابي الأحمد

ملاحظة: تسمى الصيغة $a_1x_1 + a_2x_2 + ... + a_nx_n = b$ الشكل المعياري(النظامي) للمعادلة الخطية.

تعريف 2 : حل المعادلة الخطية $a_1x_1 + a_2x_2 + ... + a_nx_n = b$ هو إيجاد قيم المجاهيل $x_1, x_2, ..., x_n$ التي تحقق هذه المعادلة (أي تجعل طرفها الأول يساوي طرفها الثاني).

حل جملة المعادلات الخطية.

المعادلة الخطية ذات مجهولين:

ليكن $(a,b) \neq (0,0)$ ولنتأمل المعادلة الخطية $ax + by = c$ ذات المجهولين x, y.

تقبل هذه المعادلة عدداً غير منتهٍ من الحلول، حيث نحسب أحد المجهولين (الذي أمثاله غير معدومة) بدلالة الآخر.

مفاهيم أساسية:

- **جملة المعادلات الخطية:**

نسمي جملة m معادلة خطية بـ n مجهولاً هي $(x_1, x_2, ..., x_n)$ كل جملة معادلات من الشكل:

$$\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = b_m \end{array}$$

ونسمي قيم المجاهيل $(x_1, x_2, ..., x_n)$ التي تحقق كل معادلة من معادلات هذه الجملة **حلاً للجملة.**

- مجموعة الحل أو الحلول لجملة معادلات خطية هي مجموعة كل الحلول لهذه الجملة.
- وسنأخذ بعين الاعتبار الآتي:

إن قولنا حُل جملة المعادلات الخطية، يكافئ قولنا: اوجد مجموعة الحلول لجملة المعادلات الخطية.

حل جملة m معادلة خطية بـ n مجهولاً :

لتكن جملة m معادلة خطية بـ n مجهولاً :

$$(I) \ldots\ldots\ldots \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

سنجد فيما يأتي أنه قد يكون للجملة (I) حل وحيد، أو أن تكون مستحيلة الحل أو أن يكون لها عدد غير منتهٍ من الحلول.

يمكن باستعمال المصفوفات صياغة الجملة (I) على الشكل الآتي:

علوم الجميع
المدرس أحمد عرابي الأحمد ٠٩٥١٧٥١٩٢٨
تم التحميل من موقع علوم للجميع
http://www.3lom4all.com
مُدرِّس الرياضيات: أحمد عرابي الأحمد

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & & a_{ij} & & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_j \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_i \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

الذي يسمى الشكل المصفوفي للجملة (I) ويكتب اختصاراً : $A.X = B$.

حيث تسمى المصفوفة A من المرتبة $m \times n$ مصفوفة أمثال الجملة (I)، حيث يمثل كل عمود فيها أمثال مجهول واحد فقط في الجملة. وتسمى X مصفوفة (عمود) مجاهيل الجملة (I). وأخيراً تسمى B مصفوفة (عمود) الحدود الثابتة للجملة (I).

وعادةً نقرن بالجملة (I) المصفوفة الموسعة $H = [A|B]$ للجملة (I):

$$\left[\begin{array}{cccccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & & a_{ij} & & a_{in} & b_i \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right]$$

مما سبق نلاحظ ما يأتي:

- عدد معادلات الجملة (I)، يساوي m، وهو عدد أسطر المصفوفة A.
- عدد مجاهيل الجملة (I)، يساوي n وهو عدد أعمدة المصفوفة A .

الجملة المتجانسة والجملة غير المتجانسة:

الجملة المتجانسة: هي جملة معادلات خطية، الحد الثابت في كل منها معدوم.

أي إن مصفوفة حدودها الثابتة $B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$ وتمثلها المعادلة المصفوفية $A.X = O$ ومصفوفتها الموسعة $H = [A|O]$.

الجملة غير المتجانسة: هي جملة معادللات خطية مصفوفة الحدود الثابتة فيها ليست صفرية أي $B \neq O$ تمثلها المعادلة المصفوفية $A.X = B$، مصفوفتها الموسعة $H = [A|B]$.

علزم للجميع
تم التحميل من موقع علوم للجميع
http://www.3lom4all.com
المدرس: أحمد عرابي الأحمد ٠٩٥١٧٥١٩٢٨
مُدَرِّس الرياضيات: أحمد عرابي الأحمد

المبرهنتان الآتيتان تقدمان مجموعة الحلول لكل من الجملة المتجانسة، والجملة غير المتجانسة $A.X = B$.

مبرهنة 1 : (حالة الجملة غير المتجانسة) لتكن (I) جملة m معادلة خطية ذات n مجهولاً مصفوفتها الموسعة $H = [A|B]$.

- نرد المصفوفة الموسعة $H = [A|B]$ إلى الشكل المدرج.
- ليكن r عدد العناصر الرائدة في مصفوفة مدرجة مكافئة لمصفوفة الأمثال A .
- ليكن r' عدد العناصر الرائدة في مصفوفة مدرجة مكافئة للمصفوفة الموسعة H ، وهو دوماً يحقق المتراجحة $r' \geq r$.

عندئذٍ تتحقق واحدة فقط من الحالات الآتية:

1) $r = r' = n$.فيكون للجملة حل وحيد في هذه الحالة.

2) $r = r' < n$. للجملة عدد غير منتهٍ من الحلول بـ $n - r$ مجهولاً اختيارياً.

3) $r \neq r'$. الجملة مستحيلة الحل(متناقضة)

مبرهنة 2 : (حالة الجملة المتجانسة) لتكن (I) جملة متجانسة مكونة من m معادلة خطية ذات n مجهولاً مصفوفتها الموسعة $H = [A|O]$.باتباع خطوات المبرهنة السابقة، نلاحظ أنه لدينا دوماً في هذه الحالة $r = r'$ ، إذن نميز فقط حالتين :

1) $r = n$.فيكون للجملة حل وحيد هو الحل الصفري $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$ في هذه الحالة.

2) $r < n$. للجملة عدد غير منتهٍ من الحلول بـ $n - r$ مجهولاً اختيارياً.

ملاحظة:

- الجملة المتجانسة هي دوماً قابلة للحل لأن الحل الصفري حل واضح لها.
- إذا كان عدد المعادلات m أصغر من n عدد المجاهيل فإن للجملة المتجانسة عدد غير منتهٍ من الحلول.

طريقة غاوس لحل جملة m معادلة خطية ذات n مجهولاً :

تعتمد هذه الطريقة على المبرهنة الآتية:

مبرهنة: إذا كانت H المصفوفة الموسعة لجملة معادلات خطية وكانت H' مصفوفة مدرجة مكافئة للمصفوفة H فإن جملة المعادلات الخطية الموافقة للمصفوفة H' تكافئ جملة المعادلات الخطية الموافقة للمصفوفة H .

الخوارزمية الآتية توضح طريقة غاوس لحل جملة المعادلات الخطية $A.X = B$:

- نرد المصفوفة الموسعة $H = [A|B]$ إلى الشكل المدرج H' .
- نحصي العناصر الرائدة في المصفوفة المدرجة المكافئة للمصفوفة A وليكن r .
- نحصي العناصر الرائدة في المصفوفة H' وليكن r' .
- إذا كان $r \neq r'$ ، (عندها يظهر في المصفوفة H' سطر يكافئ المعادلة $0 = c$ ، حيث c عدد غير معدوم، وتكون الجملة مستحيلة ومجموعة الحلول تساوي ϕ في هذه الحالة).

علوم للجميع
المدرس: أحمد عرابي الأحمد
تم التحميل من موقع علوم للجميع
http://www.3lom4all.com
٠٩٥١٧٥١٩٢٧
مُدَرِّس الرياضيات: أحمد عرابي الأحمد

- إذا كان $r = r'$ عندئذٍ نكتب جملة المعادلات الموافقة للمصفوفة الموسعة H' .
- نحل جملة المعادلات الناتجة بطريقة التعويض(من الأدنى باتجاه الأعلى). فنحصل على حلول الجملة المعطاة حيث تكون وحيد الحل عندما $r = r' = n$ ، أو يكون لها عدد غير منتهٍ من الحلول في حالة $r = r' < n$ ونحلها بـ $n - r$ مجهولاً اختيارياً.

الوحدة الثالثة: الأعداد المركبة

- تعرفت سابقاً على الشكل الجبري للعدد المركب z هو $z = x + i.y$ حيث $x, y \in \mathbb{R}$.
- رمزنا مجموعة الأعداد المركبة بالرمز $\mathbb{C}$ حيث $i^2 = -1$ و i الوحدة التخيلية
- القوى الطبيعية للعدد i (حيث $n \in \mathbb{N}$) هي :

$$i^{4n} = 1 \quad , \quad i^{4n+1} = i \quad , \quad i^{4n+2} = -1 \quad , \quad i^{4n+3} = -i$$

- مرافق العدد العقدي $z = x + i.y$ هو $\bar{z} = x - i.y$ عندئذٍ :

$$z.\bar{z} = x^2 + y^2$$

$$z = \sqrt{x^2 + y^2}$$ (وهي طويلة العدد المركب z)

تحليل كثيرات الحدود في $\mathbb{C}$ إلى عوامل خطية بأمثال.

أولاً – المعادلة التربيعية من الشكل $z^2 = \beta : \beta \in \mathbb{R}$

1) $\beta \geq 0$ للمعادلة حلان هما $z_1 = \sqrt{\beta} \quad , \quad z_2 = -\sqrt{\beta}$

2) $\beta < 0$ فيكون $-\beta > 0$ وتكتب المعادلة عندئذٍ بالشكل $z^2 = -\beta.i^2$

للمعادلة في هذه الحالة حلان هما $z_1 = \sqrt{-\beta}.i \quad , \quad z_2 = -\sqrt{-\beta}.i$

ثانياً – المعادلة التربيعية من الشكل $az^2 + bz + c = 0$ حيث a, b, c أعداد حقيقية و $a \neq 0$.

للحل نحسب مميز المعادلة $\Delta = b^2 - 4ac$ ونميز الحالات الآتية :

$\boxed{1}$ إذا كان $\Delta > 0$ كان للمعادلة جذران $z_1 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \quad , \quad z_2 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$

$\boxed{2}$ إذا كان $\Delta = 0$ كان للمعادلة جذران $z_1 = \dfrac{-b}{2a}$

$\boxed{3}$ إذا كان $\Delta < 0$ كان للمعادلة جذران $z_1 = \dfrac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2a} \quad , \quad z_2 = \dfrac{-b - i\sqrt{-\Delta}}{2a}$ وهما جذران عقديان مترافقان وغير حقيقيين(في هذه الحالة عند معرفة أحد جذري المعادلة يمكن معرفة الجذر الآخر بأخذ مرافق الجذر الأول)

الجذران التربيعيان للعدد المركب $z = a + bi$ بالشكل الجبري

مُدَرِّس الرياضيات: أحمد عرابي الأحمد
المدرس: أحمد عرابي الأحمد ٠٩٥١٧٥٩٢٨
علوم للجميع
تم التحميل من موقع علوم للجميع
http://www.3lom4all.com

تعريف: نقول إن ω جذر تربيعي للعدد المركب $z = a + bi$ إذا وفقط إذا كان $\omega^2 = z$

خاصة:ليكن ω جذراً تربيعياً للعدد z .عندئذٍ تكون المجموعة $\{\omega, -\omega\}$ هي مجموعة جميع الجذور التربيعية للعدد z

ملاحظة هامة جداً : لإيجاد الجذور التربيعية $\omega = x + iy$ للعدد $z = a + ib$ نحل جملة المعادلات الثلاثة التالية:

$$x^2 - y^2 = a \qquad (1)$$

$$x^2 + y^2 = \sqrt{a^2 + b^2} \qquad (2)$$

$$xy = \frac{b}{2} \qquad (3)$$

التمثيل الهندسي للأعداد المركبة.

صورة العدد المركب:

- كل نقطة $M(x, y)$ تقابل عدداً مركباً $z = x + iy$ وكل عدد مركب $z = x + iy$ يقابل نقطة $M(x, y)$ نرمز لذلك بالرمز $M(z)$.
- كل نقطة $M(x, y)$ في المستوي تقابل متجه الموضع $OM = x.\vec{i} + y.\vec{j}$ وكل متجه $OM = x.\vec{i} + y.\vec{j}$ يقابل عدداً عقدياً $z = x + iy$ ونقول إن OM صورة العدد المركب z (ممثل العدد المركب z).

المستوي العقدي (المركب) :

صورة كل عدد مركب $z = x + 0i$ هي نقطة $N(x, 0)$ من المحور $x'x$ ، وبالعكس كل نقطة $N(x, 0)$ من محور الفواصل هي صورة لعدد مركب من الشكل $z = x + 0i$. لذلك نسمي محور الفواصل المحور الحقيقي.

صورة كل عدد مركب $z = 0 + yi$ هي نقطة $E(0, y)$ من المحور $y'y$ ، وبالعكس كل نقطة $E(0, y)$ من محور التراتيب هي صورة لعدد مركب من الشكل $z = 0 + yi$. لذلك نسمي محور الفواصل المحور التخيلي.

نسمي المستوي المعين بهذين المحورين المستوي المركب.

الأعداد المركبة وصورها كمتجهات في المستوي:

ليكن العددان $z_1 = x_1 + iy_1$, $z_2 = x_2 + iy_2$ عندئذٍ

1−صورة مجموع هذين العددين

$$z = z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$$

هي مجموع صورتيهما ، أي $OM = OM_1 + OM_2$ حيث OM_1 هي صورة z_1 ، و OM_2 هي صورة z_2 .إذن يمكن أن نمثل عملية جمع عددين مركبين بعملية جمع متجهين في المستوي وذلك حسب قاعدة متوازي الأضلاع في جمع المتجهات.

مُدرِّس الرياضيات:
أحمد عرابي الأحمد

2– صورة طرح هذين العددين

$$z' = z_1 - z_2 = \left(x_1 - x_2\right) + i\left(y_1 - y_2\right)$$

هي مجموع صورتيهما ، أي $OM = OM_1 - OM_2$ إذن يمكن أن نمثل عملية طرح عدد مركب من عدد مركب آخر بعملية طرح متجه من آخر في المستوي.

3– صورة العدد

$$\alpha.z_1 = \left(\alpha x_1\right) + i\left(\alpha y_1\right)$$

هو $ON = \alpha.z_1 = \left(\alpha x_1\right)\vec{i} + \left(\alpha y_1\right)\vec{j} = \alpha.OM_1$ إذن يمكن أن نمثل عملية ضرب عدد حقيقي بعدد مركب بعملية ضرب عدد حقيقي بمتجه في المستوي.

- مما سبق نجد أنه يمكن نقل عمليات على الأعداد المركبة إلى المتجهات الممثلة لهذه الأعداد في المستوي.
- ليكن العددان $z_1 = x_1 + iy_1$ ، $z_2 = x_2 + iy_2$ وصورتاهما OM_1 ، OM_2 بالترتيب، في المستوي $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$. نجد

$$z_1.\overline{z_2} = \left(x_1.x_2 + y_1.y_2\right) + i\left(x_1.y_2 - x_2.y_1\right)$$

نعلم أن الشرط اللازم والكافي لتوازي OM_1 ، OM_2 هو $x_1.y_2 - x_2.y_1 = 0$ وهو يكتب على الشكل $\mathbf{Im}\left(z_1.\overline{z_2}\right) = 0$.

ونعلم أن الشرط اللازم والكافي لتعامد OM_1 ، OM_2 هو $x_1.x_2 + y_1.y_2 = 0$ وهو يكتب على الشكل $\mathbf{Re}\left(z_1.\overline{z_2}\right) = 0$

الأعداد المركبة وصورها كنقاط في المستوي:

ليكن العددان $z_1 = x_1 + iy_1$ ، $z_2 = x_2 + iy_2$ وصورتاهما OM_1 ، OM_2 بالترتيب في المستوي $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$.

طول القطعة المستقيمة M_1M_2 يعطى بالعلاقة $M_1M_2 = \sqrt{\left(x_1 - x_2\right)^2 + \left(y_1 - y_2\right)^2}$ وهو نفسه طويلة العدد $M_1M_2 = \left|z_1 - z_2\right|$ أي $z_1 - z_2 = \left(x_1 - x_2\right) + i\left(y_1 - y_2\right)$

الصيغة الأسية للعدد المركب :

الشكل الأسي لعدد مركب طويلته تساوي الواحد :

ليكن العدد المركب $u = x + iy$ طويلته تساوي الواحد $x^2 + y^2 = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \left|u\right| = 1$ ، يوجد عدد حقيقي θ يحقق $x = \cos\theta$ و $y = \sin\theta$ ونستطيع كتابته على الشكل $u = \cos\theta + i\sin\theta$

إذا كان θ حقيقياً رمزنا إلى العدد المركب $u = \cos\theta + i\sin\theta$ بالرمز $e^{i\theta}$ ونسميه الشكل الأسي للعدد المركب u.

ملاحظات ونتائج :

علوم للجميع
المدرس أحمد عرابي الأحمد ٩٥١٧٥١٩٢٨
تم التحميل من موقع علوم للجميع
http://www.3lom4all.com
مُدرِّس الرياضيات: أحمد عرابي الأحمد

- $e^{i(-\theta)} = e^{-i\theta} = \cos(-\theta) + i\sin(-\theta)$
- $\sin\theta = \mathrm{Im}\left(e^{i\theta}\right)$, $\cos\theta = \mathrm{Re}\left(e^{i\theta}\right)$
- في الحالة الخاصة $\theta = 0$ نجد $e^{0} = \cos 0 + i\sin 0 = 1$
- من أجل أي عدد حقيقي θ فإن

$$e^{i(-\theta)} = e^{-i\theta} = \cos(-\theta) + i\sin(-\theta) \quad \Rightarrow$$

$$e^{-i\theta} = \cos\theta - i\sin\theta \quad \Rightarrow \quad e^{-i\theta} = \overline{\left(e^{i\theta}\right)}$$

- بما أن كل عدد مركب كويلته تساوي الواحد يتساوى مقلوبه ومرافقه $\left(|z| = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \bar{z} = \frac{1}{z}\right)$ ومنه نجد

$$\frac{1}{e^{i\theta}} = \overline{\left(e^{i\theta}\right)} = e^{-i\theta}$$

- $-e^{i\theta} = -\cos\theta - i\sin\theta = \cos(\theta+\pi) + i\sin(\theta+\pi) = e^{i(\theta+\pi)}$

التمثيل الهندسي للعدد المركب $u = e^{i\theta}$:

نمثل العدد $u = e^{i\theta}$ في المستوي المحدث بمعلم متجانس $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$ بنقطة $P(u)$ على دائرة نصف قطرها يساوي الواحد ومركزها مبدأ الإحداثيات O (دائرة الوحدة) بحيث يصنع نصف القطر OP مع المتجه $\vec{i}$ زاوية قياسها θ.

