BAB III. PEMBELAJARAN MATA KULIAH

A. TRANSPORTASI (KONTEN I)

Deskripsi Singkat

Proses transportasi adalah tahap distribusi barang atau jasa dari tangan produsen ke tangan konsumen. Untuk memecahkan masalah transportasi, para manajer menggunakan bidang ilmu Riset Operasi. Salah satu model yang digunakan dalam transportasi adalah Model Linier Programming. Linear programming adalah suatu model umum yang mencakup perancanaan kegiatan-kegitan untuk mencapai suatu hasil yang optimal, yaiitu suatu hasil yang mencerminkan tercapainya sasaran tertentu yang paling baik diantara alternatif-alternatif lain, dengan menggunakan fungsi linear (Hamdy Taha. 2005)

Aplikasi dari teknik linear programing pertama kali dilakukan dalam merumuskan persoalan transportasi dan memecahkannya. Persoalan dasar transportasi pada mulanya dikembangkan oleh F.L. Hitchcock pada tahun 1941 dalam studinya yang berjudul : ***The distribution of a product from several source to numerous locations***. Pada awal tahun 1947, TC Koopmans secara terpisah menerbitkan suatu hasil studi mengenai : ***Optimum utilization of the transportation system***. Selanjutnya, perumusan persoalan *linear programing*, dan cara pemecahan yang sistematis dikembangkan oleh Prof. George Danzig yang sering disebut **Bapak *linear programing.***

Kompetensi yang Dapat Dicapai Oleh Mahasiswa

1. Mampu membuat Model Linier dari masalah Transportasi.
2. Mampu menganalisis soal- soal dari Model Transportasi yang ada.
3. Mampu mengaplikasi Model Transportasi dalam salah satu bidang.
4. Mampu membuat tugas Tim, mempresentasikannya dengan informatif dan jelas.

1. Linear Programming

Linear programming ialah suatu teknik Riset Operasi untuk memecahkan persoalan optimisasi (maksimisasi atau minimisasi) dengan menggunakan persamaan dan ketidaksamaan linear dalam rangka untuk mencari pemecahan yang optimum dengan memperhatikan pembatasan-pembatasan yang ada.

Model umum Linear Programming adalah :

Fungsi tujuan: Maksimum atau Minimum dari

$$Z = \sum_{i=1}^{n} c_j x_j \quad \text{atau} \quad Z = c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 + \ldots + c_nx_n \tag{1}$$

Dengan syarat batas:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + a_{1n}x_n \le = \ge b_1 \tag{2}$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \ldots + a_{2n}x_n \le = \ge b_2 \tag{3}$$

. .

. .

. .

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \ldots + a_{mn}x_n \le = \ge b_n \tag{4}$$

Atau $$\sum_{i=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i, \tag{5}$$

dengan:

- Z : Fungsi tujuan dari keputusan
- x_n : Tingkat kegiatan keputusan ke-n
- a_{mn} : Banyaknya sumber daya yang dikomsumsi pada kegiatan ke-m untuk menghasilkan setiap unit aktivitas n
- b_n : Banyaknya sumber atau fasilitas ke-m yang tersedia untuk dialokasikan pada setiap jenis aktivitas (sumber yang terbatas)

C_n : Sumbangan perunit kegiatan (*cost)*

Asumsi-asumsi dasar *Linear Programming* ada lima (5) yaitu :

a. *Propertionality*, asumsi ini berarti naik turunnya nilai *Z* dan penggunaan sumber atau fasilitas yang tersedia akan berubah secara sebanding dengan perubahan tingkat kegiatan.
b. *Additivity*, berarti nilai tujuan tiap kegiatan tidak saling mempengaruhi, atau dalam program linear dianggap bahwa kenaikan suatu kegiatan dapat ditambahkan tanpa mempengaruhi nilai *Z* yang diperoleh dari kegiatan lain.
c. *Divisibility*, berarti bahwa variable dalam program linear tidak harus berupa bilangan bulat (*integer*).
d. *Certainty (deterministic)*, berarti bahwa semua parameter (a_{ij}, b_j, c_j) yang terdapat pada program linear dapat diperkirakan dengan pasti, meskipun dalam kenyataan tidak sama persis.
e. *Non-negativity*, berarti suatu masalah yang akan diselesaikan dengan program linear diasumsikan bahwa setiap variabelnya bernilai lebih besar atau sama dengan nol (≥ 0), dengan kata lain tidak ada variable yang bernilai nol.

