



www.dirasats.com



هذا الغلاف لا يعبر عن حقوق الملكية او فحوى الكتاب, فهو مجرد واجهة للموقع المحمل منه

شكرا لك على ثقتك بنا وعلى اختيار موقعنا

www.dirasats.com



من اجل تواصل معنا المرجو زيارة الموقع ستجد جميع المعلومات

www.dirasats.com



UNIVERSITE MOHAMED 1er
FACULTE DES SCIENCES
Département de Mathématiques
et Informatique
Oujda

SMAI Semestre 2
Algèbre 2
Contrôle Final
Année 2011/2012
Durée 3 heures

Session ordinaire du printemps 2012

<http://webserver.iam.net.ma/~chellali/sma2>

mustapha.chellali@gmail.com

Les Problèmes I, II, III, IV, V et VI sont indépendants

I Décomposer en éléments simples dans $\mathbb{R}(X)$ la fraction :

$$F = \frac{2X^4}{(X+1)^2(X^2+3)}$$

II On considère dans l'espace vectoriel \mathbb{R}^4 le système :

$$\mathcal{S} = ((2, -1, 0, 1), (1, -1, 1, 1), (7, -4, 1, 1), (4, -3, 2, 3))$$

1 Donner l'rang de \mathcal{S} (Justifier votre réponse)

2 Donner une base de $\text{vect}(\mathcal{S})$

3 Donner la décomposition des autres éléments de \mathcal{S} dans la base ci-dessus.

III Soit K un corps commutatif et E l'ensemble de $K(X)$:

$$E = \left\{ \frac{a_0 + a_1X + a_2X^2}{X(X-1)} \mid a_0, a_1, a_2 \in K \right\}$$

1 Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $K(X)$

2 Montrer que $1, 1/X, 1/(X-1) \in E$

3 Montrer que $B = (1, 1/X, 1/(X-1))$ est une base de E

$$\text{Soit } f : E \rightarrow E \quad \frac{a_0 + a_1X + a_2X^2}{X(X-1)} \mapsto \frac{a_0 + a_1(1-X) + a_2(1-X)^2}{X(X-1)}$$

4 Montrer que f est un endomorphisme de E

5 Calculer $M_B(f)$

6 Écrire matriciellement la relation $f(v) = 0$

7 Montrer que f est injective

8 En déduire que f est un automorphisme de E

$$\text{Soit } B' = (1/(X(X-1)), X/(X(X-1)), (X+1)/X)$$

9 Montrer que B' est libre

10 En déduire que B' est une base de E

11 Donner la matrice de passage de B à B'

12 Calculer $M_{B'}(f)$

IV Soient A,B,C des matrices de types respectivement (m,n) , (p,q) et (r,s) . Trouver toutes les valeurs possibles de (m,n,p,q,r,s) pour que ABC, CAB et BCA soient définies.

V Soit $E = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ un ensemble fini à n éléments et K un corps commutatif.

$$1 \text{ Montrer que l'application } \varphi : K^E \longrightarrow M_{n,1}(K) \quad f \longrightarrow \varphi(f) = \begin{pmatrix} f(x_1) \\ f(x_2) \\ \vdots \\ f(x_n) \end{pmatrix}$$

est un isomorphisme d'espace vectoriel.

2 Soient (f_1, f_2, \dots, f_p) un système de K^E . Soit $A = (f_j(x_i)) \in M_{n,p}(K)$. Montrer que :

$$(f_1, f_2, \dots, f_p) \text{ libre} \iff \text{rang}(A) = p$$

3 En déduire que :

$$(f_1, f_2, \dots, f_p) \text{ libre} \iff \exists y_1, y_2, \dots, y_p \in E \text{ tel que } (f_j(y_i)) \text{ inversible}$$

VI Soit E un espace vectoriel de dimension finie. Soient $f, g \in \mathcal{L}(E)$ des endomorphismes de E .

1 Montrer que $\text{Im}(f \circ g) \subset \text{Im}(f)$

2 En déduire que $\text{rg}(f \circ g) \leq \text{rg}(f)$

3 Montrer que $\text{Ker}(g) \subset \text{Ker}(f \circ g)$

4 En déduire que $\text{rg}(f \circ g) \leq \text{rg}(g)$

5 Soit $x \in \text{Ker}(f \circ g)$ montrer que $g(x) \in \text{Ker}(f)$

Soit l'application linéaire $\theta : \text{Ker}(f \circ g) \longrightarrow \text{Ker}(f) \quad x \longrightarrow g(x)$

6 Montrer que $\text{Ker}(\theta) = \text{Ker}(g)$

7 Montrer que $\text{Im}(\theta) = \text{Im}(g) \cap \text{Ker}(f)$

8 Montrer que

$$\dim(\text{Ker}(f \circ g)) \leq \dim(\text{Ker}(f)) + \dim(\text{Ker}(g))$$

9 Montrer que cette inégalité est une égalité si et seulement si $\text{Ker}(f) \subset \text{Im}(g)$

10 Montrer que

$$\text{rg}(f) + \text{rg}(g) - \dim(E) \leq \text{rg}(f \circ g) \leq \inf(\text{rg}(f), \text{rg}(g))$$