- النقطة الممثلة للعدد $\bar{u} = e^{-i\theta}$ ولتكن $M(\bar{u})$ هي نقطة مناظرة للنقطة $P(u)$ بالنسبة للمحور $x'x$.
- بينما النقطة الممثلة للعدد $-u = e^{i(\theta+\pi)}$ ولتكن $N(-u)$ هي نظيرة النقطة $P(u)$ بالنسبة إلى محور الإحداثيات.
- النقاط P_k الممثلة للأعداد $z_k = e^{i\left(\theta + \frac{k\pi}{2}\right)}$ حيث $k \in \{0,1,2,3\}$ تشكل رؤوساً لمربع يتقاطع قطراه في مبدأ الإحداثيات. ونسمي الأعداد التي تمثلها هذه النقاط بالأعداد التشاركية.
- وعموماً النقاط P_k الممثلة للأعداد $z_k = e^{i\left(\theta + \frac{k\pi}{n}\right)}$ حيث $k \in \{0,1,2,\ldots,n-1\}$ تشكل رؤوساً لمضلع منتظم ذي n ضلعاً مرسوم في دائرة الوحدة.

دستورا أويلر :

نستطيع كتابة النسب المثلثية لكل عدد حقيقي θ باستعمال الأعداد المركبة كما يلي

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta \quad ، \quad e^{-i\theta} = \cos\theta - i\sin\theta$$

فنجد بالجمع $\cos\theta = \frac{e^{+i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$ ، ثم بالطرح نجد $\sin\theta = \frac{e^{+i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$ وهما دستورا أويلر.

مُدَرِّس الرياضيات:
أحمد عرابي الأحمد

الجداء والقسمة :

أياً كان العددان الحقيقيان θ,φ كان

$$\begin{aligned} e^{i\theta}.e^{i\varphi} &= \left(\cos\theta + i\sin\theta\right)\left(\cos\varphi + i\sin\varphi\right) = \\ &= \left(\cos\theta\cos\varphi - \sin\theta\sin\varphi\right) + i\left(\sin\theta\cos\varphi + \cos\theta\sin\varphi\right) \\ &= \cos\left(\theta+\varphi\right) + i\sin\left(\theta+\varphi\right) = e^{i(\theta+\varphi)} \end{aligned}$$

ومنه الدستور $e^{i\theta}.e^{i\varphi} = e^{i(\theta+\varphi)}$ وذلك أياً كان $\theta,\varphi \in \mathbb{R}$.

كما أنه أياً كان العددان الحقيقيان θ,φ كان

$$\frac{e^{i\theta}}{e^{i\varphi}} = e^{i\theta}\frac{1}{e^{i\varphi}} = e^{i\theta}e^{-i\varphi} = e^{i\theta-i\varphi} = e^{i(\theta-\varphi)}$$

نتائج :

- في حالة $\theta = \varphi$ نستنتج من $e^{i\theta}.e^{i\varphi} = e^{i(\theta+\varphi)}$ أن $\left(e^{i\theta}\right)^2 = e^{2i\theta}$.
- يمكن تعميم قاعدة الرفع إلى أس طبيعي لتصبح $\left(e^{i\theta}\right)^n = e^{i\theta n}$ أياً كان $n \in \mathbb{N}$. وتبرهن بالاستقراء الرياضي كما يأتي :

في حالة $n \in \mathbb{N}$ لتكن $E(n)$ التالية : $\left(e^{i\theta}\right)^n = e^{i\theta n}$ أياً كان $\theta \in \mathbb{R}$.

عندما $n = 0$ لدينا اصطلاحاً $\left(e^{i\theta}\right)^0 = 1 = e^{i0}$ فالخاصة $E(0)$ صحيحة.

عندما $n = 1$ الخاصة $E(1)$ صحيحة وضوحاً $\left(e^{i\theta}\right)^1 = e^{i\theta}$. ولقد أثبتنا صحة الخاصة $E(2)$ في النقطة السابقة.

لنفترض صحة الخاصة $E(k)$ عند عدد طبيعي k. أي $\left(e^{i\theta}\right)^k = e^{i\theta k}$ عندها

$$\left(e^{i\theta}\right)^{k+1} = \left(e^{i\theta}\right)^k e^{i\theta} = e^{ik\theta}e^{i\theta} = e^{ik\theta+i\theta} = e^{i(k\theta+\theta)} = e^{i(k+1)\theta}$$

إذن $E(k+1)$ صحيحة أيضاً. فنكون قد أثبتنا صحة $E(n)$ أيا كانت قيمة $n \in \mathbb{N}$.

- تبقى القاعدة $\left(e^{i\theta}\right)^n = e^{i\theta n}$ صحيحة في حالة $n \in \mathbb{Z}$ لأنه عندما $n < 0$ يكون $-n > 0$ ويمكن أن نكتب

$$\left(e^{i\theta}\right)^n = \left(\frac{1}{e^{i\theta}}\right)^{-n} = \left(e^{i(-\theta)}\right)^{-n} = e^{i(-\theta)(-n)} = e^{i\theta n}$$

وتكتب هذه النتيجة بشكل مكافئ هو دستور دومواڤر.

مُدَرِّس الرياضيات:
أحمد عرابي الأحمد

دستور دومواڤر :

أياً كانت $\theta \in \mathbb{R}$ وأياً كانت $n \in \mathbb{Z}$ كان $\left(\cos\theta + i\sin\theta\right)^n = \cos\left(n\theta\right) + i\sin\left(n\theta\right)$

مبرهنة :

ليكن θ عدداً حقيقياً. إن مجموعة حلول المعادلة $e^{i\varphi} = e^{i\theta}$ (بالمجهول φ) هي $\left\{\theta + 2\pi k : k \in \mathbb{Z}\right\}$.

في الحقيقية لو ضربنا طرفي المساواة $e^{i\varphi} = e^{i\theta}$ بالعدد $e^{-i\varphi} \neq 0$ استنتجنا أن $e^{i(\varphi-\theta)} = 1$ وهذا يكافئ $\sin\left(\varphi-\theta\right) = 0$ & $\cos\left(\varphi-\theta\right) = 1$ أي أن $\varphi - \theta$ هو مضاعف صحيح للعدد 2π وهي النتيجة المطلوبة.

الشكل الأسي لعدد مركب :

كل عدد مركب غير معدوم z يقابله عدد طويلته تساوي الواحد هو $\frac{z}{|z|}$ (تحقق من ذلك)، فيوجد عدد حقيقي θ يحقق $\frac{z}{|z|} = e^{i\theta}$ وهذا يمكننا من كتابة العدد المركب غير المعدوم z بالشكل $z = |z|e^{i\theta}$ وإذا رمزنا $r = |z| > 0$ وهو الشكل الأسي للعدد المركب.ونسمي θ زاوية العدد المركب.

نتائج :

- استناداً إلى المبرهنة السابقة.تتحقق المساواة $r_1e^{i\theta_1} = r_0e^{i\theta_0}$ إذا وفقط إذا كان

$$\theta_1 \in \left\{\theta_0 + 2\pi k : k \in \mathbb{Z}\right\} \qquad \& \qquad r_1 = r_0$$

- وكذلك إذا كانت θ_0 زاوية للعدد المركب غير المعدوم z ، كان كل عدد حقيقي θ من المجموعة $\left\{\theta_0 + 2\pi k : k \in \mathbb{Z}\right\}$ أيضاً زاوية للعدد المركب z .
- يمكن كتابة كل عدد مركب $z = x + iy$ غير معدوم بالشكل $z = re^{i\theta}$ حيث

$$e^{i\theta} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} + i\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \qquad \& \qquad r = |z| = \sqrt{x^2+y^2}$$

إذن بحسب تعريف $e^{i\theta}$ تتعين θ من العلاقتين

$$\sin\theta = \frac{y}{|z|} \quad \& \quad \cos\theta = \frac{x}{|z|}$$

تم التحميل من موقع علوم للجميع
http://www.3lom4all.com
المدرس أحمد عرابي الأحمد ٠٩٥١٧٥١٩٢٨
مُدرِّس الرياضيات: أحمد عرابي الأحمد

جداء وقسمة عددين مركبين بالشكل الأسي :

ليكن العددان المركبان غير المعدومين $z_1 = r_1 e^{i\theta}$ ، $z_2 = r_2 e^{i\varphi}$

لنحسب الجداء $z_1 . z_2$:

$$z_1 . z_2 = r_1 e^{i\theta} . r_2 e^{i\varphi} = r_1 r_2 \left(e^{i\theta} . e^{i\varphi}\right) = r_1 r_2 e^{i(\theta+\varphi)}$$

وحاصل القسمة ينتج كما يأتي :

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1 e^{i\theta}}{r_2 e^{i\varphi}} = \frac{r_1}{r_2} \frac{e^{i\theta} . e^{-i\varphi}}{e^{i\varphi} e^{-i\varphi}} = \frac{r_1}{r_2} \frac{e^{i(\theta-\varphi)}}{1} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\theta-\varphi)}$$

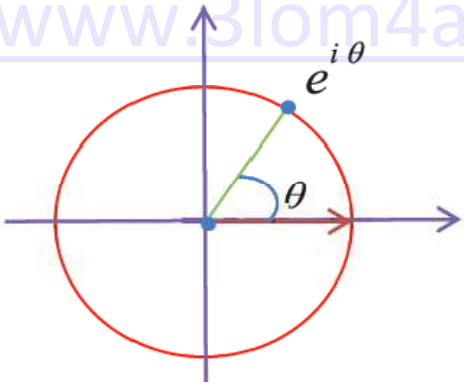
نتيجة :

إذا كان العدد المركب غير الصفري $z = re^{i\theta}$ وكان $n \in \mathbb{Z}$ كان $z^n = r^n e^{in\theta}$

تمثيل هندسي :

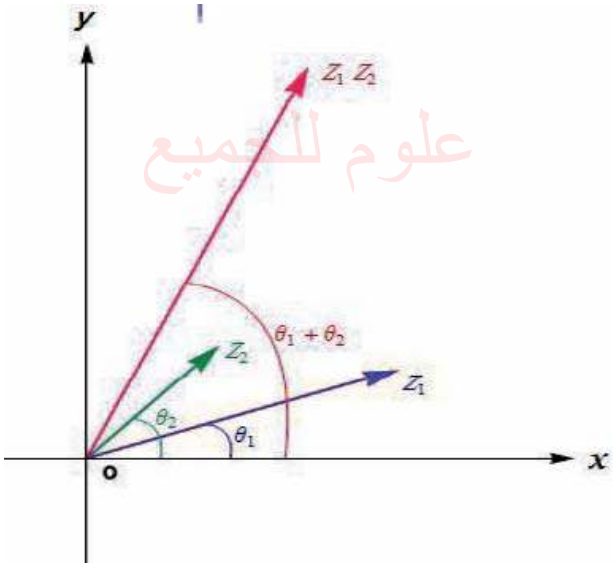
نمثل العدد المركب $z = re^{i\theta}$ في المستوي المحدث بمعلم متجانس $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$ بنقطة $P(z)$ على دائرة نصف قطرها يساوي r ومركزها مبدأ الإحداثيات O بحيث يصنع نصف القطر OP مع المتجه $\vec{i}$ زاوية قياسها θ.

http://www.3lom4all.com



ليكن العددان المركبان غير المعدومين $z_1 = r_1 e^{i\theta}$ ، $z_2 = r_2 e^{i\varphi}$ نمثل العدد $z = z_1 . z_2 = r_1 r_2 e^{i(\theta+\varphi)}$ كما في الرسم.

مُدَرِّس الرياضيات:
أحمد عرابي الأحمد



الجذور من المرتبة n لعدد مركب :

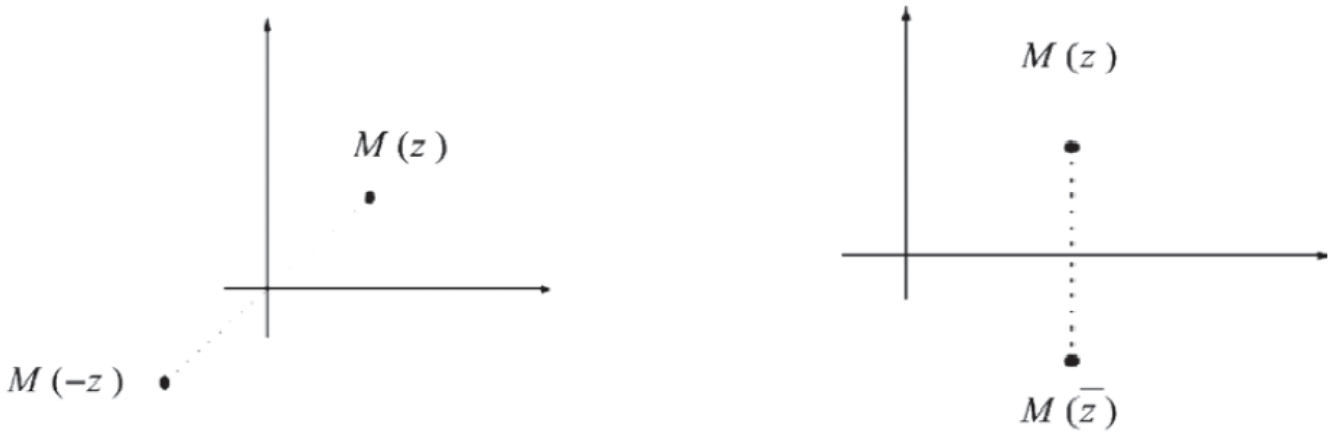
نقصد بالجذور من المرتبة n لعدد مركب $z_0 = r_0 e^{i\theta}$ مجموعة الأعداد المركبة التي تحقق $z^n = z_0$.

فإذا كان العدد $z = re^{i\theta}$ أحد هذه الجذور كان $r^n e^{in\theta} = r_0 e^{i\theta}$ ومنه $r^n = r_0$ ووُجِدَ $k \in \mathbb{Z}$ بحيث $n\theta = \theta_0 + 2\pi k$ وبقول آخر $r^n = \sqrt[n]{r_0}$ ويوجد $k \in \mathbb{Z}$ بحيث $\theta = \frac{\theta_0}{n} + \frac{2\pi k}{n}$ فتصبح الصيغة العامة للجذر $z = \omega_k = \sqrt[n]{r_0} e^{i\left(\frac{\theta_0}{n} + \frac{2\pi k}{n}\right)}$ وهنا نجعل k يأخذ فقط القيم $0, 1, 2, \ldots, n-1$ لأن القيم الأخرى له تكرر الجذور نفسها.

تطبيقات الأعداد المركبة في الهندسة المستوية :

-للعددين z و $\bar{z}$ صورتان في المستوي العقدي $M(z)$ و $M(\bar{z})$ متناظرتان بالنسبة للمحور $x'x$.

-للعددين z و $-z$ صورتان في المستوي العقدي $M(z)$ و $M(-z)$



علوم للجميع
المدرس: أحمد عرابي الأحمد
تم التحميل من موقع علوم للجميع
http://www.3lom4all.com
٠٥١٩٢٨

مُدَرِّس الرياضيات:
أحمد عرابي الأحمد

-لتكن النقطة A صورة العدد المركب z_A والنقطة B صورة العدد المركب z_B. عندئذٍ النقطة M منتصف القطعة المستقيمة AB تمثل العدد $\frac{z_A + z_B}{2}$

علوم للجميع

-لتكن النقاط A, B, C في المستوي العقدي والتي تمثل الأعداد z_A, z_B, z_C.

زاوية العدد $\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A}$ هي الفرق بين زاوية العدد $z_B - z_A$ وزاوية العدد $z_C - z_A$ فهي تعبر عن الزاوية $\widehat{BAC}$.

نتيجة : الشرط اللازم والكافي لتكون النقاط A, B, C على استقامة واحدة أن يكون العدد $\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A}$ حقيقياً.والشرط اللازم والكافي ليتعامد AB مع AC أن يكون العدد $\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A}$ تخيلياً بحتاً غير صفري.

الهندسة التحليلية

تم التحميل من موقع علوم للجميع

الوحدة الأولى: القطوع المخروطية

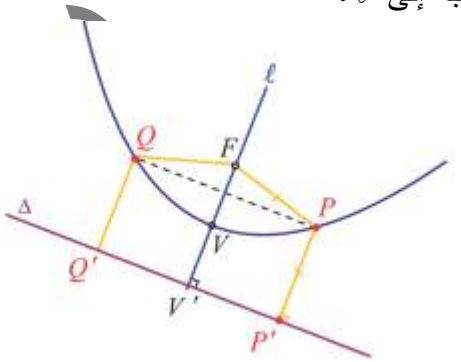
http://www.3lom4all.com

القطع المكافئ :

تعريف القطع المكافئ: ليكن Δ مستقيماً ما في المستوي ، ولتكن F نقطة لا تنتمي إلى Δ $(F \notin \Delta)$. نسمي قطعاً مكافئاً محرقه F ودليله Δ مجموعة نقاط المستوي التي تبعد عن F مسافة تساوي بعدها عن المستقيم Δ.

مبرهنة وتعريف: ليكن ρ القطع المكافئ الذي دليله Δ ومحرقه F. إن المستقيم ℓ المار بالنقطة F عمودياً على Δ هو محولا تناظر للقطع المكافئ ρ . وإذا كانت V' هي المرتسم القائم للمحرق F على الدليل Δ كانت النقطة V منتصف القطعة المستقيمة $[FV']$ نقطة من القطع المكافئ ρ نسميها ذروة القطع المكافئ.

الإثبات: لنلاحظ أولاً أن $F \in \ell$ وأن الدليل Δ متناظر بالنسبة إلى ℓ.

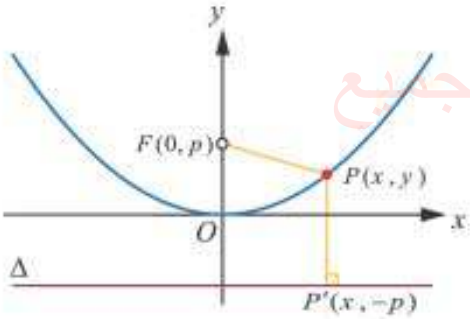


لتكن P نقطة من القطع المكافئ ρ ولتكن Q و Q' نظيرتي P و P' بالترتيب بالنسبة إلى ℓ. التناظر بالنسبة إلى مستقيم يحافظ على التعامد وعلى الأطوال، إذن $QQ' \perp \Delta$ و $QQ' = PP'$. ولدينا أيضاً $FQ = FP$ لأن ℓ محور القطعة المستقيمة $[PQ]$. إذن $FQ = QQ'$ والنقطة Q تنتمي إلى القطع المكافئ ρ.

من جهة أخرى لدينا بالتعريف $FV = VV'$ إذن V تنتمي إلى القطع المكافئ ρ.

مُدرِّس الرياضيات:
أحمد عرابي الأحمد

المعادلة المختزلة للقطع المكافئ:



ليكن Δ مستقيماً في المستوي، ولتكن F نقطة لا تقع على Δ ، ليكن ρ القطع المكافئ الذي دليله Δ ومحرقه F.