Pemecahan model program linear ada dua cara yaitu :

1) Metode Grafik

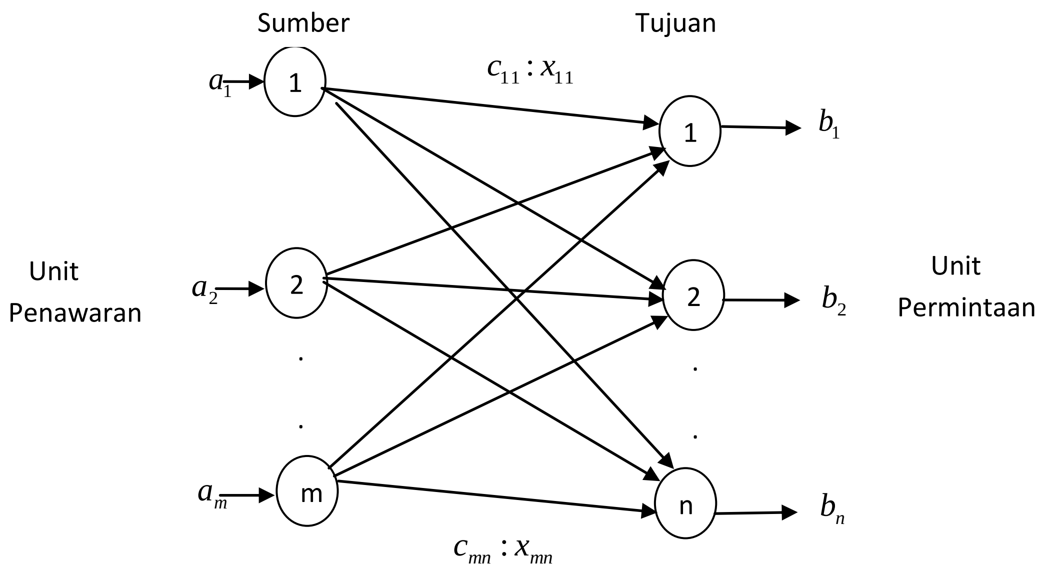
   Metode grafik merupakan salah satu teknik pemecahan model program linear yang hanya memuat dua variable keputusan.

2) Metode Simpleks

   Metode simpleks merupakan teknik pemecahan model program linear yang memuat lebih dari dua variable keputusan.

2. Model Transportasi

Aplikasi dari teknik linear programing pertama kali ialah dalam merumuskan persoalan transportasi dan memecahkannya. Berikut proses transportasi antara *Demand* (permintaan) dan *Supply* (penawaran) dapat dilihat pada Gambar 1.



Gambar 1: Grafik Demand dan Supply

Gambar 1 menunjukkan sebuah model tansportasi dari sebuah jaringan dengan *m* sebagai sumber dan *n* sebagai tujuan. Sumber dan tujuan diwakili dengan sebuah node, dan rute pengiriman barang dari yang menghubungkan sumber dan tujuan diwakili dengan busur, dimana :

a. Masing-masing sumber mempunyai kapasitas a_i, i = 1,2,3,..m
b. Masing-masing tujuan mempunyai kapasitas b_i, i = 1,2,3,..n
c. x_{ij} : jumlah satuan unit yang dikirim dari sumber i ke tujuan j
d. C_{ij} : ongkos pengiriman per unit dari sumber i ke tujuan j (Taha, 1996)

Dengan demikian formulasi linear programing dari persoalan Transportasi adalah :

Fungsi tujuan :

Meminimumkan $z = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij}$ (6)

Dengan batasan :

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} \le a_i , i = 1,2,..m \quad (7)$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} \geq b_j \, , \; j = 1,2,...n \tag{8}$$

$x_{ij} \geq 0$, untuk semua i dan j

Persamaan (7) menetapkan bahwa jumlah pengiriman dari sebuah sumber tidak dapat melebihi penawarannya, demikian pula persamaan (8) mengharuskan bahwa jumlah pengiriman ke sebuah tujuan tidak dapat melebihi permintaannya. Jadi batasan di atas mensiratkan bahwa penawaran total sama dengan permintaan total.