لنختر جملة محاور إحداثية متعامدة مبدؤها O منطبق على ذروة القطع المكافئ ρ، ومحور تراتيبها Oy منطبق على محور تناظر ρ . وبحيث تكون إحداثيات F هي $(0,p)$.(الرسم المجاور يوافق حالة $p>0$).

في هذه الحالة تكون معادلة الدليل Δ هي $y=-p$.

تنتمي النقطة $P(x,y)$ إلى القطع المكافئ ρ إذا وفقط إذا تحقق الشرط $FP=PP'$ أي

$$\sqrt{x^2+(y-p)^2}=\sqrt{(x-x)^2+(y+p)^2}$$

بتربيع الطرفين والاختصار نجد

$$x^2+(y-p)^2=(y+p)^2$$

$$x^2+y^2-2py+p^2=y^2+2py+p^2$$

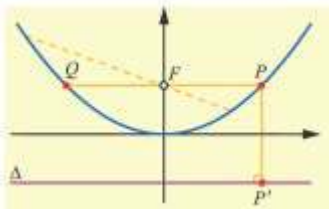
$$\boxed{x^2=4py}$$

وعليه نستنتج أن المعادلة القياسية لقطع مكافئ ذروته في مبدأ الإحداثيات، ومحور تناظره هو محور التراتيب هي:

$$x^2=4py$$

ويكون القطع مفتوحاً من الأعلى(أو من جهة التراتيب الموجبة) عندما $p>0$ ، ومفتوحاً من الأسفل(أو من جهة التراتيب السالبة) عندما $p<0$.

نسمي كل قطعة مستقيمة تمر بمحرق القطع المكافئ ويقع طرفاها على القطع وتراً محرقياً،ونسمي وتراً محرقياً أساسياً الوتر المحرقي الذي يوازي الدليل.في الشكل المجاور الوتر الأساسي المحرقي هو $[PQ]$ وطوله يحقق المساواة $PQ=4|p|$ يفيد الوتر الأساسي في رسم القطع المكافئ.



وبشكل مماثل يمكن إيجاد الشكل القياسي لمعادلة قطع مكافئ تنطبق ذروته على مبدأ الإحداثيات ويقبل محور الفواصل Ox محور تناظر . باختيار المحرق $F(p,0)$ ومعادلة الدليل $x=-p$ ، ثم باتباع الخطوات السابقة نحصل على الشكل القياسي الآتي لمعادلة القطع ρ : $y^2=4px$ ويكون القطع مفتوحاً من اليمين(أو من

مُدَرِّس الرياضيات:
أحمد عرابي الأحمد
تم التحميل من موقع علوم للجميع
http://www.3lom4all.com

جهة الفواصل الموجبة) عندما $p > 0$ ،ومفتوحاً من اليسار (أو من جهة الفواصل السالبة) عندما $p < 0$.

لنلخص فيما يأتي الخواص التي أثبتناها فيما سبق:

إن الخط البياني لكل من المعادلات الآتية هو قطع مكافئ ذورته في مبدأ الإحداثيات، ويحقق الخواص المشار إليها حول محرقه ودليله ومحور تناظره:

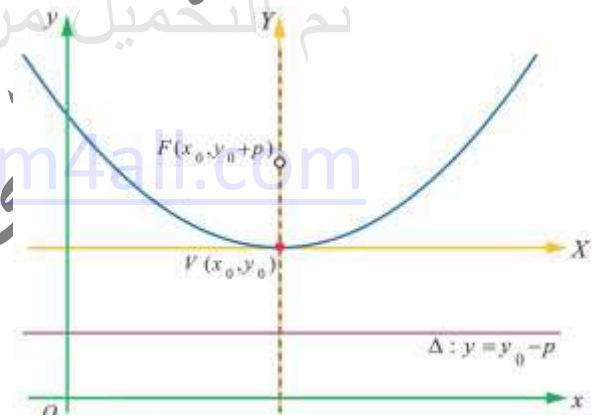
$\boxed{1}$ $x^2 = 4py$ ، المحرق $F(0,p)$ ومعادلة الدليل $y = -p$ ، ومحور التناظر Oy .

$\boxed{2}$ $y^2 = 4px$ ، المحرق $F(p,0)$ ومعادلة الدليل $x = -p$ ، ومحور التناظر Ox .

المعادلة العامة لقطع مكافئ محور تناظره يوازي أحد محوري الإحداثيات:

الحالة الأولى: المحور يوازي محور التراتيب:

لنبحث عن الصيغة العامة لمعادلة قطع مكافئ ، ذروته النقطة $V(x_0,y_0)$ ، ومحور تناظره يوازي محور التراتيب ، لما كان محرق القطع F واقعاً على محور التناظر استنتجنا أن إحداثيي المحرق هما (x_0,y_0+p) حيث $p \neq 0$ ،وعندئذٍ تكون معادلة الدليل $y = y_0 - p$ كما في الشكل الآتي(في حالة $p > 0$).



معادلة القطع المكافئ في الجملة $(V,\vec{i},\vec{j})$ هي $X^2 = 4pY$ استناداً إلى ما رأيناه سابقاً . ولكن دساتير الانتقال من الجملة $(V,\vec{i},\vec{j})$ إلى الجملة $(O,\vec{i},\vec{j})$ هي

$$y = y_0 + Y \quad , \quad x = x_0 + X$$

وعليه تكون معادلة القطع في الجملة $(O,\vec{i},\vec{j})$ هي

$$(x - x_0)^2 = 4p(y - y_0)$$

إذن الصيغة القياسية لمعادلة القطع المكافئ الذي ذروته عند (x_0,y_0) ومحور تناظره المستقيم الذي معادلته $x = x_0$ ، هي $(x - x_0)^2 = 4p(y - y_0)$. فإذا كان $p > 0$ كان القطع مفتوحاً من الأعلى(أو من جهة التراتيب الموجبة) ،وإذا كان $p < 0$ كان القطع مفتوحاً من الأسفل(أو من جهة التراتيب السالبة).

تم التحميل من موقع علوم للجميع
http://www.3lom4all.com
المدرس: أحمد الأحمد ٠٩٥١٧٥١٩٢٨
مُدَرِّس الرياضيات: أحمد عرابي الأحمد

الحالة الثانية : المحور يوازي محور الفواصل :

بأسلوب مماثل للحالة السابقة نبرهن أن الصيغة القياسية لمعادلة قطع مكافئ الذي ذروته عند (x_0, y_0)، ومحور تناظره المستقيم الذي معادلته $y = y_0$ هي

$$(y - y_0)^2 = 4p(x - x_0)$$

فإذا كان $p > 0$ كان القطع مفتوحاً من اليمين(أو من جهة الفواصل الموجبة) ،وإذا كان $p < 0$ كان القطع مفتوحاً من اليسار(أو من جهة الفواصل السالبة).

الخلاصة:

إن الخط البياني لكل من المعادلات الآتية، هو قطع مكافئ إحداثيات ذروته (x_0, y_0)،ويحقق الخواص المشار إليها حول محرقه ودليله ومحور تناظره :

$\boxed{1}$ $(x - x_0)^2 = 4p(y - y_0)$ ، المحرق $F(x_0, y_0 + p)$ ومعادلة الدليل $y = y_0 - p$ ومحور التناظر هو المستقيم الذي معادلته $x = x_0$.

$\boxed{2}$ $(y - y_0)^2 = 4p(x - x_0)$ ، المحرق $F(x_0 + p, y_0)$ ومعادلة الدليل $x = x_0 - p$ ومحور التناظر هو المستقيم الذي معادلته $y = y_0$.

خواص المماس لقطع مكافئ في نقطة منه:

تعريف: ليكن ρ قطعاً مكافئاً، ولتكن M نقطة من هذا القطع. نقول إن المستقيم d يمس القطع ρ في M، أو إنه مماس للقطع ρ في M إذا تحقق الشرطان التاليان:

$\boxed{1}$ المستقيم d لا يوازي محور تناظر القطع.

$\boxed{2}$ النقطة M هي النقطة الوحيدة المستركة بين القطع ρ والمستقيم d.

تعريف: نسمي المستقيم العمودي على المماس لقطع مكافئ في نقطة التماس المستقيم الناظم على القطع المكافئ عند هذه النقطة.

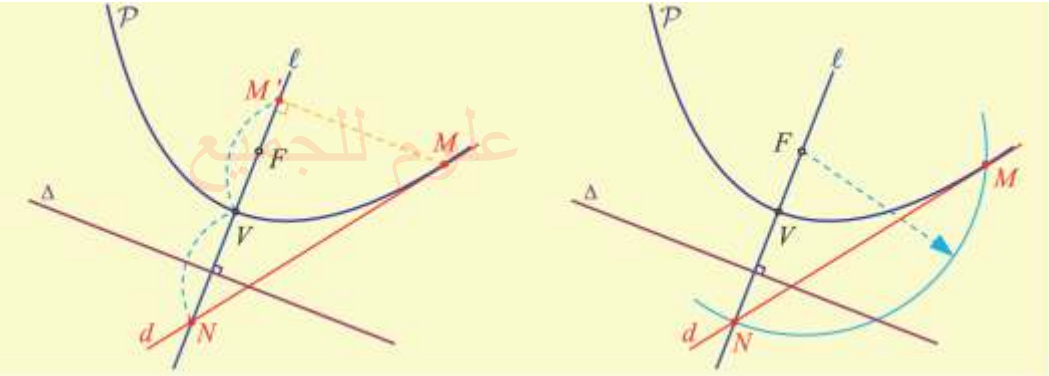
نبرهن في هذه الفقرة خاصة هندسية مهمة تتصف بها المماسات لقطع مكافئ.

مبرهنة: نتأمل قطعاً مكافئاً ρ دليله المستقيم Δ ومحرقه F ومحور تناظره ℓ وذروته V لتكن M نقطة من القطع المكافئ ρ مختلفة عن ذروته.

$\boxed{1}$ إن المماس d للقطع المكافئ ρ في M يقطع ℓ في نقطة N هي نظيرة M' المسقط القائم على ℓ للنقطة M بالنسبة إلى الذروة V ، أما المماس للقطع المكافئ ρ في ذروة القطع فهو العمود على محور التناظر ℓ في V.

$\boxed{2}$ إن المماس d للقطع المكافئ ρ في M يقطع ℓ في نقطة N تقع خارج القطع وتبعد عن محرقه F مسافة تساوي بعد المحرق عن M ، أي $FM = FN$.

علوم للجميع
المدرس: أحمد عرابي الأحمد
تم التحميل من موقع علوم للجميع
http://www.3lom4all.com
٠٩٥١٧٥١٩٢٨
مُدَرِّس الرياضيات:
أحمد عرابي الأحمد



الإثبات:

لنختر جملة محاور إحداثية متجانسة مبدؤها V ذروة القطع ρ، ومحور التراتيب فيها منطبق على محور تناظر القطع، عندئذٍ تصبح معادلة القطع ρ في هذه الجملة:

$$x^2 = 4py \qquad (1)$$

حيث $(0,p)$ هما إحداثيا المحرق F. لتكن $M(a,b)$ نقطة من القطع ρ، إذن:

$$a^2 = 4pb \qquad (2)$$

إن معادلة أي مستقيم يمر بالنقطة M، ولا يوازي محور القطع هي من الصيغة

$$y - b = m(x - a) \qquad (3)$$

حيث m ميل هذا المستقيم الذي سنرمز إليه بالرمز d_m.

لدراسة تقاطع d_m مع ρ نبحث عن الحل المشترك للمعادلتين (1) و (3) فنحسب y من (3) ونعوض في (1) نجد:

$$x^2 = 4pb + 4pm(x - a)$$

وعملاً بالعلاقة (2) نستنتج أن

$$x^2 = a^2 + 4pm(x - a)$$

$$x^2 - a^2 = 4pm(x - a) \Rightarrow (x + a)(x - a) = 4pm(x - a) \Rightarrow$$

$$(x - a)(x + a - 4pm) = 0$$

إذن هناك حلان:

- $x_1 = a$ وهي فاصلة النقطة M نفسها، وهذه النتيجة متوقعة لأن المستقيم d_m يمر أصلاً بهذه النقطة.
- $x_2 = 4pm - a$ وهي فاصلة نقطة التقاطع الثانية بين المستقيم d_m و ρ.
- إذن يكون d_m مماساً للقطع ρ، إذا تساوت الفاصلتان السابقتان أي إذا كان $x_1 = x_2$ وهذا يضع شرطاً يفيد في تعيين ميل المستقيم $4pm - a = a$ ومنه نجد ميل المماس:

$$m = \frac{a}{2p} \qquad (4)$$

مُدَرِّس الرياضيات:
أحمد عرابي الأحمد

ومعادلة المماس هي $4p\left(y-b\right)=a\left(x-a\right)$ وبالاستفادة من $\left(2\right)$ نجد

$$d: 4py=a\left(2x-a\right) \qquad \left(5\right)$$

إن النقطة N نقطة تقاطع d مع محور التناظر ℓ الذي معادلته $x=0$ هي

$$N\left(0,-\frac{a^2}{4p}\right)=N\left(0,-b\right)$$

أما النقطة M' مسقط النقطة M على ℓ فهي $M'\left(0,b\right)$. ومن الواضح أن N هي نظيرة النقطة M' بالنسبة إلى الذروة $V\left(0,0\right)$.

أما في الحالة التي تكون فيها M منطبقة على ذروة القطع فنستنتج من العلاقة $\left(4\right)$ أن ميل المماس في هذه الحالة يساوي الصفر أي يكون المماس موازياً لمحور الفواصل أو عمودياً على محور تناظر القطع المكافئ ρ وهذه هي الخاصة الأولى $\boxed{1}$.

ومن ناحية أخرى، لتكن Q المسقط القائم للنقطة M على الدليل Δ نحسب بسهولة المسافة FN لنجد $FN=\left|p+b\right|$، ونجد كذلك $MQ=\left|p+b\right|$ إذن $FN=MQ$، ولكن عملاً بتعريف القطع المكافئ لدينا $FM=MQ$ إذن $FM=FN$ وهي الخاصة $\boxed{2}$ وبهذا يكتمل إثبات المبرهنة.

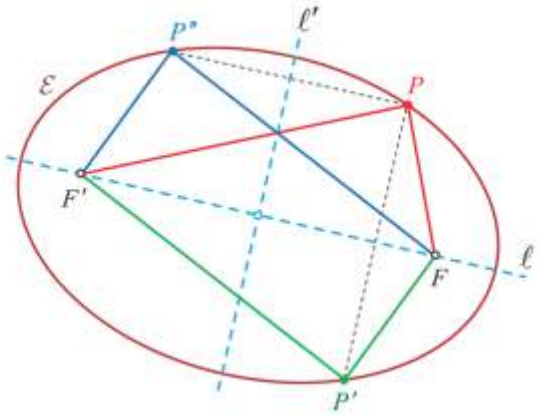
القطع الناقص :

تعريف القطع الناقص: لتكن F,F' نقطتين في المستوي، نسمي قطعاً ناقصاً محرقاه F,F' مجموعة جميع نقاط المستوي التي مجموع بعديها عن F,F' يساوي مقداراً ثابتاً.

مبرهنة وتعريف: ليكن $\mathcal{E}$ القطع الناقص الذي محرقاه F,F'. إن المستقيم ℓ المار بالمحرقين محور تناظر للقطع الناقص $\mathcal{E}$، نسميه المحور المحرقي أو المحور الأساسي. وكذلك يكون المستقيم ℓ'، محور القطعة المستقيمة $\left[FF'\right]$ محور تناظر للقطع الناقص $\mathcal{E}$. نسميه المحور اللامحرقي أو المحور الثانوي.

الإثبات:

لتكن P نقطة من القطع الناقص $\mathcal{E}$. ولتكن P',P'' نظيرتي P بالنسبة إلى كل من ℓ,ℓ' بالترتيب.



التناظر بالنسبة إلى مستقيم يحافظ على الأطوال.إذن من جهة أولى لدينا :

$$FP=FP' \quad , \quad F'P=F'P'$$

مُدَرِّس الرياضيات: أحمد عرابي الأحمد
المدرس: أحمد عرابي الأحمد ٠٩٥١٧٥١٩٢٨
http://www.3lom4all.com

لأن F,F' تنتميان إلى ℓ ؛ ومنه $FP'+F'P'=FP+F'P$ ، أي $P'\in\varepsilon$.

ومن جهة ثانية لدينا

$$FP''=F'P \quad , \quad F'P''=FP$$

لأن F,F' متناظرتان بالنسبة إلى ℓ' . ومنه $FP''+F'P''=FP+F'P$ ، أي $P''\in\varepsilon$

نتيجة : ليكن ε القطع الناقص الذي محرقاه F,F' . إن منتصف القطعة المستقيمة $[FF']$ مركز تناظر للقطع الناقص؛ لأنه نقطة تقاطع محوري التناظر ℓ,ℓ' .

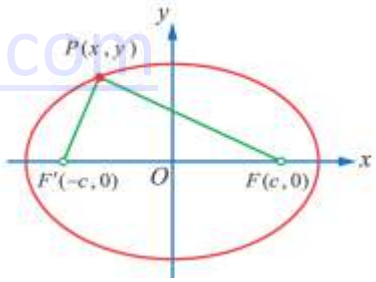
المعادلة المختزلة للقطع الناقص:

لتكن F,F' نقطتان مختلفتان في المستوي، وليكن ε قطعاً ناقصاً محرقاه F,F' . لنختر جملة محاور إحداثية متعامدة مبدؤها O منطبق على مركز تناظر القطع، ومحور فواصلها Ox منطبق على المحور المحرقي للقطع. إذا كانت إحداثيات F هي $(c,0)$ حيث $c>0$ كانت $(-c,0)$ هي إحداثيات F' . وكانت المسافة بين المحرقين $2c$.

لنرمز بالرمز $2a$ إلى المقدار الثابت الذي يساوي $FP+F'P$ أياً كانت النقطة P من ε.

لاحظ أنه، استناداً إلى المتراجحة المثلث لدينا :

$$2a=FP+F'P>FF'=2c$$



أي $a>c$.

تنتمي النقطة $P(x,y)$ إلى القطع الناقص ε إذا وفقط إذا تحقق الشرط $FP+F'P=2a$ ، أي:

$$\sqrt{(x-c)^2+(y-0)^2}+\sqrt{(x+c)^2+(y-0)^2}=2a$$

أو

$$\sqrt{(x-c)^2+(y-0)^2}=2a-\sqrt{(x+c)^2+(y-0)^2}$$

وبتربيع طرفي هذه المساواة، نجد:

$$(x-c)^2+y^2=4a^2-4a\sqrt{(x+c)^2+y^2}+(x+c)^2+y^2$$

وهذا يكافئ

$$a\sqrt{(x+c)^2+y^2}=a^2+cx$$

وبتربيع طرفي هذه المساواة مجدداً ، نجد :

$$a^2\left[(x+c)^2+y^2\right]=a^4+2a^2cx+c^2x^2$$

مُدَرِّس الرياضيات: أحمد عرابي الأحمد
تم التحميل من موقع علوم للجميع
http://www.3lom4all.com
المدرس أحمد عرابي الأحمد ٠٩٥١٧٥١٢٣١

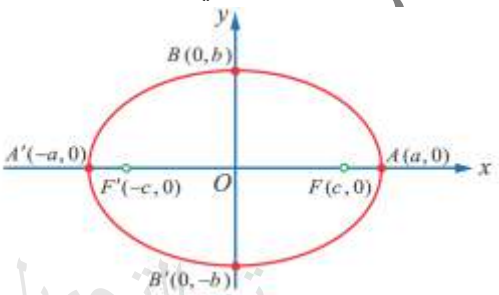
وهذا يكافئ

$$\left(a^2-c^2\right)x^2+a^2y^2=a^2\left(a^2-c^2\right)$$

إذا عرفنا $b=\sqrt{a^2-c^2}$، وقسمنا الطرفين على المقدار a^2b^2 وصلنا إلى الصيغة

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

حيث $0<b,c<a$ و $a^2=b^2+c^2$، هذه هي الصيغة المختزلة القياسية لمعادلة قطع ناقص محرقاه على محور الفواصل، ومركز تناظره في المبدأ.



يمكن تعيين النقاط التي يلاقي فيها القطع الناقص $\mathcal{E}$ محورَ الفواصل بجعل $y=0$ في المعادلة، فنجد $x^2=a^2$ أو $x\in\{-a,a\}$ وهذا يوافق الذروتين $A(a,0),A'(-a,0)$. تسمى القطعة المستقيمة $[AA']$ القطر الرئيسي أو الكبير وطولها $2a$.

وبالمثل يمكن تعيين النقاط التي يلاقي فيها القطع الناقص $\mathcal{E}$ محور التراتيب بجعل $x=0$ في المعادلة، فنجد $x^2=b^2$ أو $x\in\{-b,b\}$ وهذا يوافق الذروتين $B(b,0),B'(-b,0)$. تسمى القطعة المستقيمة $[BB']$ القطر الثانوي أو الصغير وطولها $2b$، ولأن $a>b$ يكون القطر الرئيسي دوماً أكثر طولاً من القطر الثانوي.

القطوع الناقصة التي ينطبق محورها المحرقي على محور التراتيب:

يمكن أن يكون المحور المحرقي لقطع ناقص مركزه مبدأ الإحداثيات منطبقاً على محور التراتيب Oy كما هو مبين في الشكل، في هذه الحالة تكون إحداثيات طرفي القطر الكبير هما الذروتان $(0,b),(0,-b)$ ويكون المحرقان $F(0,c),F'(0,-c)$ أما طرفا القطر الصغير فهما النقطتان $(a,0),(-a,0)$ نلاحظ في هذه الحالة أن $b>a$ وأن $b^2=c^2+a^2$.

تنتمي النقطة $P(x,y)$ إلى القطع إذا وفقط إذا تحقق الشرط $FP+F'P=2b$ أي

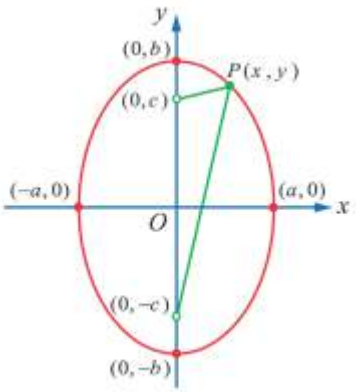
$$\sqrt{(x-0)^2+(y-c)^2}+\sqrt{(x-0)^2+(y+c)^2}=2b$$

التي تُخْتزل كما في الحالة السابقة إلى الصيغة

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

(ولكن هنا $b>a$).

تم التحميل من موقع علوم للجميع
http://www.3lom4all.com
مدرس الرياضيات: أحمد عرابي الأحمد ٠٩٥١٧٥٠٩٢٨
مُدَرِّس الرياضيات: أحمد عرابي الأحمد



المعادلة القياسية لقطع ناقص ذروته في المبدأ:

إن المعادلة القياسية لقطع ناقص مركزه $O(0,0)$ ومحوره المحرقي منطبق على أحد المحورين الإحداثيين هي من الشكل:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$ حيث b,a عددان موجبان يحققان $a \neq b$

$\boxed{1}$ حالة $a>b$. في هذه الحالة ينطبق المحور المحرقي على محور الفواصل Ox، ويقع طرفا القطر الكبير عند الذروتين $(a,0),(-a,0)$ وطوله $2a$. أما طرفا القطر الصغير فيقعان عند الذروتين $(0,b),(0,-b)$ وطوله يساوي $2b$. وأخيراً يقع محرقا القطع عند $(c,0),(-c,0)$ حيث $c^2=a^2-b^2$.

$\boxed{2}$ حالة $a<b$. في هذه الحالة ينطبق المحور المحرقي على محور التراتيب Oy، ويقع طرفا القطر الكبير عند الذروتين $(0,b),(0,-b)$ وطوله $2b$. أما طرفا القطر الصغير فيقعان عند الذروتين $(a,0),(-a,0)$ وطوله يساوي $2a$. وأخيراً يقع محرقا القطع عند $(0,c),(0,-c)$ حيث $c^2=b^2-a^2$.

المعادلة القياسية لقطع ناقص مركزه ليس في المبدأ :

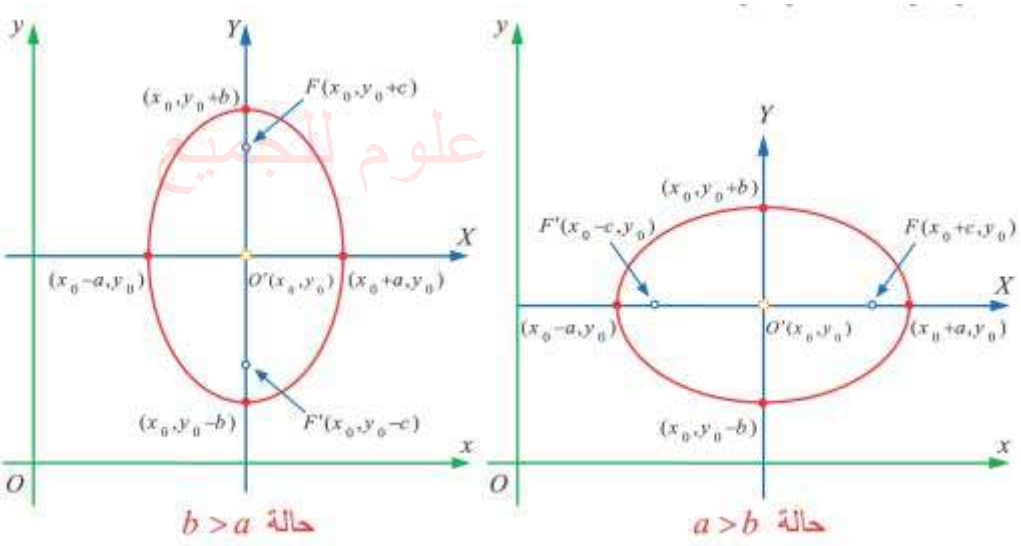
إن المعادلة القياسية لقطع ناقص مركزه $O'(x_0,y_0)$، ومحوره المحرقي منطبق على أحد المحورين الإحداثيين، هي من الشكل :

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2}+\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=1$$ حيث a,b عددان موجبان يحققان $a \neq b$.

$\boxed{1}$ حالة $a>b$. في هذه الحالة يوازي المحور المحرقي محورَ الفواصل Ox، ويقع طرفا القطر الكبير عند الذروتين $(x_0+a,y_0),(x_0-a,y_0)$ وطوله $2a$. أما طرفا القطر الصغير فيقعان عند الذروتين $(x_0,y_0+b),(x_0,y_0-b)$ وطوله يساوي $2b$. وأخيراً يقع محرقا القطع عند $(x_0+c,y_0),(x_0-c,y_0)$ حيث $c^2=a^2-b^2$.

$\boxed{2}$ حالة $a<b$. في هذه الحالة يوازي المحور المحرقي محورَ التراتيب Oy، ويقع طرفا القطر الكبير عند الذروتين $(x_0,y_0+b),(x_0,y_0-b)$ وطوله $2b$. أما طرفا القطر الصغير فيقعان عند الذروتين $(x_0+a,y_0),(x_0-a,y_0)$ وطوله يساوي $2a$. وأخيراً يقع محرقا القطع عند $(x_0,y_0+c),(x_0,y_0-c)$ حيث $c^2=b^2-a^2$.

علوم للجميع
تم التحميل من موقع علوم للجميع
http://www.3lom4all.com
أ. أحمد عرابي الأحمد ٠٩٦٧٥١٩٢٨
مُدرِّس الرياضيات: أحمد عرابي الأحمد



خواص المماس لقطع ناقص في نقطة منه :

تعريف : ليكن $\mathcal{E}$ قطعاً ناقصاً، ولتكن M نقطة من هذا القطع ، نقول إن المستقيم d يمسّ القطع $\mathcal{E}$ في M ، أو إنه مماس للقطع $\mathcal{E}$ في M إذا كانت M هي النقطة الوحيدة المشتركة بين القطع $\mathcal{E}$ والمستقيم d .

تعريف : نسمي المستقيم العمودي على المماس لقطع ناقص في نقطة التماس المستقيم الناظم على القطع الناقص عند هذه النقطة.

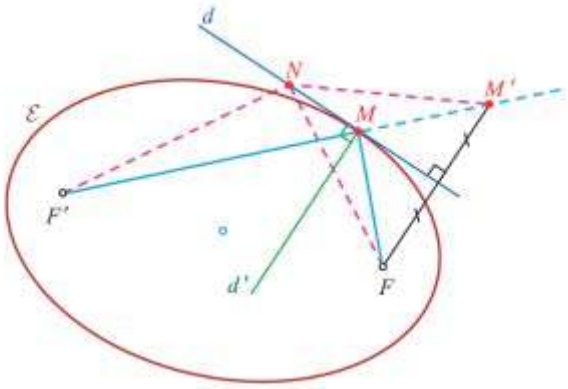
نبرهن في هذه الفقرة خاصة هندسية تتصف بها المماسات لقطع ناقص.

مبرهنة : نتأمل قطعاً ناقصاً $\mathcal{E}$ محرقاه F,F' ، وطول قطره الكبير 2ℓ . لتكن M من القطع الناقص $\mathcal{E}$ مختلفة عن ذروتيه عند طرفي قطره الكبير .

$\boxed{1}$ إن المماس d للقطع الناقص $\mathcal{E}$ في M ، هو محور القطعة المستقيمة $[FM']$ ، حيث M' هي النقطة من نصف المستقيم $[FM')$ التي تحقق $F'M'=2\ell$.

$\boxed{2}$ إن الناظم d' على القطع الناقص $\mathcal{E}$ في M ، هو المنصف الداخلي للزاوية $\widehat{F'MF}$.

الإثبات :



$\boxed{1}$ ليكن d محورَ القطعة المستقيمة $[FM']$ ، ولنبرهن أنه المماس للقطع الناقص $\mathcal{E}$ في M .

استناداً إلى تعريف M' لدينا

$$MM'=2\ell-MF'=MF+MF'-MF'=MF$$

مُدرِّس الرياضيات: أحمد عرابي الأحمد
علوم للجميع
تم التحميل من موقع علوم للجميع
http://www.3lom4all.com
أحمد عرابي الأحمد ٠٩٥١٧٥١٩٢٨

إذن M تقع على محور القطعة المستقيمة $[FM']$ أي d . لنبرهن أن التقاطع $d \cap \mathcal{E}$ يقتصر على النقطة M .

لتكن N نقطة ما من d مختلفة عن M . إذن F', N, M' ليست على استقامة واحدة واستناداً إلى متراجحة المثلث يكون لدينا :

$$F'N + NM' > F'M' = 2\ell$$

ولكن N تنتمي إلى d (محور القطعة المستقيمة $[FM']$) إذن $NM' = NF$ وبالتعويض في المتراجحة السابقة نجد

$$F'N + NF > 2\ell$$

وهذا يعني أن N لا تنتمي إلى القطع $\mathcal{E}$.إذن M هي النقطة الوحيدة من d التي تنتمي إلى $\mathcal{E}$، فالمستقيم d يمس $\mathcal{E}$ في M .

$\boxed{2}$ لنلاحظ أن d هو منصف الزاوية $\widehat{FMM'}$ ، لأنه محور القاعدة في المثلث المتساوي الساقين FMM' . إذن d هو المنصف الخارجي للزاوية $\widehat{F'MF}$ وهي الخاصة المطلوبة.

تعيين معادلة المماس (أو الناظم) لقطع ناقص في نقطة منه مختلفة عن الذرا :

بوجهٍ عام تُكتب معادلة قطع ناقص $\mathcal{E}$ محوره المحرقي يوازي أحد المحورين الإحداثيين بالصيغة :

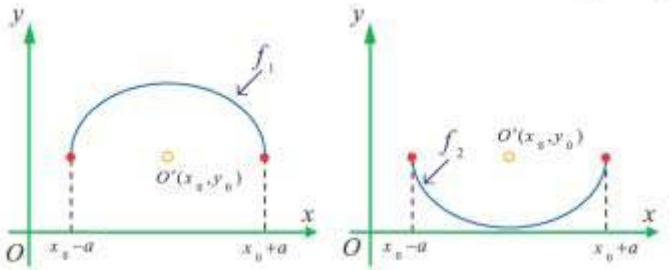
$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1$$

هذا يقتضي أن يكون $\frac{(x-x_0)^2}{a^2} \le 1$ ومن ثم $x \in [x_0 - a, x_0 + a]$. يمكن النظر إلى $\mathcal{E}$ وكأنه اجتماع الخطين البيانيين $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2$ لدالتين f_1, f_2 معرفتين على $[x_0 - a, x_0 + a]$ بالصيغتين

$$y = f_1(x) = y_0 + b\sqrt{1 - \frac{(x-x_0)^2}{a^2}}$$

$$y = f_2(x) = y_0 - b\sqrt{1 - \frac{(x-x_0)^2}{a^2}}$$

كما هو موضح في الشكل :



نلاحظ أن الدالتين اشتقاقيتان على المجال المفتوح $I =]x_0 - a, x_0 + a[$. وإذا كانت $M(u,v)$ نقطة ما من القطع $\mathcal{E}$ مختلفة عن الذروتين $(x_0 + a, y_0), (x_0 - a, y_0)$ ، انتمت M أما إلى الجزء العلوي $\mathcal{E}_1$ أو إلى الجزء السفلي $\mathcal{E}_2$ من القطع الناقص $\mathcal{E}$. لنناقش إذن حالتين :

علوم للجميع
المدرس: أحمد عرابي الأحمد ٠٩٥١٧٥١٩٢٨
تم التحميل من موقع علوم للجميع
http://www.3lom4all.com
مُدَرِّس الرياضيات: أحمد عرابي الأحمد

- حالة $x \in \mathcal{E}_1$ ، أي $v = f_1(u)$ مع $u \in I$ ونرغب في تعيين ميل المماس عند M للخط $\mathcal{E}_1$ أي قيمة العدد المشتق $m = f_1'(u)$. ولكن في حالة $x \in I$ ، لدينا

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(f_1(x)-y_0)^2}{b^2} = 1$$

وبالاشتقاق نجد

$$\frac{2(x-x_0)}{a^2} + \frac{(f_1(x)-y_0)f_1'(x)}{b^2} = 0$$

ومنه

$$m = -\frac{b^2}{a^2}\frac{u-x_0}{v-y_0}$$

لاحظ أن $v \neq y_0$ لأن M ليست عند ذروة القطع.

- حالة $x \in \mathcal{E}_2$ ، أي $v = f_2(u)$ مع $u \in I$ نرغب أيضاً في هذه الحالة بتعيين ميل المماس عند M للخط $\mathcal{E}_2$ أي قيمة العدد المشتق $m = f_2'(u)$. ولكن في حالة $x \in I$ ، لدينا

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(f_2(x)-y_0)^2}{b^2} = 1$$

وبالاشتقاق نجد

$$\frac{2(x-x_0)}{a^2} + \frac{(f_2(x)-y_0)f_2'(x)}{b^2} = 0$$

ومنه

$$m = -\frac{b^2}{a^2}\frac{u-x_0}{v-y_0}$$

النتيجة : الملاحظة الأساسية هي أننا نحصل في كلا الحالتين على الصيغة نفسها، وهي تماماً الصيغة التي نحصل عليها من اشتقاق معادلة القطع بعد معاملة المتغير y بصفته دالة تابعة للمتغير x .(وذلك بعد التأكد من أن المعادلة تمثل فعلاً قطعاً ناقصاً).

القطع الزائد :

للقطع الزائد تعريف مشابه لتعريف القطع الناقص،لكنه يتعلق بالفرق بين بعدي نقطة عن نقطتين ثابتتين بدلاً من مجموع هذين البعدين.

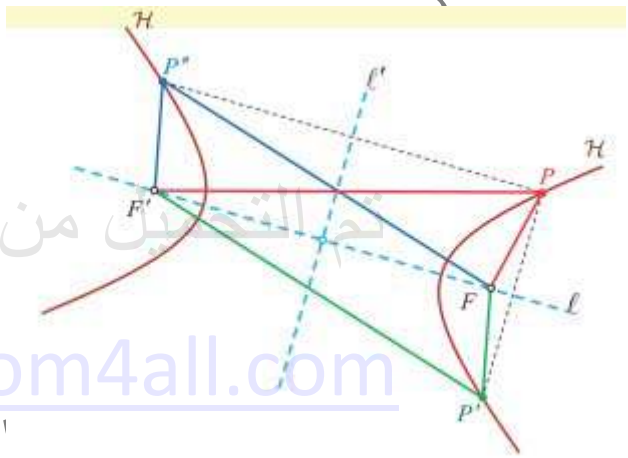
تعريف القطع الزائد: لتكن F, F' نقطتين في المستوي ، نسمي قطعاً زائداً محرقاه F, F' مجموعة جميع نقاط المستوي

علوم للجميع
المدرس: أحمد عرابي الأحمد ٠٩٥٧٥١٩٢٨
تم التقاطه من موقع علوم للجميع
http://www.3lom4all.com
مُدَرِّس الرياضيات: أحمد عرابي الأحمد

التي تكون القيمة المطلقة للفرق بين بعديها عن F,F' مقداراً موجباً ثابتاً.(هو بالضرورة أصغر من المسافة FF' بناءً على متراجحة المثلث).

ملاحظة : نرى مباشرة أن القطع الزائد مكون من فرعين الأول يوافق مجموعة النقاط P التي يكون عندها المقدار $F'P - FP$ ثابتاً موجباً، والثاني يوافق مجموعة النقاط Q التي يأخذ فيها المقدار $FQ - F'Q$ قيمة الثابت الموجب نفسه.