Tujuan Model Transportasi adalah menentukan jumlah yang harus dikirim dari setiap sumber ke setiap tujuan sedemikian rupa, sehingga biaya transportasi total dapat diminimumkan. Metode yang digunakan dalam pemecahan persoalan transportasi ada lima yaitu :

1) Metode Sudut Barat Laut (NorthWest Corner Rule)
2) Metode Vogel
3) Metode Biaya Terendah
4) Metode Batu Loncatan
5) Metode Danzing

Selanjutnya keadaan yang menggambarkan kegiatan pengiriman barang dari setiap sumber ke setiap tujuan dapat dilihat pada Tabel 1. Berdasarkan Tabel 1 dapat diperoleh persamaan matematika untuk memperoleh nilai variabel x_{ij} yang akan meminimalkan total biaya. Persamaan (7) menunjukkan jumlah baris dari tabel, persamaan (6) dan (8) menunjukkan jumlah kolom. Dengan tujuan membuat persamaan (7) dan (8) bersesuaian, jumlah persamaan (7) sama dengan jumlah dari persamaan (8), maka :

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = \sum_{i} a_i = \sum_{j} b_j = A \tag{9}$$

Sistem dari persamaan (6) hingga (8) dianggap masalah *Linear programming* dengan $m+n$ persamaan. Berdasarkan Tabel.1 dapat diperoleh persamaan matematika untuk memperoleh nilai variabel x_{ij} yang akan meminimalkan total biaya. Masalah transportasi pada dasarnya

merupakan sebuah program linier yang dapat dipecahkan oleh metode simpleks. Metode transportasi pada intinya mengikuti langkah-langkah dari metode simpleks.

Tabel. 1 Tabel Transportasi (Input- Output)

Ke Dari		Tujuan						Supplay
		1	2	…	*j*	…	*n*	
Sumber	1	C_{11} X_{11}	C_{12}		C_{11}		C_{1n} X_{1n}	a_1
	2	C_{21} X_{21}	C_{22} X_{22}		C_{21} X_{21}		C_{2n} X_{2n}	a_2
	.	. . .	. . .		. . .		. . .	. . .
	i	C_{i1}	C_{i2}		C_{ij}		C_{in}	a_i
	.	. . .	. . .		. . .		. . .	. . .
	m	C_{m1} X_{m1}	C_{m2} X_{m2}		C_{m1} X_{m1}		C_{mn} X_{mn}	a_n
Demand		b_1	b_2		b_j		b_n	$\Sigma a_i = \Sigma \mathbf{b_j}$

Ada empat langkah dasar dalam Model Transportasi, yaitu :

a) Menterjemahkan permasalahan menjadi bentuk tabel
b) Menentukan solusi fisibel awal (*initial fesible solution*).
c) Melakukan perbaikan pada solusi awal hingga kemungkinan perbaikan tidak mungkin dilakukan lagi (solusi optimal telah tercapai)
d) Mengidentifikasi dan mengevaluasi solusi akhir.
e) Metode yang digunakan untuk memperoleh solusi fisibel awal adalah :

1) Metode Sudut Barat Laut (NorthWest Corner Rule)

Metode ini adalah yang paling sederhana untuk mencari solusi awal. Ciri dari metode ini adalah alokasi satuan belum memandang biaya transportasi. Langkah-langkahnya seperti berikut :

a) Mulai dari pojok barat laut tabel dan alokasikan sebanyak mungkin pada X_{11} tanpa menyimpang dari kendala penawaran atau permintaan (artinya X_{11} ditetapkan sama dengan **yang terkecil** diantara nilai $\boldsymbol{a_1}$ **dan** $\boldsymbol{b_1}$).
b) Proses pertama akan menghabiskan penawaran pada sumber 1 dan atau permintaan pada tujuan 1. Akibatnya, tak ada lagi barang yang dapat dialokasikan ke kolom atau baris yang telah dihabiskan dan kemudian baris atau kolom itu dihilangkan. Kemudian pengalokasian sebanyak mungkin ke kotak didekatnya pada baris atau kolom yang dapat dihilangkan. Jika baik kolom maupun baris telah dihabiskan, pindahlah secara diagonal ke kotak berikutnya.
c) Lanjutkan dengan cara yang sama sampai semua penawaran telah dihabiskan dengan keperluan permintaan telah dipenuhi.

2) Metode vogel (Vogel Approximation Method)

Prosedur lain yang dapat digunakan untuk menentukan alokasi awal adalah metode pendekatan Vogel atau *Vogel Approximation Method* yang juga dikenal dengan *penalty method* atau metode penalti. Metode ini diperkenalkan oleh W.R Vogel pada tahun

1948. Dengan prosedur ini, tiap alokasi dilakukan atas dasar *opportunity cost* atau penalti yang dikenakan jika alokasi tersebut tidak dipilih. Langkah-langkah menggunakan metode vogel :

a) Hitung pinalti untuk tiap kolom dan baris dengan jalan mengurangkan elemen ongkos terkecil pertama dengan ongkos terkecil kedua.
b) Lihat kolom/baris dengan pinalti terbesar. Alokasikan sebanyak mungkin pada variabel dengan ongkos terkecil, sesuaikan dengan penawaran dan permintaan, kemudian tandai kolom atau baris yang sudah terpenuhi. Bila terdapat 2 buah kolom atau baris yang terpenuhi secara simultan, pilih salah satu untuk ditandai, sehingga penawaran atau permintaan pada kolom atau baris yang tidak terpilih adalah nol. Setiap baris atau kolom dengan penawaran atau permintaan sama dengan nol, tidak akan diikutkan kembali dalam perhitungan pinalti berikutnya.
c) Bila tinggal 1 kolom atau baris yang belum ditandai maka pekerjaan dihentikan.
    - Bila tinggal 1 kolom atau baris dengan penawaran atau permintaan positif belum ditandai, tentukan variabel basis pada kolom atau baris dengan cara ongkos terkecil.
    - Bila seluruh baris dan kolom yang belum ditandai mempunyai penawaran dan permintaan yang sama dengan nol, tentukan variable-variabel basis yang berharga nol dengan cara ongkos terkecil kemudian pekerjaan dihentikan.
    - Jika langkah 3 a, b, dan c tidak terjadi maka hitung kembali pinalti untuk baris dan kolom yang belum ditandai, kembali ke langkah 2. (Juanda,1998)

3) Metode Biaya Terendah

Metode biaya terendah atau *Least-Cost Method* berusaha mencapai tujuan minimisasi biaya dengan alokasi sistematik kepada kotak-kotak sesuai dengan besarnya biaya transportasi_ per unit. Prosedur metode ini adalah :

a. Pilih variabel X_{ij} (kotak) dengan biaya trasport (c_{ij}) terkecil dengan alokasikan sebanyak mungkin. Untuk c_{ij} terkecil, X_{ij} = minimum [a_i, b_i]. Ini akan menghabiskan baris $_i$ atau kolom $_j$.

b. Dari kotak-kotak sisanya yang layak (yaitu yang tidak terisi atau tidak dihilangkan) pilih nilai c_{ij} terkecil dan alokasikan sebanyak mungkin.
c. Lanjutkan proses ini sampai semua penawaran dan permintaan terpenuhi.