مبرهنة وتعريف: ليكن $\mathcal{H}$ القطع الزائد الذي محرقاه F,F' . إن المستقيم ℓ المار بالمحرقين محور تناظر للقطع الزائد $\mathcal{H}$، نسميه المحور المحرقي أو المحور الأساسي. وكذلك يكون المستقيم ℓ' ،محور القطعة المستقيمة $[FF']$ محور تناظر للقطع الزائد $\mathcal{H}$. نسميه المحور اللامحرقي أو المحور الثانوي.



تم التحميل من موقع علوم للجميع
http://www.3lom4all.com

نتيجة : ليكن $\mathcal{H}$ القطع الزائد الذي محرقاه F,F' . إن منتصف القطعة المستقيمة $[FF']$ مركز تناظر للقطع الزائد؛ لأنه نقطة تقاطع محوري التناظر ℓ,ℓ' .ونسميه مركز القطع الزائد $\mathcal{H}$ ونسمي طول القطعة المستقيمة $[FF']$ البعد المحرقي.

المعادلة المختزلة للقطع الزائد:

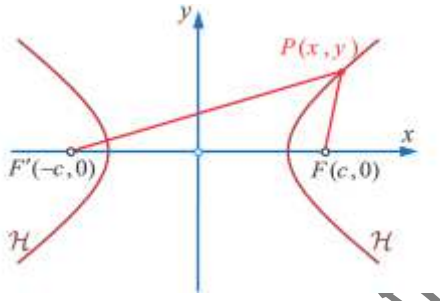
لتكن F,F' نقطتان مختلفتان في المستوي، وليكن $\mathcal{H}$ قطعاً زائداً محرقاه F,F'. لنختر جملة محاور إحداثية متعامدة مبدؤها O منطبق على مركز تناظر القطع، ومحور فواصلها Ox منطبق على المحور المحرقي للقطع. إذا كانت إحداثيات F هي $(c,0)$ حيث $c>0$ كانت $(-c,0)$ هي إحداثيات F' . وكانت المسافة بين المحرقين $2c$(البعد المحرقي).

لنرمز بالرمز $2a$ إلى المقدار الثابت الذي يساوي $|FP - F'P|$ أياً كانت النقطة P من $\mathcal{H}$.

لاحظ أنه، استناداً إلى المتراجحة المثلث ،لدينا :

$$2c = FF' > |FP - F'P| = 2a$$

مُدرِّس الرياضيات:
أحمد عرابي الأحمد



علوم للجميع

أي $c > a$.

تنتمي النقطة $P(x,y)$ إلى القطع الزائد $\mathcal{H}$ إذا وفقط إذا تحقق الشرط $|FP - F'P| = 2a$ ، أي:

$$\left|\sqrt{(x-c)^2+(y-0)^2}-\sqrt{(x+c)^2+(y-0)^2}\right| = 2a$$

أو

$$\sqrt{(x-c)^2+(y-0)^2} = \pm 2a + \sqrt{(x+c)^2+(y-0)^2}$$

وبتربيع طرفي هذه المساواة، نجد:

$$(x-c)^2+y^2 = 4a^2 \pm 4a\sqrt{(x+c)^2+y^2}+(x+c)^2+y^2$$

وهذا يكافئ

$$\pm a\sqrt{(x+c)^2+y^2} = a^2+cx$$

وبتربيع طرفي هذه المساواة مجدداً ، نجد :

$$a^2\left[(x+c)^2+y^2\right] = a^4+2a^2cx+c^2x^2$$

وهذا يكافئ

$$(c^2-a^2)x^2-a^2y^2 = a^2(c^2-a^2)$$

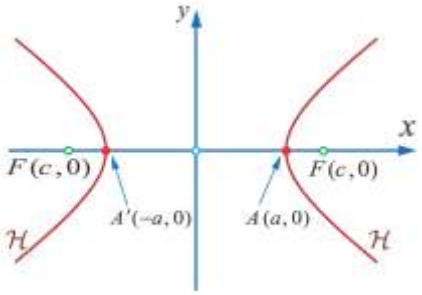
إذا عرفنا $b=\sqrt{c^2-a^2}$، وقسمنا الطرفين على المقدار a^2b^2 وصلنا إلى الصيغة

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$

حيث $0<b,a<c$ و $a^2+b^2=c^2$، هذه هي الصيغة المختزلة القياسية لمعادلة قطع زائد محرقاه على محور الفواصل، ومركز تناظره في المبدأ.وتؤكد هذه المعادلة أن القطع الزائد في هذه الحالة متناظر بالنسبة إلى المحورين وإلى المبدأ.

المدرس: أحمد عرابي الأحمد ٠٩٥٢٧٥١٩٢٨
تم التحميل من موقع علوم للجميع
http://www.3lom4all.com

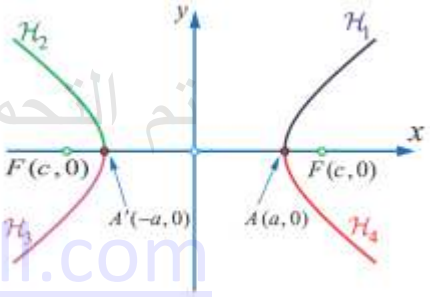
مُدَرِّس الرياضيات:
أحمد عرابي الأحمد



علوم للجميع

يمكن تعيين النقاط التي يلاقي فيها القطع الزائد $\mathcal{H}$ محورَ الفواصل بجعل $y=0$ في المعادلة، فنجد $x^2=a^2$ أو $x\in\{-a,a\}$ وهذا يوافق الذروتين $A(a,0),A'(-a,0)$.اللتين تسميان ذورتا القطع الزائد .تسمى القطعة المستقيمة $[AA']$ القطر الرئيسي أو الكبير وطولها $2a$.ونلاحظ أن القطع الزائد $\mathcal{H}$ لا يتقاطع مع محور التراتيب،انظر الشكل.

المستقيمان المقاربان للقطع زائد :



تم التحميل من موقع علوم للجميع
http://www.3lom4all.com

بالنظر إلى معادلة القطع الزائد $\mathcal{H}$ التي وجدناها :

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$

نلاحظ أنه ليس الخط البياني لدالة، ولكن إذا رمزنا بـ $\mathcal{H}_1$ إلى جزء القطع الزائد الموجود في الربع الأول ، وعرفنا $\mathcal{H}_2$ و $\mathcal{H}_3$ و $\mathcal{H}_4$ بأنها نظائر $\mathcal{H}_1$ بالنسبة إلى محور التراتيب ومبدأ الإحداثيات ومحور الفواصل بالترتيب، استنتجنا أن:

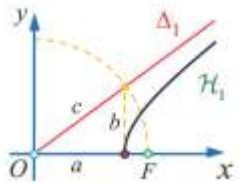
$$\mathcal{H}=\mathcal{H}_1\cup\mathcal{H}_2\cup\mathcal{H}_3\cup\mathcal{H}_4$$

ولكن $\mathcal{H}_1$ هو الخط البياني لدالة f_1 فلنعينها ، وسنلاحظ أن هذه الدالة معرفة على $[a,+\infty[$، وفي حالة $x\geq a$ لدينا:

$$\left[f_1(x)\right]^2=y^2=b^2\left(\frac{x^2}{a^2}-1\right)=\frac{b^2}{a^2}\left(x^2-a^2\right)$$

ولأن $f_1(x)\geq 0$ استنتجنا أن $f_1(x)=\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}$.

إذن $\mathcal{H}_1$ هو الخط البياني للدالة $x\mapsto f_1(x)=\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}$



المعرفة على $[a,+\infty[$. لنلاحظ أنه في حالة $x\geq a$ لدينا :

مدرس الرياضيات: أحمد عرابي الأحمد ٠٩٥١٧٥١٩٢٨
مُدَرِّس الرياضيات: أحمد عرابي الأحمد

$$f_1(x)-\frac{b}{a}x=\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}-\frac{b}{a}x=\frac{b}{a}\left(\frac{x^2-a^2-x^2}{\sqrt{x^2-a^2}+x}\right)=\frac{-ab}{\sqrt{x^2-a^2}+x}$$

هذا يبرهن من جهة أولى أن

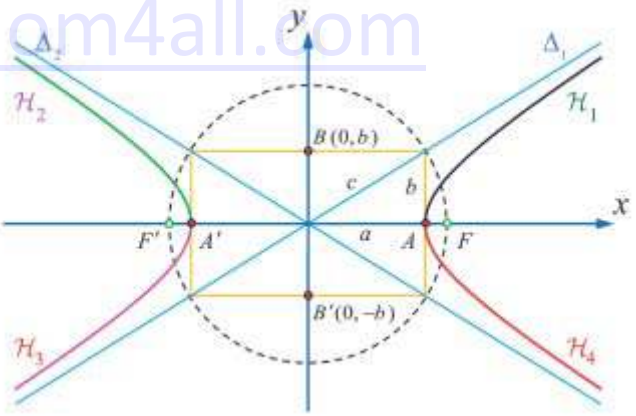
$$\lim_{x\to+\infty}\left(f_1(x)-\frac{b}{a}x\right)=0$$

فالمستقيم Δ_1 الذي معادلته $y=\frac{b}{a}x$ مستقيم مقارب للخط $\mathcal{H}_1$ في جوار $+\infty$.

ومن جهةٍ ثانية إن $f_1(x)-\frac{b}{a}x<0$ أياً كانت x من $[a,+\infty[$ ، إذن يقع $\mathcal{H}_1$ دوماً تحت الخط المقارب Δ_1.

المستقيم Δ_1 متناظر بالنسبة إلى مبدأ الإحداثيات ، إذن Δ_1 هو أيضاً مستقيم مقارب للخط $\mathcal{H}_3$ في جوار $-\infty$ ، و $\mathcal{H}_3$ يقع فوق Δ_1.

ومن ناحية أخرى ، المستقيم Δ_2 الذي معادلته $y=-\frac{b}{a}x$ ، هو نظير Δ_1 بالنسبة إلى محور التراتيب، إذن Δ_2 هو مستقيم مقارب للخط $\mathcal{H}_2$ في جوار $-\infty$ ، و $\mathcal{H}_2$ يقع تحت Δ_2 ، وأخيراً نجد أن Δ_2 هو مستقيم مقارب للخط $\mathcal{H}_4$ في جوار $+\infty$ ، و $\mathcal{H}_4$ يقع فوق Δ_2 ، كما في الشكل :



النتيجة : لقطع الزائد $\mathcal{H}$ الذي معادلته $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ ، مستقيمان مقاربان Δ_1,Δ_2 ، معادلتاهما :

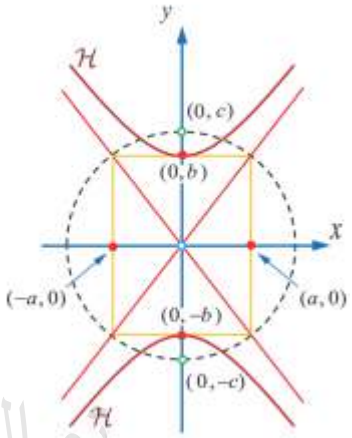
$$\Delta_1:\frac{y}{b}=\frac{x}{a}\quad,\quad \Delta_2:\frac{y}{b}=-\frac{x}{a}$$

وكما أشرنا سابقاً ، يساعد المستقيمان المقاربان على رسم القطع الزائد، أولاً نرسم الذروتين $A(a,0),A'(-a,0)$ ، ذم النقطتين $B(b,0),B'(-b,0)$ اللتين سنطلق عليهما تجاوزاً اسم الذروتين المرافقتين، كما في الشكل أعلاه. يكوّن المستقيمان الأفقيان المرسومان من B,B' مع المستقيمين الشاقوليين من الذروتين A,A' مستطيلاً. مَيْلا قطري هذا المستطيل يساويان $\frac{b}{a},-\frac{b}{a}$ ، إذَنْ بتمديد قطري المستطيل نحصل على المستقيمين المقاربين Δ_1,Δ_2 للقطع $\mathcal{H}$، ونلاحظ أن رؤوس المستطيل تبعد عن مركز القطع مسافة تساوي نصف البعد المحرقي c لأن $c=\sqrt{a^2+b^2}$.

فرؤوس هذا المستطيل تقع على الدائرة التي مركزها مركز القطع الزائد $\mathcal{H}$ وتمر بمحرقيه.

مُدَرِّس الرياضيات:
أحمد عرابي الأحمد

القطوع الزائدة التي ينطبق محورها المحرقي على محور التراتيب: يمكن أن يكون المحور المحرقي لقطع زائد مركزه مبدأ الإحداثيات منطبقاً على محور التراتيب Oy كما هو مبين في الشكل، في هذه الحالة ذورتا القطع هما النقطتان $B(0,b),B'(0,-b)$ ومحرقاه $F(0,c),F'(0,-c)$. وبأسلوب مماثل للدراسة السابقة نجد أن معادلة القطع الزائد $\mathcal{H}$ في هذه الحالة تأخذ الصيغة :



$$\frac{x^2}{b^2}-\frac{y^2}{a^2}=1$$

حيث $a=\sqrt{c^2-b^2}$

الذروتان المرافقتان في هذه الحالة $(a,0),(-a,0)$ ويجري تعيين المستقيمين المقاربين بتمديد قطري المستطيل المكون من المستقيمين الأفقيين المارين بالذروتين والمستقيمين الشاقوليين المارين بالذروتين المرافقتين، أما معادلتا المستقيمين المقاربين Δ_1,Δ_2 فهما $\Delta_1:\frac{y}{b}=\frac{x}{a}$, $\Delta_2:\frac{y}{b}=-\frac{x}{a}$

المعادلة القياسية لقطع زائد ذروته في المبدأ:

$\boxed{1}$ إن المعادلة القياسية لقطع ناقص مركزه $O(0,0)$ ومحوره المحرقي منطبق على محور الفواصل Ox هي من الشكل:

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$

تقع ذروتا القطع عند $(a,0),(-a,0)$ وتقع ذروتاه المرافقتان عند $(0,b),(0,-b)$ وأخيراً يقع محرقا القطع عند $(c,0),(-c,0)$ حيث $c=\sqrt{a^2+b^2}$.

$\boxed{2}$ إن المعادلة القياسية لقطع ناقص مركزه $O(0,0)$ ومحوره المحرقي منطبق على محور التراتيب Oy هي من الشكل:

$$\frac{x^2}{b^2}-\frac{y^2}{a^2}=1$$

تقع ذروتا القطع عند $(0,b),(0,-b)$ وتقع ذروتاه المرافقتان عند $(a,0),(-a,0)$ وأخيراً يقع محرقا القطع عند $(0,c),(0,-c)$ حيث $c=\sqrt{a^2+b^2}$.

وفي الحالتين للقطع الزائد مستقيمان مقاربان Δ_1,Δ_2 معادلتاهما

تم التحميل من موقع علوم للجميع
http://www.3lom4all.com
د. عرابي الأحمد ٠٩٥١٧٥١٩٢٨
مُدَرِّس الرياضيات: أحمد عرابي الأحمد

$$\Delta_1 : \frac{y}{b} = \frac{x}{a} \quad , \quad \Delta_2 : \frac{y}{b} = -\frac{x}{a}$$

المعادلة العامة لقطع زائد محوره المحرقي يوازي أحد محوري الإحداثيات :

لننسب المستوي إلى معلم متجانس $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$، ولنبحث عن الصيغة العامة لمعادلة قطع زائد مركزه النقطة $O'\left(x_0,y_0\right)$ ومحوره المحرقي منطبق على أحد المحورين الإحداثيين.

لقد رأينا أن معادلة القطع الزائد المطلوب في المعلم $\left(O',\vec{i},\vec{j}\right)$ تأخذ الشكل :

$\frac{X^2}{a^2} - \frac{Y^2}{b^2} = \pm 1$ حيث a,b عددان موجبان .

ولكن دساتير الانتقال من المعلم $\left(O',\vec{i},\vec{j}\right)$ إلى المعلم $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$ هي:

$$X = x - x_0 \quad , \quad Y = y - y_0$$

وعليه تأخذ معادلة القطع الزائد في المعلم $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$ الشكل:

$$\frac{\left(x-x_0\right)^2}{a^2} - \frac{\left(y-y_0\right)^2}{b^2} = \pm 1$$

حيث a,b عددان موجبان .

وعليه نصل إلى الخلاصة التالية:

المعادلة القياسية لقطع زائد محوره المحرقي يوازي أحد محوري الإحداثيات :

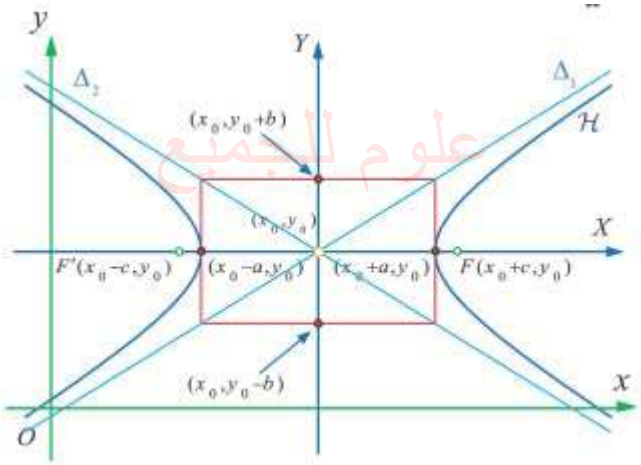
$\boxed{1}$ إن المعادلة القياسية لقطع زائد مركزه $O'\left(x_0,y_0\right)$ ومحوره المحرقي يوازي محور الفواصل هي من الشكل:

$\frac{\left(x-x_0\right)^2}{a^2} - \frac{\left(y-y_0\right)^2}{b^2} = 1$ حيث a,b عددان موجبان .

تقع ذروتا القطع عند $\left(x_0+a,y_0\right),\left(x_0-a,y_0\right)$ ، وتقع الذروتان المرافقتان عند $\left(x_0,y_0+b\right),\left(x_0,y_0-b\right)$ و يقع محرقا القطع عند $\left(x_0+c,y_0\right),\left(x_0-c,y_0\right)$ حيث $c^2 = a^2 + b^2$. ولهذا القطع مقاربان Δ_1,Δ_2 حيث:

$$\Delta_1 : \frac{y-y_0}{b} = \frac{x-x_0}{a} \quad , \quad \Delta_2 : \frac{y-y_0}{b} = -\frac{x-x_0}{a}$$

علوم للجميع
المدرس: أحمد عرابي الأحمد ٠٩٥١٧٥٦٠٢٨
تم التحميل من موقع علوم للجميع
http://www.3lom4all.com
مُدَرِّس الرياضيات: أحمد عرابي الأحمد

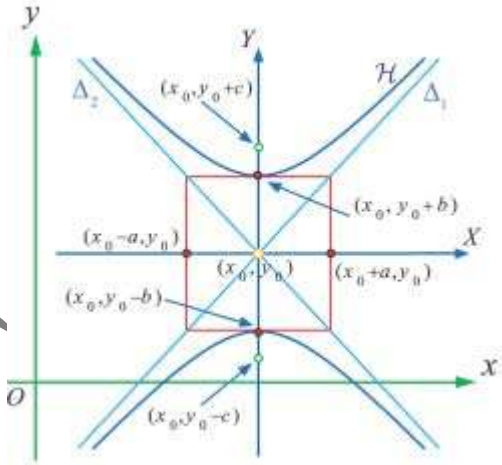


$\boxed{2}$ إن المعادلة القياسية لقطع زائد مركزه $O'(x_0,y_0)$ ومحوره المحرقي يوازي محور التراتيب هي من الشكل:

$$\frac{(y-y_0)^2}{a^2}-\frac{(x-x_0)^2}{b^2}=1$$ حيث a,b عددان موجبان .