Apabila telah diperoleh sebuah solusi fisibel awal atau *feasible solution* tahap berikutnya adalah menguji apakah jawaban tersebut sudah optimal, dalam hal ini minimum. Metode yang digunakan adalah :

4) Metode Batu loncatan (Stepping Stone Method)

Jumlah rute atau sel yang mendapat alokasi harus sebanyak:

$$\mathbf{m + n - 1}$$

a. Memilih salah satu sel kosong (yang tidak mendapatkan alokasi) atau disebut *nonbasis cell*.

b. Mulai dari sel ini, kita membuat jalur tertutup melalui sel-sel yang mendapatkan alokasi (basis) menuju sel non basis terpilih kembali. Jalur tertutup ini bergerak secara horisontal dan vertikal saja.

c. Mulai dengan tanda (+) pada sel kosong terpilih, kita menem-patkan tanda (-) dan (+) secara bergantian pada setiap sudut jalur tertutup.

d. Menghitung indeks perbaikan dengan cara menjumlahkan biaya transportasi pada sel bertanda (+) dan mengurangkan biaya transportasi pada sel bertanda (-).

e. Mengulangi tahap a sampai d hingga indeks perbaikan untuk semua sel kosong telah terhitung. Jika indeks perbaikan dari sel-sel kosong lebih besar atau sama dengan nol, solusi optimal telah tercapai.

5) Metode Danzing (Modified Distribution Method)

Langkah-langkah menggunakan metode Danzing adalah :

a. Untuk setiap tabel dengan pemecahan awal yang fisibel

$$c_{ij} = U_i + V_j \text{ dimana } U_i = 0 \tag{10}$$

$\bar{c}_{ij} = U_i + V_j$ untuk semua (i, j) (11)

b. Hitung indeks perbaikan

$$I_{ij} = U_i + V_j - c_{ij} \quad (12)$$

Persamaan (12) dihitung untuk semua kotak yang bukan basis. Jika $I_{ij} \leq 0$ maka pemecahan telah optimum , apabila $I_{ij} \geq 0$ dilanjutkan ke langkah berikutnya.

c. Gambarkan lintasan atau jalur tertutup (*closed path*) dari kotak dengan indeks perbaikan positif terbesar, yang masuk menjadi basis.

d. Beri tanda (+) kemudian (-) secara bergantian pada biaya dari kotak yang membentuk lintasan seperti pada metode batu loncatan.

e. Untuk variabel yang berasal dari kotak dengan tanda (+) cari yagn nilainya minimum. Kotak ini harus keluar basis dan nilainya dialokasikan bagi variabel dari kotak yang mempunyai nilai indeks perbaikan yang positif terbesar (kotak yang masuk basis).

f. Buat tabel yang baru, kemudian kembali ke langkah b, Apabila semua nilai $I_{ij} \leq 0$ maka proses dihentikan karena pemecahan sudah optimum. (Suprapto,2005)

6) Variasi Masalah Transportasi

Dalam situasi praktikal, aplikasi metode transportasi dapat menghadapi dua kasus, yaitu ketidakseimbangan *supply* dan *demand* dan degeneracy.

a) Ketidakseimbangan Supply dan Demand

Bila *Supply* Lebih Besar Dari *Demand* , persoalan ini diselesaikan dengan menyeimbangkan *supply* dan *demand,* dengan cara menetapkan *dummy* pada tujuan (kolom) yang memiliki *demand* sebesar $\sum a_i - \sum b_j$. *Dummy* pada kolom tabel transportasi pada dasarnya buatan (tidak riil). Dengan demikian, biaya distribusi dari sumber ke *dummy* ini adalah nol. Jika Supply lebih kecil Dari Demand harus diseimbangkan kembali *supply* dan *demand* dengan menetapkan *dummy* sumber yang memiliki supply sebesar kelebihan *demand* atas *supply* $\sum b_j - \sum a_i$. *Dummy* sumber pada baris tabel transpor-tasi pada dasarnya adalah sumber buatan (tidak riil). Dengan demikian, biaya distribusi dari *dummy* ke tujuan ini adalah nol.

b) Kasus Degeneracy

Kasus *degeneracy* dalam metode transportasi terjadi jika jumlah sel yang mendapat alokasi *(basis cell)* dalam tabel transportasi kurang dari jumlah baris ditambah jumlah kolom dikurangi satu (m + n – 1). Akibat langsung dari kasus *degeneracy* adalah dua metode untuk mengevaluasi solusi yang ada, yaitu metode batu loncatan dan metode *danzing*, tidak dapat diaplikasikan. Untuk itu, prosedur tambahan dibutuhkan untuk menyelesaikan persoalan *degeneracy* ini.

Prosedur yang dimaksud adalah dengan menetapkan salah satu dari sel kosong dan menempatkan alokasi bernilai nol pada sel tersebut sehingga persyaratan jumlah sel yang mendapat alokasi sebanyak m + n – 1 terpenuhi. Pemilihan sel dilakukan secara sembarang sepanjang evaluasi dengan metode batu loncatan dan *danzing* dapat dilakukan. Selanjutnya, diasumsikan sel yang telah terpilih ini sebagai sel yang mendapatkan alokasi.

Kasus *degeneracy* bisa terjadi setelah tabel transportasi awal diperoleh. Hal ini terjadi karena adanya eliminasi dua sel pada aplikasi metode batu loncatan. Akibatnya, jumlah sel yang mendapatkan alokasi tidak sesuai dengan aturan m + n – 1. Solusi atas persoalan ini pada hakekatnya adalah sama dengan prosedur yang digunakan sebelumnya.

B. Contoh Soal- soal

1. **Contoh** ***Soal dari Pengantar Riset Operasi halaman 254 nomor 1***

Suatu perusahaan mempunyai tiga pabrik yang menghasilkan suatu produk tertentu yang diangkut ke empat pusat distribusi. Pabrik 1, 2, dan 3 menghasilkan 12, 17, dan 11 angkutan per bulan berturut-turut. Setiap pusat distribusi harus menerima 10 angkutan per bulan. Jarak dari setiap pabrik pusat distribusi yang bersangkutan diberikan dalam kilometer sebagai berikut ;

Pusat Distribusi

		1	2	3	4
	1		1.300	400	700
Pabrik	2	1.100	1.400	600	1.000
		600	1.200	800	900

Biaya angkutan untuk setiap angkutan adalah $100 ditambah 50 sen/km.

Berapa banyak harus diangkat dari setiap pabrik ke masing-masing pusat distribusi meminimumkan total biaya pengiriman?

a. Rumuskan masalah ini sebagai masalah transportasi dengan membuat tabel biaya dan persyaratan
b. Pakailah aturan sudut Barat Laut untuk memperoleh penyelesaian layak dasar awal.

Jawab :

a) Tabel rumusan masalah biaya dan persyaratan

❖ **Menghitung Nilai Cost**

Oleh karena biaya angkutan untuk setiap angkutan adalah $100 ditambah 50 sen/km maka diperoleh:

C_{ij} = \$100 + (\$0,5/km*S)

C_{11} = \$100 + (\$0,5/km*800km) = \$500

C_{12} = \$100 + (\$0,5/km*1300km) = \$750

C_{13} = \$100 + (\$0,5/km*400km) = \$300

C_{14} = \$100 + (\$0,5/km*700km) = \$450

C_{21} = \$100 + (\$0,5/km*1100km) = \$650

C_{22} = \$100 + (\$0,5/km*1400km) = \$800

C_{23} = \$100 + (\$0,5/km*600km) = \$400

C_{24} = \$100 + (\$0,5/km*1000km) = \$600

C_{31} = \$100 + (\$0,5/km*600km) = \$400

C_{32} = \$100 + (\$0,5/km*1200km) = \$700

C_{33} = \$100 + (\$0,5/km*800km) = \$500

C_{34} = \$100 + (\$0,5/km*900km) = \$550

❖ **Membuat Tabel Cost (biaya)**

Tujuan

	1	2	3	4	Persediaan
1	50	75	30	45	12
	65	80	40	60	17
2	40	70	50	55	11
Permintaan	10	10	10	10	40

Masukkan nilai cost C_{11} sampai C_{34} ke dalam tabel cost

b). Penyelesaian layak dasar awal

Tujuan

	1	2	3	4	Persediaan
1	10 [50]	2 [75]	[30]	[45]	12
	[65]	8 [80]	9 [40]	[60]	17
2	[40]	[70]	1 [50]	10 [55]	11
Permintaan	10	10	10	10	40

Setelah membuat tabel biaya (cost), selanjutnya kita menentukan jumlah satuan atau uniy yang dikirim dari sumber i ke tujuan i (x_{ij}) dengan menggunakan sudut Barat Laut. Berdasarkan teori yang ada, dalam menyelesaikan persoalan transportasi dengan Metode Sudut Barat Laut dapat kita selesaikan dengan langkah sebagai berikut :