تقع ذروتا القطع عند $(x_0,y_0+b),(x_0,y_0-b)$ ، وتقع الذروتان المرافقتان عند $(x_0+a,y_0),(x_0-a,y_0)$ و يقع محرقا القطع عند $(x_0,y_0+c),(x_0,y_0-c)$ حيث $c^2=a^2+b^2$. ولهذا القطع مقاربان Δ_1,Δ_2 حيث:

$$\Delta_1:\frac{y-y_0}{b}=\frac{x-x_0}{a}\quad,\quad \Delta_2:\frac{y-y_0}{b}=-\frac{x-x_0}{a}$$



خواص المماس لقطع زائد في نقطة منه :

تعريف : ليكن $\mathcal{H}$ قطعاً زائداً، ولتكن M نقطة من هذا القطع ، نقول إن المستقيم d يمسّ القطع $\mathcal{H}$ في M ، أو إنه مماس للقطع $\mathcal{H}$ في M إذا كان لا يوازي أحد مقاربي القطع وكانت M هي النقطة الوحيدة المشتركة بين القطع $\mathcal{H}$ والمستقيم d.

تعريف : نسمي المستقيم العمودي على المماس لقطع زائد في نقطة التماس المستقيم الناظم على القطع الزائد عند هذه النقطة.

نبرهن في هذه الفقرة خاصة هندسية تتصف بها المماسات لقطع زائد.

مبرهنة : نتأمل قطعاً زائداً $\mathcal{H}$ محرقاه F,F' ، وطول قطره الرئيسي 2ℓ. لتكن M من فرع القطع الزائد $\mathcal{H}$ الأقرب

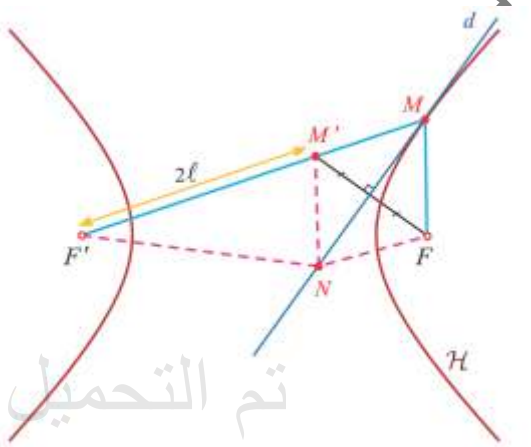
مُدرِّس الرياضيات: أحمد عرابي الأحمد
المدرس: أحمد عرابي
تم السحب من موقع علوم للجميع
http://www.3lom4all.com
٠٩٦٧٥١٩٢

إلى F ولكنها مختلفة عن ذروته .

$\boxed{1}$ إن المماس d للقطع الزائد $\mathcal{H}$ في M ، هو محور القطعة المستقيمة $[FM']$ ، حيث M' هي النقطة من نصف المستقيم $[FM')$ التي تحقق $F'M' = 2\ell$.

$\boxed{2}$ إن المماس d للقطع الزائد $\mathcal{H}$ في M ، هو المنصف الداخلي للزاوية $\widehat{F'MF}$.

الإثبات :



علوم للجميع
تم التحميل من موقع علوم للجميع
http://www.3lom4all.com
أحمد العرابي الأحمد ٠٩٥٩٧٥٩٢٨

$\boxed{1}$ لما كانت M نقطة من فرع القطع الزائد $\mathcal{H}$ الأقرب إلى F كان $F'M - FM = 2\ell$

ليكن d محورَ القطعة المستقيمة $[FM']$ ، ولنبرهن أنه المماس للقطع الزائد $\mathcal{H}$ في M .

استناداً إلى تعريف M' لدينا

$$MM' = MF' - 2\ell = MF' - \left(MF' - MF\right) = MF$$

إذن M تقع على محور القطعة المستقيمة $[FM']$ أي d . لنبرهن أن التقاطع $d \cap \mathcal{H}$ يقتصر على النقطة M .

لتكن N نقطة ما من d مختلفة عن M . إذن F', N, M' ليست على استقامة واحدة واستناداً إلى متراجحة المثلث يكون لدينا :

$$2\ell = F'M' > \left|F'N - NM'\right|$$

ولكن N تنتمي إلى d (محور القطعة المستقيمة $[FM']$) إذن $NM' = NF$ وبالتعويض في المتراجحة السابقة نجد

$$2\ell = F'M' > \left|F'N - NF\right|$$

وهذا يعني أن N لا تنتمي إلى القطع $\mathcal{H}$.إذن M هي النقطة الوحيدة من d التي تنتمي إلى $\mathcal{H}$، فالمستقيم d يمس $\mathcal{H}$ في M .

$\boxed{2}$ لنلاحظ أن d هو منصف الزاوية $\widehat{FMM'}$ ، لأنه محور القاعدة في المثلث المتساوي الساقين FMM' .

مُدَرِّس الرياضيات:
أحمد عرابي الأحمد

تعيين معادلة المماس (أو الناظم) لقطع زائد في نقطة منه:

بوجهٍ عام تُكتب معادلة قطع زائد $\mathcal{H}$ محوره المحرقي يوازي محور التراتيب بالصيغة :

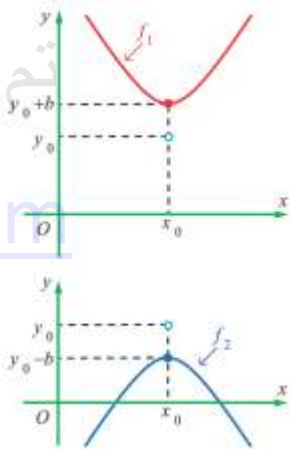
$$\frac{(y-y_0)^2}{b^2}-\frac{(x-x_0)^2}{a^2}=1$$

يمكن النظر إلى $\mathcal{H}$ وكأنه اجتماع الخطين البيانيين $\mathcal{H}_1,\mathcal{H}_2$ لدالتين f_1,f_2 معرفتين على $\mathbb{R}$ بالصيغتين

$$y=f_1(x)=y_0+b\sqrt{1+\frac{(x-x_0)^2}{a^2}}$$

$$y=f_2(x)=y_0-b\sqrt{1+\frac{(x-x_0)^2}{a^2}}$$

كما هو موضح في الشكل :



نلاحظ أن الدالتين اشتقاقيتان على $\mathbb{R}$. وإذا كانت $M(u,v)$ نقطة ما من القطع ، انتمت M أما إلى الجزء العلوي $\mathcal{H}_1$ أو إلى الجزء السفلي $\mathcal{H}_2$ من القطع الناقص $\mathcal{H}$. لنناقش إذن حالتين :

- حالة $x\in\mathcal{H}_1$ ، أي $v=f_1(u)$ نرغب في تعيين ميل المماس عند M للخط $\mathcal{H}_1$ أي قيمة العدد المشتق $m=f_1'(u)$. ولكن أياً كانت قيمة x ، فلدينا

$$\frac{(f_1(x)-y_0)^2}{b^2}-\frac{(x-x_0)^2}{a^2}=1$$

وبالاشتقاق نجد

$$\frac{2(f_1(x)-y_0)f_1'(x)}{b^2}-\frac{2(x-x_0)}{a^2}=0$$

ومنه في حال $x=u$

$$m=\frac{b^2}{a^2}\frac{u-x_0}{v-y_0}$$

علوم للجميع
المدرس: أحمد عرابي الأحمد ٠٩٥١٧٥١٩٢٨
تم التحميل من موقع علوم للجميع
http://www.3lom4all.com
مُدَرِّس الرياضيات: أحمد عرابي الأحمد

لاحظ أن $v \neq y_0$.

- حالة $x \in \mathcal{H}_2$ ، أي $v = f_2(u)$ نرغب أيضاً في هذه الحالة بتعيين ميل المماس عند M للخط $\mathcal{H}_2$ أي قيمة العدد المشتق $m = f_2'(u)$. ولكن أياً كانت قيمة x ، لدينا

$$\frac{\left(f_2(x)-y_0\right)^2}{b^2}-\frac{\left(x-x_0\right)^2}{a^2}=1$$

وبالاشتقاق وتعويض $x=u$ نجد

$$m=\frac{b^2}{a^2}\frac{u-x_0}{v-y_0}$$

ملاحظة : بإجراء دراسة مماثلة لما سبق في حالة كون المحور المحرقي للقطع الزائد موازياً لمحور الفواصل ، نجد مجدداً أن ميل المماس للقطع الزائد $\mathcal{H}$ في نقطة ما $M(u,v)$ منه (مختلفة عن ذروتيه) ، يساوي :

$$m=\frac{b^2}{a^2}\frac{u-x_0}{v-y_0}$$

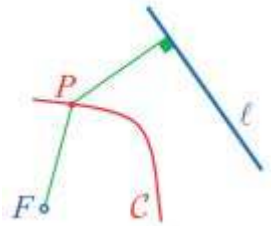
حيث (x_0,y_0) هو مركز القطع.

أما في حال كانت النقطة $M(u,v)$ ذروة للقطع، فالمماس شاقولي ومعادلته $x=u$.

النتيجة : الملاحظة الأساسية هي أننا نحصل في كلا الحالتين على الصيغة نفسها، وهي تماماً الصيغة التي نحصل عليها من اشتقاق معادلة القطع بعد معاملة المتغير y بصفته دالة تابعة للمتغير x .(وذلك بعد التأكد من أن المعادلة تمثل فعلاً قطعاً زائداً).

التعريف المشترك للقطوع : ليكن ℓ مستقيماً ما في المستوي ، في حالة نقطة ما P من المستوي، نرمز بالرمز $d(P,\ell)$ إلى المسافة بين النقطة P والمستقيم ℓ ، وهي أيضاً المسافة بين P ومرتسمها القائم على ℓ .

نتأمل في المستوي مستقيماً ℓ، ونقطة F لا تقع على ℓ . وليكن e عدداً موجباً تماماً.نهدف إلى دراسة المجموعة $\mathcal{C}$ المكونة من نقاط المستوي التي نسبة بعدها عن F إلى بعدها عن ℓ تساوي e ؛ أي:



$$P \in \mathcal{C} \iff \frac{PF}{d(P,\ell)} = e$$

لإجراء هذه الدراسة سنختار معلماً مناسباً $(O,\vec{i},\vec{j})$ بحيث تنطبق O على F ويكون ℓ موازياً لمحور التراتيب Oy معادلته $x=-k$ حيث $k>0$

لتكن $P(x,y)$ نقطة ما من المستوي، عندئذٍ :

علوم للجميع
المدرس: أحمد عرابي الأحمد ٠٩٥١٧٥١٩٢٨
تم التحميل من موقع علوم للجميع
http://www.3lom4all.com
مُدَرِّس الرياضيات: أحمد عرابي الأحمد

$$d(P,\ell)=|x+k| \quad \text{و} \quad PF=\sqrt{x^2+y^2}$$

إذن تنتمي P إلى $\mathcal{C}$ إذا وفقط إذا تحقق الشرط

$$\sqrt{x^2+y^2}=e|x+k|$$

وبالتربيع نجد :

$$x^2+y^2=e\left(x^2+2kx+k^2\right)$$

أو

$$\left(1-e^2\right)x^2-2e^2kx+y^2-e^2k^2=0 \qquad (1)$$

لنناقش إذن الحالات التالية :

- حالة $e=1$. عندئذٍ تكتب المعادلة (1) بالصيغة التالية :

$$y^2=2k\left(x+\frac{k}{2}\right)$$

وهي معادلة القطع المكافئ ذروته $\left(-\frac{k}{2},0\right)$ ومحرقه $F(0,0)$ ودليله ℓ الذي معادلته $x=-k$. في الحقيقة هذا هو تعريف القطع المكافئ الذي اعتمدناه. إذن في حالة $e=1$ تكون المجموعة $\mathcal{C}$ قطعاً مكافئاً.

- حالة $e\neq 1$. هنا تكتب المعادلة (1) بالصيغة :

$$\left(1-e^2\right)\left(x^2-2\frac{e^2k}{1-e^2}x\right)+y^2-e^2k^2=0$$

وبالإتمام إلى مربع كامل بالنسبة إلى x نجد

$$\left(1-e^2\right)\left(x^2-2\frac{e^2k}{1-e^2}x+\frac{e^4k^2}{\left(1-e^2\right)^2}\right)+y^2=e^2k^2+\frac{e^4k^2}{1-e^2}$$

$$\left(1-e^2\right)\left(x-\frac{e^2k}{1-e^2}\right)^2+y^2=e^2k^2\left(1+\frac{e^2}{1-e^2}\right)$$

$$\left(1-e^2\right)\left(x-\frac{e^2k}{1-e^2}\right)^2+y^2=\frac{e^2k^2}{1-e^2}$$

علوم للجميع
المدرس: أحمد عرابي الأحمد ٠٩٥١٧٥١٩٢٨
تم التحميل من موقع علوم للجميع
http://www.Olomfall.com
مُدَرِّس الرياضيات: أحمد عرابي الأحمد

$$\frac{\left(x-\frac{e^2k}{1-e^2}\right)^2}{\frac{e^2k^2}{\left(1-e^2\right)^2}}+\frac{y^2}{\frac{e^2k^2}{1-e^2}}=1 \qquad (2)$$

هناك إذن حالتان:

- حالة $0<e<1$ نضع $x_0=\frac{e^2k}{1-e^2}$ و $y_0=0$ و $a=\frac{ek}{1-e^2}$ و $b=\frac{ek}{\sqrt{1-e^2}}$، فتأخذ المعادلة (2) الصيغة :

$$\frac{\left(x-x_0\right)^2}{a^2}+\frac{\left(y-y_0\right)^2}{b^2}=1$$

لاحظ أن $b=a\sqrt{1-e^2}<a$. إذن هذه معادلة قطع ناقص مركزه $\left(x_0,y_0\right)$ محوره المحرقي منطبق على محور الفواصل، وطول قطره الكبير $2a=\frac{2ek}{1-e^2}$ وطول قطره الصغير $2b=\frac{2ek}{\sqrt{1-e^2}}$، أما نصف البعد المحرقي c فيساوي

$$c=\sqrt{a^2-b^2}=\sqrt{\frac{e^2k^2}{\left(1-e^2\right)^2}-\frac{e^2k^2}{1-e^2}}=$$

$$=\sqrt{\frac{e^2k^2\left(1-1+e^2\right)}{\left(1-e^2\right)^2}}=\sqrt{\frac{e^4k^2}{\left(1-e^2\right)^2}}=\frac{e^2k}{1-e^2}=ea=x_0$$

أما محرقا القطع فهما عند $(0,0)$ و $(2c,0)$. إذن في هذه الحالة تكون المجموعة $\mathcal{C}$ قطعاً ناقصاً أحدُ محرقيه النقطة F.

- حالة $e>1$ نضع $x_0=\frac{e^2k}{1-e^2}$ و $y_0=0$ و $a=\frac{ek}{e^2-1}$ و $b=\frac{ek}{\sqrt{e^2-1}}$، فتأخذ المعادلة (2) الصيغة :

$$\frac{\left(x-x_0\right)^2}{a^2}-\frac{\left(y-y_0\right)^2}{b^2}=1$$

إذن هذه معادلة قطع ناقص مركزه $\left(x_0,y_0\right)$ محوره المحرقي منطبق على محور الفواصل، وطول قطره الرئيسي $2a=\frac{2ek}{1-e^2}$ وطول قطره الصغير $2a=\frac{2ek}{e^2-1}$، أما نصف البعد المحرقي c فيساوي

علوم للجميع
المدرس: أحمد عرابي الأحمد
تم التحميل من موقع علوم للجميع
http://www.3lom4all.com
٠٩٥١٧٥١٩٢٨
مُدَرِّس الرياضيات: أحمد عرابي الأحمد

$$c=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{\frac{e^2k^2}{\left(e^2-1\right)^2}+\frac{e^2k^2}{e^2-1}}=$$

$$=\sqrt{\frac{e^2k^2\left(1+e^2-1\right)}{\left(e^2-1\right)^2}}=\sqrt{\frac{e^4k^2}{\left(e^2-1\right)^2}}=\frac{e^2k}{e^2-1}=ea=-x_0$$

أما محرقا القطع فهما عند $(0,0)$ و $(-2c,0)$. إذن في هذه حالة $e>1$ تكون المجموعة $\mathcal{C}$ قطعاً زائداً أحدُ محرقيه النقطة F.

وهكذا نكون قد أثبتنا المبرهنة الآتية :

مبرهنة وتعريف : نتأمل في المستوي مستقيماً ℓ، ونقطة F لا تقع على ℓ. وليكن e عدداً موجباً تماماً . إن المجموعة $\mathcal{C}$ المكونة من نقاط المستوي التي نسبة بعدها عن F إلى بعدها عن ℓ تساوي e ، هي قطع مخروطي ، يقبل النقطة F محرقاً. وتكون $\mathcal{C}$ قطعاً ناقصاً في حالة $0<e<1$، وقطعاً مكافئاً في حالة $e=1$، وقطعاً زائداً في حالة $e>1$. نسمي العدد e التباعد المركزي للقطع $\mathcal{C}$، ونسمي ℓ دليلاً للقطع $\mathcal{C}$ المتعلق بالمحرق F. وفي حالة $e\neq 1$ يكون $e=\frac{a}{c}$ أي نسبة طول القطر الرئيسي للقطع إلى بعده المحرقي.

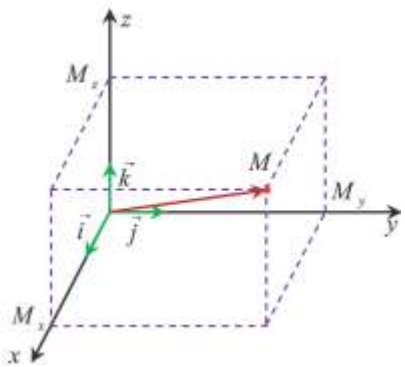
http://www.3lom4all.com

الوحدة الثانية : المستوي والمستقيم في الفضاء :

المستوي في الفضاء :

تذكر :

ليكن الفضاء E المحدث بمعلم متجانس $\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ ، ولتكن النقطة M من E ، نرسم من هذه النقطة ثلاث مستويات موازية للمستويات Oyz و Oxz و Oxy ، فتقطع هذه المستويات المحاور Ox و Oy و Oz في M_x و M_y و M_z بالترتيب كما في الرسم.