- Membandingkan nilai a_1 dan b_1. Karena $b_1<a_1$ maka alokasinya $x_{11} = 10$. Dengan demikian permintaan pada tujuan pertama yang berada di kolom 1 telah terpenuhi.
- Membandingkan nilai $a_1 - x_{11}$ dengan nilai b_1. Karena $a_1 - x_{11} < b_1$ maka alokasinya $x_{12} = 2$. Dengan demikian persediaan pada sumber pertama telah habis.
- Membandingkan nilai $b_2 - x_{12}$ dengan nilai a_2. Karena $b_2 - x_{12} < a_2$ maka alokasinya $x_{22} = 8$. Dengan demikian permintaan pada tujuan kedua telah terpenuhi.
- Membandingkan nilai $a_2 – x_{22}$ dengan nilai b_3. Karena $a_2 - x_{22} < b_3$ maka alokasinya $x_{23} = 9$. Dengan demikian persediaan pada sumber kedua telah habis.
- Membandingkan nilai $b_3 - x_{23}$ dengan nilai a_3. Karena $b_3 - x_{23} < a_3$ maka alokasinya $x_{33} = 1$. Dengan demikian permintaan pada tujuan ketiga telah terpenuhi.

- Membandingkan nilai $a_3 - x_{33}$ dengan nilai b_4. Karena $a_3 - x_{33} = b_4$ maka alokasinya x_{34} = 10. Dengan demikian persediaan pada tujuan ke empat telah terpenuhi dan hal ini mengakibatkan persediaan sumber kedua telah habis.

$$
\begin{aligned}
z &= \sum c_{ij} x_{ij} \\
&= C_{11}X_{11} + C_{12}X_{12} + C_{22}X_{22} + C_{23}X_{23} + C_{33}X_{33} + C_{34}X_{43} \\
z &= 10 \times 500 + 2 \times 750 + 8 \times 800 + 9 \times 400 + 1 \times 500 + 10 \times 550 \\
&= 5000 + 1500 + 6400 + 3600 + 500 + 5500 \\
&= \$22.000
\end{aligned}
$$

2. Contoh Penggunaan Metode Vogel Dalam Penentuan Solusi Feasible Awal

Sumber (i) \ Tujuan	1	2	3	4	Persediaan
1	10	0	20	11	15
2	12	7	9	20	25
3	0	14	16	18	5
Permintaan	5	15	15	10	

Tentukan biaya total transportasi yang dibutuhkan!

<u>Penyelesaian :</u>

- **Langkah I** :

Tentukan penalty baris dan penalty kolom dengan cara mengurangkan ongkos terkecil pada setiap baris dan atau setiap kolom dengan ongkos terkecil berikutnya pada setiap baris dan atau setiap kolom. Misalkan pada *baris ke-1* ongkos yang terkecil adalah **10** dan yang terkecil selanjutnya adalah **0**, maka selisihnya adalah **10**, sehingga penalty baris ke-1 adalah **10**. Sedangkan pada *kolom ke-1* ongkos terkecilnya adalah **10** dan ongkos terkecil selanjutnya adalah **0** maka selisihnya adalah **10** maka penalty pada kolom ke-1 adalah **10**, demikian juga untuk kolom dan baris yang lainnya, sehingga diperoleh penalty baris dan penalty kolom seperti dalam tabel berikut:

	T_1	T_2	T_3	T_4	a_1	Penalty I Baris
A_1	5 $\boxed{10}$	10 $\boxed{0}$	$\boxed{20}$	$\boxed{11}$	15	10
A_2	$\boxed{12}$	5 $\boxed{7}$	15 $\boxed{9}$	5 $\boxed{20}$	25	2
A_3	$\boxed{0}$	$\boxed{14}$	$\boxed{16}$	5 $\boxed{18}$	5	14
b_1	5	15	15	10		
Penalty I Kolom	10	7	7	7		

Keterangan :

a_1 = persediaan

b_1 = permintaan

- **Langkah II** :