لنعرف الأعداد الحقيقية x,y,z بحيث :

$$\overline{OM_x}=x\ ,\ \overline{OM_y}=y\ ,\ \overline{OM_z}=z$$

نسمي الثلاثية (x,y,z) إحداثيات النقطة M. ونسمي x فاصلة النقطة M و y ترتيبها و z راقمها.

مُدَرِّس الرياضيات: أحمد عرابي الأحمد

- يقابل كل نقطة M من الفضاء E ثلاثية وحيدة (x,y,z) وبالعكس يقابل كل ثلاثية (x,y,z) نقطة M من الفضاء . ونعبر عن ذلك متجهياً كما يأتي :

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM_x} + \overrightarrow{OM_y} + \overrightarrow{OM_z} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

- بتطبيق مبرهنة فيثاغورث نتوصل إلى العلاقة الآتية :

$$OM = \left|\overrightarrow{OM}\right| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

- في حالة $A(x_A, y_A, z_A)$ و $B(x_B, y_B, z_B)$ من E نعبر عن المتجه $\overrightarrow{AB}$ كما يأتي :

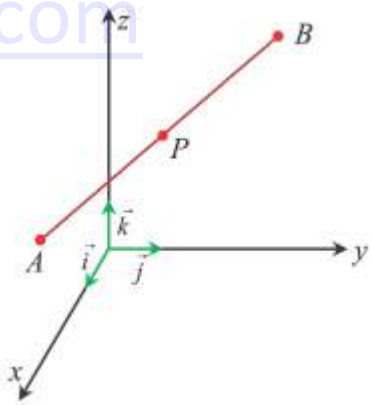
$$\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A)\vec{i} + (y_B - y_A)\vec{j} + (z_B - z_A)\vec{k}$$

وطويلته

$$AB = \left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$$

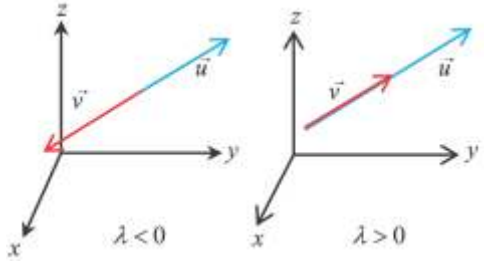
- إحداثيات P منتصف القطعة المستقيمة AB هي :

$$x_P = \frac{x_B + x_A}{2} \quad , \quad y_P = \frac{y_B + y_A}{2} \quad , \quad z_P = \frac{z_B + z_A}{2}$$



فيما يأتي عندما نتحدث عن الفضاء E ، فإننا نقصد الفضاء E المحدث بمعلم متجانس $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.

- نقول إن المتجهين $\vec{u}$ و $\vec{v}$ مرتبطان خطياً إذا وُجد عدد حقيقي λ يحقق $\vec{u} = \lambda.\vec{v}$ أو $\vec{u} = \lambda.\vec{v}$ ، وعندها تكون مركباتهما متناسبة.
  - عندما $\lambda > 0$ يكون المتجهان في جهة واحدة.
  - عندما $\lambda < 0$ يكون المتجهان في جهتين مختلفتين.



المدرس: أحمد عرابي الأحمد ٠٩٥١٧٥١٩٢٨
تم التحميل من موقع علوم للجميع
http://www.3lom4all.com
مُدرِّس الرياضيات: أحمد عرابي الأحمد

- إذا كان $\vec{u}\left(x_1,y_1,z_1\right)$ و $\vec{v}\left(x_2,y_2,z_2\right)$ متجهين في الفضاء E كان جداؤهما السلّمي :

$$\vec{u}.\vec{v}=\left|\vec{u}\right|.\left|\vec{v}\right|\cos\left(\vec{u}.\vec{v}\right)=x_1.x_2+y_1.y_2+z_1.z_2$$

ومنه يكون الشعاعان $\vec{u},\vec{v}$ متعامدين إذا وفقط إذا كان $\vec{u}.\vec{v}=0$.

ونستطيع إيجاد تجيب الزاوية بين المتجهين بالعلاقة :

$$\cos\left(\vec{u}.\vec{v}\right)=\frac{\vec{u}.\vec{v}}{\left|\vec{u}\right|.\left|\vec{v}\right|}=\frac{x_1.x_2+y_1.y_2+z_1.z_2}{\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}}$$

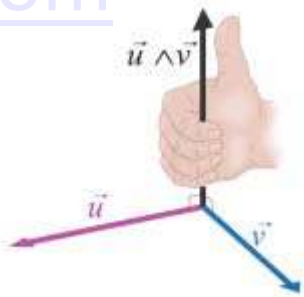
- الجداء الخارجي للمتجهين $\vec{u}\left(x_1,y_1,z_1\right)$ و $\vec{v}\left(x_2,y_2,z_2\right)$ في الفضاء E هو المتجه :

$$\vec{u}\wedge\vec{v}=\left(y_1.z_2-y_2.z_1\right)\vec{i}+\left(x_2.z_1-x_1.z_2\right)\vec{j}+\left(x_1.y_2-x_2.y_1\right)\vec{k}$$

أو نكتبه بالشكل :

$$\vec{u}\wedge\vec{v}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ x_1 & x_2 & x_3\\ y_1 & y_2 & y_3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}y_1 & z_1\\ y_2 & z_2\end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix}x_1 & z_1\\ x_2 & z_2\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix}x_1 & y_1\\ x_2 & y_2\end{vmatrix}\vec{k}$$

تم التحميل من موقع علوم للجميع
http://www.3lom4all.com



-المتجه $\vec{u}\wedge\vec{v}$ عمودي على كل من $\vec{u},\vec{v}$.

-تعطى طويلة المتجه $\vec{u}\wedge\vec{v}$ بالصيغة :

$$\left|\vec{u}\wedge\vec{v}\right|=\left|\vec{u}\right|.\left|\vec{v}\right|.\sin\left(\vec{u},\vec{v}\right)$$

أي تساوي ضعفي مساحة المثلث المنشأ على $\vec{u},\vec{v}$.

-المتجهان $\vec{u},\vec{v}$ مرتبطان خطياً إذا وفقط إذا كان $\vec{u}\wedge\vec{v}=0$.

المحددات :

نعلم أن المحدد من الدرجة الثانية هو العدد $\begin{vmatrix}a & b\\ c & d\end{vmatrix}=a.d-b.c$

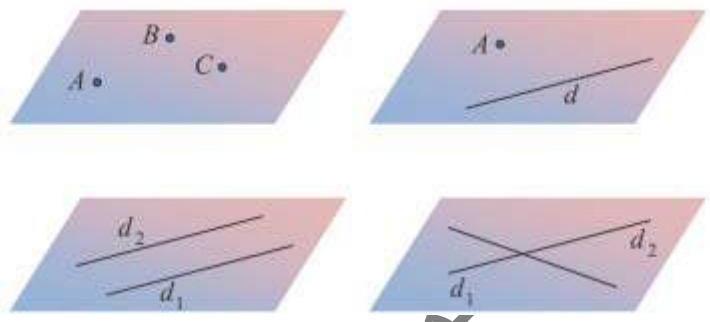
أما المحدد من الدرجة الثالثة، فهو العدد :

المدرس: أحمد عرابي الأحمد ٠٩٥١٧٥١٩٢٨
مُدَرِّس الرياضيات: أحمد عرابي الأحمد

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & k \end{vmatrix} = a.\begin{vmatrix} e & f \\ h & k \end{vmatrix} - b.\begin{vmatrix} d & f \\ g & k \end{vmatrix} + c.\begin{vmatrix} d & e \\ g & h \end{vmatrix}$$

ويجري حساب المحددات من المرتبة الثانية كما سبق.

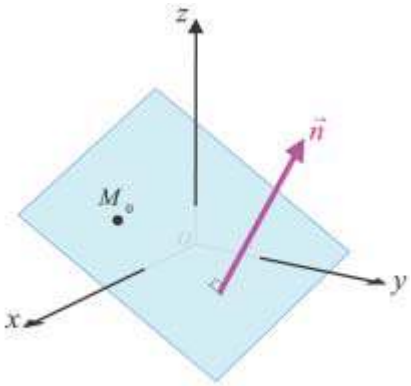
المستوي وطرائق تعيينه :



- المستوي سطحٌ غير محدود، إذا اشترك معه المستقيم في أكثر من نقطة ، انطبق عليه (أي اشتركا بكل نقاط المستقيم).
- يتعين المستوي بمستقيمين متقاطعين، أو بمستقيمين متوازيين، أو مستقيم ونقطة خارجه، أو بثلاث نقاط ليست على استقامة واحدة.
- نقول إن $\overrightarrow{AB}$ متجه ناظم على المستوي P، إذا كان المستقيم (AB) عمودياً على هذا المستوي.

معادلة مستوٍ يمر من نقطة معلومة، ويعامد متجهاً معلوماً :

لتكن النقطة المعلومة $M_0(x_0, y_0, z_0)$ نمرر بها المستوي $\mathcal{P}$، الذي يعامد المتجه $\vec{n}(p, q, r)$، ولتكن $M(x, y, z)$ نقطة ما في المستوي فتتحقق العلاقة $\vec{n} \perp \overrightarrow{M_0M}$.



وبالعكس كل نقكة من الفراغ تحقق هذه العلاقة تكون واقعة في المستوي $\mathcal{P}$.

إذن الشرط اللازم والكافي لانتماء M إلى $\mathcal{P}$ هو $\vec{n}.\overrightarrow{M_0M} = 0$ وهذا يكافئ تحليلياً تحقق المساواة الآتية :

$$p(x - x_0) + q(y - y_0) + r(z - z_0) = 0$$

وهي من الشكل :

$$px + qy + rz + h = 0$$

مُدَرِّس الرياضيات:
أحمد عرابي الأحمد
تم التحميل من موقع علوم للجميع
http://www.3lom4all.com
أحمد عرابي الأحمد ٠٩٥١٧٥١٩٢٨

حيث $h=-\left(px_0+qy_0+rz_0\right)$ ، وهو مقدار لا يتعلق بالنقطة M . إذن :

$$M\left(x,y,z\right)\in P \quad \Leftrightarrow \quad px+qy+rz+h=0$$

وبالعكس، لنتأمل معادلة من الدرجة الأولى بالمتحولات x,y,z من الشكل :

$$ax+by+cz+d=0$$

حيث $\left(a,b,c\right)\neq\left(0,0,0\right)$. يمكن ومن دون الإقلال من عمومية المناقشة أن نفترض أن $a\neq 0$ ، عندئذٍ تكتب المعادلة السابقة بالصيغة المكافئة :

$$a\left(x-\frac{d}{a}\right)+b\left(y-0\right)+c\left(z-0\right)=0$$

وهي – استناداً إلى المناقشة السابقة – معادلةُ المستوي المار بالنقطة $M_0\left(\frac{d}{a},0,0\right)$ عمودياً على $\vec{n}\left(a,b,c\right)$ ، وهكذا نكون قد أثبتنا الخاصة الآتية :

مبرهنة : إن كل معادلة من الصيغة $ax+by+cz+d=0$ حيث $\left(a,b,c\right)\neq\left(0,0,0\right)$ ، تعرّفُ مستوياً في الفراغ يقبل المتجه $\vec{n}\left(a,b,c\right)$ متجهاً ناظماً عليه. وبالعكس ، إذا كان $\vec{n}\left(a,b,c\right)$ متجهاً غير معدوم كانت معادلة أي مستوٍ عموديّ على $\vec{n}$ من الشكل :

$$ax+by+cz+d=0$$

أما معادلة المستوي المار بنقطة معطاة $M_0\left(x_0,y_0,z_0\right)$ عمودياً على $\vec{n}\left(a,b,c\right)$ فهي :

$$a\left(x-x_0\right)+b\left(y-y_0\right)+c\left(z-z_0\right)=0$$

ملاحظة : إذا كان $\vec{n}$ متجهاً ناظماً على مستوٍ $\mathcal{P}$ ، كان أي متجه غير صفري مرتبط خطياً معه متجهاً ناظماً على المستوي $\mathcal{P}$ نفسه.

معادلات المستويات الخاصة :

المستويات المارة بمبدأ الإحداثيات $O\left(0,0,0\right)$:

إحداثيات المبدأ تحقق معادلة مثل هذه المستويات، إذن هي المستويات التي معادلاتها من الشكل :

$$ax+by+cz=0$$

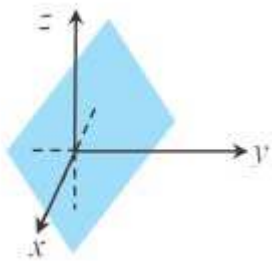
المستويات الموازية للمحور Oz :

يكون المستوي الذي معادلته $ax+by+cz+d=0$ موازياً للمحور Oz إذا وفقط إذا كان الناظمُ عليه $\vec{n}\left(a,b,c\right)$ عمودياً على المتجه $\vec{k}\left(0,0,1\right)$ الموجه للمحور Oz ؛ أي إذا وفقط إذا كان $c=0$ ؛ أي إذا وفقط إذا كانت معادلة المستوي من الشكل :

$$ax+by+d=0$$

(أي لا تحوي المتغير z)

مُدرِّس الرياضيات:
أحمد عرابي الأحمد



علوم للجميع

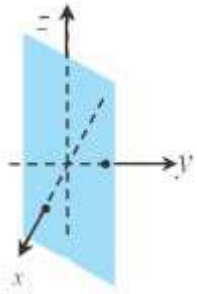
المستويات الموازية للمحور Oy :

يكون المستوي الذي معادلته $ax+by+cz+d=0$ موازياً للمحور Oy إذا وفقط إذا كان الناظمُ عليه $\vec{n}(a,b,c)$ عمودياً على المتجه $\vec{j}(0,1,0)$ الموجه للمحور Oy ؛ أي إذا وفقط إذا كان $b=0$ ؛ أي إذا وفقط إذا كانت معادلة المستوي من الشكل :

$$ax+cz+d=0$$

(أي لا تحوي المتغير y)

تم التحميل من موقع علوم للجميع
http://www.3lom4all.com

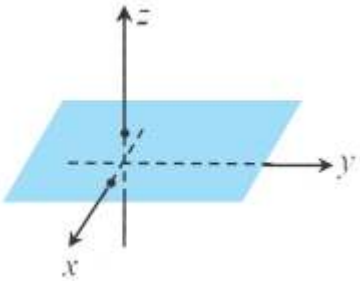


المستويات الموازية للمحور Ox

يكون المستوي الذي معادلته $ax+by+cz+d=0$ موازياً للمحور Ox إذا وفقط إذا كان الناظمُ عليه $\vec{n}(a,b,c)$ عمودياً على المتجه $\vec{i}(1,0,0)$ الموجه للمحور Ox ؛ أي إذا وفقط إذا كان $a=0$ ؛ أي إذا وفقط إذا كانت معادلة المستوي من الشكل :

$$by+cz+d=0$$

(أي لا تحوي المتغير x)



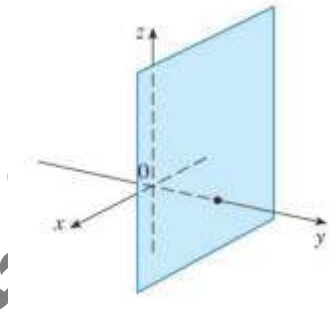
المستويات الموازية للمستويات الإحداثيات :

مدرس: أحمد عرابي الأحمد ٠٩٥١٧٥١٩٣٨
مُدَرِّس الرياضيات:
أحمد عرابي الأحمد

المستويات الموازية للمستوي yOz :

معادلة المستوي yOz هي $x=0$ وهو يقبل المتجه $\vec{i}$ ناظماً عليه.

يكون المستوي $\mathcal{P}$ الذي معادلته $ax+by+cz+d=0$ موازياً للمستوي yOz إذا وفقط إذا كان الناظم عليه $\vec{n}(a,b,c)$ عمودياً على المستوي yOz أي مرتبطاً خطياً مع $\vec{i}(1,0,0)$ ، وهذا يكافئ أن يكون $b=c=0$ أي تأخذ معادلة المستوي $\mathcal{P}$ الصيغة $x=x_0$



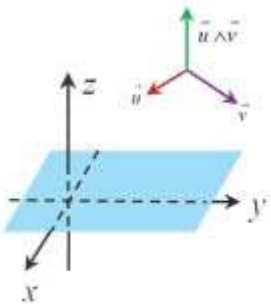
المستويات الموازية للمستوي xOz : وبالأسلوب نفسه نبرهن أن معادلات المستويات الموازية للمستوي xOz تُكتب بالشكل $y=y_0$.

المستويات الموازية للمستوي yOz : هي إذاً المستويات التي تُكتب معادلاتُها بالشكل $z=z_0$.

معادلة مستوٍ يمر بنقطة معلومة ويوازي متجهين معلومين :

الفكرة الرابحة هنا هي أنه إذا كان $\mathcal{P}$ مستوياً يوازي كلاً من المتجهين غير المرتبطين خطياً $\vec{u}$ و $\vec{v}$ كان الناظم $\vec{n}$ عمودياً على كل من $\vec{u}$ و $\vec{v}$ ، ومن ثم كان $\vec{n}$ و $\vec{u}\wedge\vec{v}$ مرتبطين خطياً.

وعليه، من معرفة المتجهين غير المرتبطين خطياً $\vec{u}$ و $\vec{v}$ اللذين يوازيهما المستوي $\mathcal{P}$ يمكننا استنتاج متجه ناظم على $\mathcal{P}$ بأخذ $\vec{n}=\vec{u}\wedge\vec{v}$ ، وعندئذٍ تؤول المسألة إلى الحالة السابقة.



لتكن $M_0(x_0,y_0,z_0)$ نقطة معلومة ، وليكن $\vec{u}(x_1,y_1,z_1)$ و $\vec{v}(x_2,y_2,z_2)$ متجهين غير مرتبطين خطياً. لإيجاد معادلة المستوي $\mathcal{P}$ المار بالنقطة M_0 موازياً كلاً من $\vec{u}$ و $\vec{v}$ ، نكتب معادلة المستوي المار بالنقطة M_0 عمودياً على $\vec{n}=\vec{u}\wedge\vec{v}$.

وعليه تنتمي النقطة $M(x,y,z)$ إلى $\mathcal{P}$ إذا وفقط إذا كان $\overrightarrow{MM_0}\left(\vec{u}\wedge\vec{v}\right)=0$

ولكن

مُدرِّس الرياضيات: أحمد عرابي الأحمد
تم التحميل من موقع علوم للجميع
http://www.3lom4all.com
أحمد عرابي الأحمد ٠٩٥١٧٥١٩٢٨

$$\vec{u}\wedge\vec{v}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ x_1 & y_1 & z_1\\ x_2 & y_2 & z_2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}y_1 & z_1\\ y_2 & z_2\end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix}x_1 & z_1\\ x_2 & z_2\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix}x_1 & y_1\\ x_2 & y_2\end{vmatrix}\vec{k}$$

$$\overrightarrow{MM_0}=\left(x-x_0\right)\vec{i}+\left(y-y_0\right)\vec{j}+\left(z-z_0\right)\vec{k}$$

إذن

$$\overrightarrow{MM_0}.\left(\vec{u}\wedge\vec{v}\right)=\left(x-x_0\right)\begin{vmatrix}y_1 & z_1\\ y_2 & z_2\end{vmatrix}-\left(y-y_0\right)\begin{vmatrix}x_1 & z_1\\ x_2 & z_2\end{vmatrix}+\left(z-z_0\right)\begin{vmatrix}x_1 & y_1\\ x_2 & y_2\end{vmatrix}$$

ومن معرفتنا بالمحددات نجد :

$$\overrightarrow{MM_0}.\left(\vec{u}\wedge\vec{v}\right)=\begin{vmatrix}x-x_0 & y-y_0 & z-z_0\\ x_1 & y_1 & z_1\\ x_2 & y_2 & z_2\end{vmatrix}$$

وعليه، تنتمي النقطة $M\left(x,y,z\right)$ إلى $\mathcal{P}$ إذا وفقط إذا كان :

$$\begin{vmatrix}x-x_0 & y-y_0 & z-z_0\\ x_1 & y_1 & z_1\\ x_2 & y_2 & z_2\end{vmatrix}=0$$

وبنشر المحدد نحصل على معادلة المستوي المطلوب.

معادلة مستوٍ يمر بثلاث نقاط معلومة ليست على استقامة واحدة :

تُردّ هذه الحالة إلى سابقتها، لأن معرفة ثلاث نقاط A و B و C ليست على استقامة واحدة من مستوٍ $\mathcal{P}$ ، تؤدي إلى معرفة إحدى النقاط التي يمر بها المستوي ، ولتكن A ، ومتجهين يوازيانه هما $\vec{u}=\overrightarrow{AB}$ و $\vec{v}=\overrightarrow{AC}$.

لنفترض إذن اننا نريد تعيين المستوي $\mathcal{P}$ الذي يمر بالنقاط $M_1\left(x_1,y_1,z_1\right)$ ، و $M_2\left(x_2,y_2,z_2\right)$ ، و $M_3\left(x_3,y_3,z_3\right)$ التي نفترض أنها ليست على استقامة واحدة، ولنبحث عن معادلة المستوي المارّ بهذه النقاط، عندئذٍ :

$$\vec{u}=\overrightarrow{M_1M_2}=\left(x_2-x_1\right)\vec{i}+\left(y_2-y_1\right)\vec{j}+\left(z_2-z_1\right)\vec{k}$$
$$\vec{v}=\overrightarrow{M_1M_3}=\left(x_3-x_1\right)\vec{i}+\left(y_3-y_1\right)\vec{j}+\left(z_3-z_1\right)\vec{k}$$

ولقد رأينا معادلة المستوي المار بالنقطة $M_1\left(x_1,y_1,z_1\right)$ موازياً $\vec{u}$ و $\vec{v}$ هي :

$$\begin{vmatrix}x-x_1 & y-y_1 & z-z_1\\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1\\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1\end{vmatrix}=0$$

وبنشر هذا المحدد نحصل على معادلة المستوي المطلوب.

الوضع النسبي لمستويين في الفضاء :

مُدرِّس الرياضيات: أحمد عرابي الأحمد
المدرس: أحمد عرابي الأحمد ٠٩٥١٧٥٥٢٨٣
تم التحميل من موقع علوم للجميع
http://www.3lom4all.com

توازي مستويين :

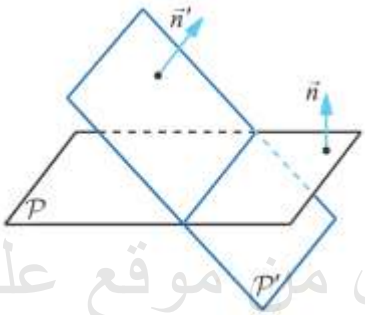
يتوازى مستويان إذا وفقط إذا كان العمود على أحدهما عموداً على الآخر ، ومنه :

الشرط اللازم والكافي لتوازي مستويين هو الارتباط الخطي لمتجه ناظم على الأول مع متجه ناظم على الثاني.

عندما يكون المستويان متوازيين ، إما أن يكونا منطبقين ، وإما ألا يشتركا في أية نقطة.

تقاطع مستويين :

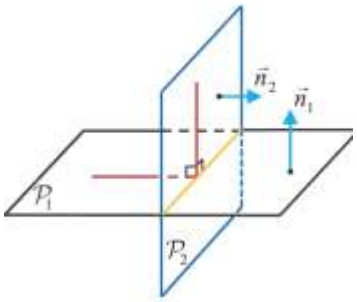
المستويان غير المتوازيين هما مستويان متقاطعان في مستقيم، وأي متجه ناظم على أحدهما يكون مستقلاً خطياً عن أي متجه ناظم على الآخر (غير مرتبط خطياً معه).



تعامد مستويين :

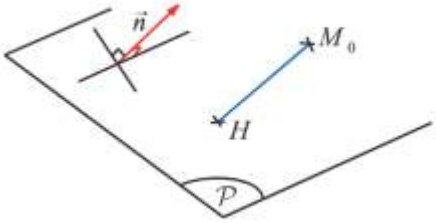
يتعامد مستويان إذا وفقط إذا كان العمودان عليهما متعامدين ، أي إذا تعامد متجه ناظم على أحدهما مع أي متجه ناظم على الآخر.

إذن، الشرط اللازم والكافي لتعامد مستويين هو تعامد متجه ناظم على الأول مع متجه ناظم على الثاني.



بُعد نقطة معلومة عن مستوٍ معلوم :

ليكن المستوي $\mathcal{P}$ المعين بالمعادلة $ax + by + cz + d = 0$



ولتكن $M_0\left(x_0, y_0, z_0\right)$ نقطة لا تقع في المستوي $\mathcal{P}$ ، ولنسعَ إلى إيجاد $d\left(M_0, \mathcal{P}\right)$ بُعدِ النقطة M_0 عن المستوي $\mathcal{P}$.

مُدَرِّس الرياضيات:
أحمد عرابي الأحمد

علوم للجميع
المدرس: أحمد عرابي الأحمد ٠٩٥١٧٥١٩٢٨
تم التحميل من موقع علوم للجميع
http://www.3lom4all.com

لتكن $H(x,y,z)$ المسقط القائم للنقطة M_0 على هذا المستوي. لما كان المتجهان $\vec{n}(a,b,c)$ و $\overrightarrow{HM_0}(x_0-x, y_0-y, z_0-z)$ مرتبطين خطياً استنتجنا أن :

$$\left|\vec{n}.\overrightarrow{HM_0}\right| = \left|\vec{n}\right|.\left|\overrightarrow{HM_0}\right|$$

ومنه

$$\left|\overrightarrow{HM_0}\right| = \frac{\left|\vec{n}.\overrightarrow{HM_0}\right|}{\left|\vec{n}\right|}$$

أي

$$\begin{aligned}\left|\overrightarrow{HM_0}\right| &= \frac{\left|a(x_0-x)+b(y_0-y)+c(z_0-z)\right|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}\\ &= \frac{\left|ax_0+by_0+cz_0-(ax+by+cz)\right|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}\\ &= \frac{\left|ax_0+by_0+cz_0+d\right|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}\end{aligned}$$

حيث استعملنا $d=-(ax+by+cz)$ لأن H تنتمي إلى $\mathcal{P}$ ، فهي تحقق معادلته . وبذلك نكون قد أثبتنا المبرهنة الآتية :

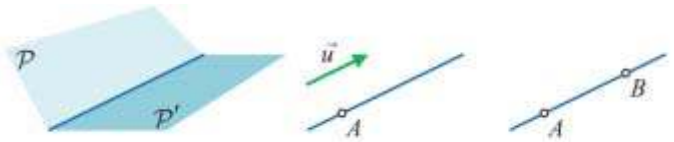
مبرهنة : ليكن المستوي $\mathcal{P}$ المعين بالمعادلة $ax+by+cz+d=0$ ولتكن $M_0(x_0,y_0,z_0)$. يعطى بُعد M_0 عن المستوي $\mathcal{P}$ بالصيغة :

$$d(M_0,P) = \frac{\left|ax_0+by_0+cz_0+d\right|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

المستقيم في الفضاء

يتعين المستقيم في الفضاء بثلاث طرائق :

- بمعرفة نقطتين من المستقيم.
- بمعرفة نقطة منه ومنحى (متجه) يوازيه.
- بمعرفة مستويين يكون المستقيم فصلَهما المشترك.

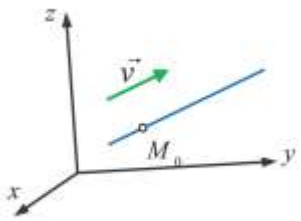


مُدَرِّس الرياضيات:
أحمد عرابي الأحمد
المدرس: أحمد عرابي الأحمد ٠٩٥١٧٥١٩٢٨
تم التحميل من موقع علوم للجميع
http://www.3lom4all.com

معادلة مستقيم يمرّ بنقطة معلومة ويوازي متجهاً معلوماً :

لتكن النقطة $M_0\left(x_0,y_0,z_0\right)$ في الفضاء. وليكن $\vec{v}\left(a,b,c\right)$ متجهاً غير معدوم.

علوم للجميع



تنتمي النقطة $M\left(x,y,z\right)$ إلى المستقيم L المارّ بالنقطة M_0 موازياً المتجه $\vec{v}\left(a,b,c\right)$ ، إذا وفقط إذا كان المتجهان $\vec{v}$ و $\overrightarrow{M_0M}$ مرتبطين خطياً.

إذا وفقط إذا وُجدَ عدد حقيقي λ يتحقق من أجله $\overrightarrow{M_0M}=\lambda.\vec{v}$.

وبالرجوع إلى مساقطهما على المحاور الإحداثية نرى أن النقطة $M\left(x,y,z\right)$ إلى المستقيم L المارّ بالنقطة M_0 موازياً المتجه $\vec{v}\left(a,b,c\right)$ إذا وفقط إذا وجد عدد حقيقي λ يحقق :

تم التحميل من موقع علوم للجميع

$$\begin{cases} x-x_0=\lambda a \\ y-y_0=\lambda b \\ z-z_0=\lambda c \end{cases} \quad \text{أو} \quad \begin{cases} x=x_0+\lambda a \\ y=y_0+\lambda b \\ z=z_0+\lambda c \end{cases}$$

http://www.3loom4all.com

نسمّي الجملة

$$\begin{cases} x=x_0+\lambda a \\ y=y_0+\lambda b \\ z=z_0+\lambda c \end{cases} \qquad \lambda\in\mathbb{R}$$

جملة المعادلات الوسيطية للمستقيم L المارّ بالنقطة M_0 موازياً المتجه $\vec{v}\left(a,b,c\right)$ وتكتب هذه المعادلات بعد حذف الوسيط λ بالشكل :

$$\frac{x-x_0}{a}=\frac{y-y_0}{b}=\frac{z-z_0}{c}$$

مع الاصطلاح نجد أنه في هذا التناسب ينعدم البسط عند انعدام المقام.

ويمكن النظر إلى هاتين المعادلتين على أنهما معادلتا مستويين : الأول يوازي المحور Oz معادلته $\frac{x-x_0}{a}=\frac{y-y_0}{b}$ والثاني يوازي المحور Oy معادلته $\frac{x-x_0}{a}=\frac{z-z_0}{b}$ والمستقيم هو فصلهما المشترك.

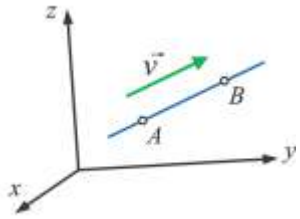
ملاحظة : نسمي المتجه $\vec{v}\left(a,b,c\right)$ متجه توجيه المستقيم L .

مدرس الرياضيات: أحمد عرابي الأحمد
أ. أحمد عرابي الأحمد ٠٩٥١٧٥١٩٤٨

معادلة مستقيم يمر بنقطتين معلومتين :

لتكن النقطتان $A\left(x_A,y_A,z_A\right)$ و $B\left(x_B,y_B,z_B\right)$.

تنتمي النقطة $M\left(x,y,z\right)$ إلى المستقيم L المار بالنقطتين A و B إذا وفقط إذا انتمت إلى المستقيم المار بالنقطة A الموازي للمتجه $\vec{v}=\overrightarrow{AB}$.



إذن جملة المعادلات الوسيطية للمستقيم L المار بالنقطتين A و B هي :

$$\begin{cases} x = x_A + \lambda.\left(x_B - x_A\right) \\ y = y_A + \lambda.\left(y_B - y_A\right) \\ z = z_A + \lambda.\left(z_B - z_A\right) \end{cases} \qquad \lambda \in \mathbb{R}$$

وهي تُكتب بعد حذف الوسيط λ بالصيغة :

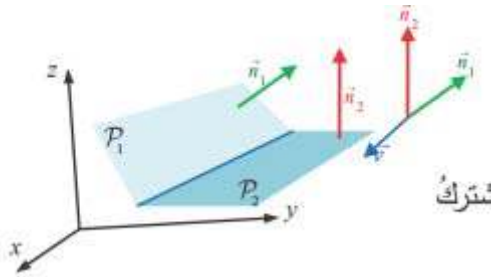
$$\frac{x - x_A}{x_B - x_A} = \frac{y - y_A}{y_B - y_A} = \frac{z - z_A}{z_B - z_A}$$

وهما تمثلان جملة معادلتين للمستقيم.

معادلة مستقيم معيَّن بتقاطع مستويين :

لنتأمل المستويين :

$$P_1 : a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0$$
$$P_2 : a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0$$



إذا كان هذان المستويان متقاطعين وكان فصلهما المشترك هو المستقيم L ألّفت جملة المعادلتين :

$$L : \begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0 \end{cases}$$

معادلتي المستقيم L .

المتجه $\overrightarrow{n_1}\left(a_1,b_1,c_1\right)$ ناظمٌ على المستوي P_1 ، و المتجه $\overrightarrow{n_2}\left(a_2,b_2,c_2\right)$ ناظمٌ على المستوي P_2 . وكل

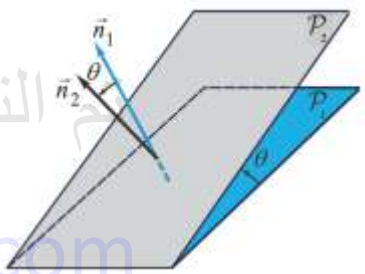
مُدَرِّس الرياضيات:
أحمد عرابي الأحمد
علوم للجميع
تم التحميل من موقع علوم للجميع
http://www.3lom4all.com
أحمد عرابي الأحمد ٠٩٥١٧٥١٩٢٨

متجه توجيه للمستقيم L يكون في آنٍ معاً عمودياً على كل من $\overrightarrow{n_1}$ و $\overrightarrow{n_2}$ ، وهذا يعني أن المتجه $\vec{v} = \overrightarrow{n_1} \wedge \overrightarrow{n_2}$ متجه توجيه للمستقيم L . وإذا كانت M_0 نقطة ما مشتركة بين المستويين P_1 و P_2 أمكننا كتابة المعادلات الوسيطية للمستقيم L أو جملة معادلتين للمستقيم انطلاقاً من إحداثيات M_0 ومن متجه التوجيه $\vec{v}$.

كلمة عن الزوايا :

عند الحديث عن الزاوية بين مستويين ، فإننا نقصد الزاوية الحادة أو القائمة بين متجه ناظم على الأول ومتجه ناظم على الثاني.

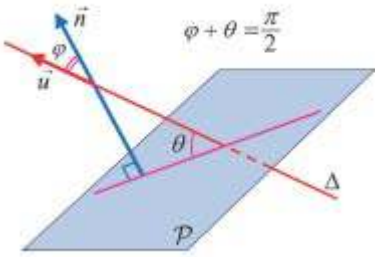
وتُحسب بسهولة من الجداء السلّمي لمتجه ناظم على المستوي الأول ومتجه ناظم على المستوي الثاني. انظر الشكل المجاور .



تم التحميل من موقع علوم للجميع
http://www.3lom4all.com

وكذلك الأمر في حالة مستقيمين متقاطعين ، نعرّف الزاوية بين هذين المستقيمين بأنها الزاوية الحادة أو القائمة التي يصنعها متجه توجيه المستقيم الأول مع متجه توجيه توجيه المستقيم الذاني (لاحظ أنه لا معنى للحديث عن زاوية مستقيمين غير متقاطعين) . وتؤول المسألة إلى حساب زاوية متجهين.

وأخيراً الزاوية بين مستقيم ومستوٍ هي متممة الزاوية الحادة أو القائمة التي يصنعها متجه توجيه للمستقيم ومتجه ناظم على المستوي، كما هو مبين في الشكل المجاور.



تقاطع مستقيم ومستوٍ :

لنتأمل مستقيماً $\mathcal{L}$ ومستوياً $\mathcal{P}$. نعلم أنه إما أن يكون $\mathcal{L}$ محتوى في $\mathcal{P}$ ، أو أن يكون موازياً للمستوي $\mathcal{P}$ ولا يشترك معه في أيّ نقطة ، أو أن يتقاطع $\mathcal{L}$ و $\mathcal{P}$ في نقطة واحدة.

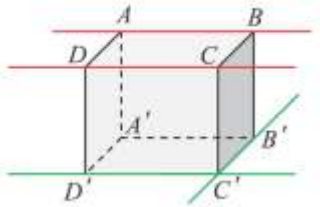
يكون $\mathcal{L}$ و $\mathcal{P}$ متوازيين إذا كان متجه توجيه للمستقيم $\mathcal{L}$ عمودياً على متجه ناظم على المستوي $\mathcal{P}$.

الوضع النسبي لمستقيمين :

مُدرِّس الرياضيات:
أحمد عرابي الأحمد
المدرس ١٠
د عرابي الأحمد ٠٩٥١٧٥١٩٢٨

المستقيمان الواقعان في مستوٍ واحد هما مستقيمان متوازيان ، مثل (AB) و (CD) ، أو مستقيمان متقاطعان مثل $(C'B')$ أو $(D'C')$.

علوم للجميع



توازي مستقيمين يعني الارتباط الخطي لمتجه توجيه للأول مع متجه توجيه للثاني.

وإذا لم يكن المستقيمان واقعين في مستوٍ واحد مثل (AB) و $(C'B')$ كانا متخالفين.

تم التحميل من موقع علوم للجميع
http://www.sloom4all.com

انتهى

بالتوفيق والنجاح

المدرس : أحمد عرابي الأحمد

0951751928

درس: أحمد عرابي الأحمد ٠٩٥١٧٥١٩٢٨

مُدَرِّس الرياضيات:
أحمد عرابي الأحمد