Pilih penalty baris atau penalty kolom yang terbesar yaitu **14** yang terletak pada baris ke-3, maka penentuan variabel basisnya dimulai dari kolom ke-3 dengan metode ongkos terkecil. Ongkos terkecil yang terdapat pada baris ke-3 adalah **0** yang berada pada kolom ke-1 dan ke-2. Maka alokasikan nilai **5** pada X_{31}, sehingga diperoleh X_{31}= **5.** Dengan demikian baris ke-3 dan kolom ke-1 ditandai (dengan memberinya warna kuning) dan tidak akan diikutkan dalam penetuan penalty berikutnya. Jadi diperoleh tabel sebagai berikut

	T_1		T_2		T_3		T_4		a_1
A_1	0	10		0		20		11	15
A_2	0	12		7		9		20	25
A_3	5	0	0	14	0	16		18	0
b_1	0		15		15		10		

- **Langkah III** :

Hitung lagi penalty baris/kolom berikutnya tanpa melibatkan ongkos-ongkos yang terletak pada baris ke-3 dan kolom ke-1, sehingga akan diperoleh hasil seperti pada tabel di bawah ini.

	T_1		T_2		T_3		T_4		a_1	Penalty II Baris
A_1	0	10		0		20		11	15	11
A_2	0	12		7		9		20	25	2
A_3	5	0	0	14	0	16	0	18	0	-
b_1	0		15		15		10			
Penalty II Kolom	-		7		11		9			

- **Langkah IV**

Penalty terbesar berikutnya yaitu **11** berada pada baris ke-1 dan kolom ke-3 selanjutnya kita memilih salah satunya. Misalnya dipilih kolom ke-3 dimana ongkos terkecil yang terdapat pada kolom ke-3 adalah terdapat pada baris ke-2 yaitu **9**, maka : X_{22}= **15**, kemudian ditandai

dengan memberinya warna kuning(tidak ikut dalam perhitungan penalty berikutnya). Sehingga tabelnya menjadi seperti di bawah ini :

	T_1	T_2	T_3	T_4	a_1
A_1	0 10	0	0 20	11	15
A_2	0 12	7	15 9	20	10
A_3	5 0	0 14	0 16	0 18	0
b_1	0	15	0	10	

- **Langkah V** :

Hitung lagi penalty selanjutnya tanpa melibatkan ongkos yang terletak pada kolom ke-1 dan ke-3 serta baris ke-3. Sehingga diperoleh tabel berikut:

	T_1	T_2	T_3	T_4	a_1	Penalty III Baris
A_1	0 10	0	0 20	11	15	11
A_2	0 12	7	15 9	20	10	13
A_3	5 0	0 14	0 16	0 18	0	-
b_1	0	15	0	10		
Penalty III Kolom	-	7	-	9		

- **Langkah VI**

Penalty terbesar selanjutnya terdapat pada baris ke-2 yaitu **13** dan ongkos terkecil yang terdapat pada baris ke-2 ada kolom ke-2 dan baris ke-2 (X_{22}) selanjutnya pada X_{22} kita alokasikan nilai **10**, jadi diperoleh X_{22} = **10**. Dengan demikian untuk membedakannya kita beri tanda dengan warna kuning pada baris ke-2. Adapun tabelnya sebagai berikut:

	T_1		T_2		T_3		T_4		a_1
A_1	0	10		0	0	20		11	15
A_2	0	12	10	7	15	9	0	20	0
A_3	5	0	0	14	0	16	0	18	0
b_1	0		5		0		10		

- **Langkah VII**

Dari tabel di atas kita dapat melihat bahwa persediaan yang masih tersedia adalah **15** pada baris ke-1, sedangkan permintaan yang belum terpenuhi adalah kolom ke-2 sebanyak **5** dan kolom ke-4 sebanyak **10.** Karena tidak ada pilihan lain, maka alokasikan X_{12}=**5** dan X_{14}=**10**. Sebagai tanda kita memberi warna kuning sebagai tanda. Adapun tabelnya sebagai berikut:

	T_1		T_2		T_3		T_4		a_1
A_1	0	10	5	0	0	20	10	11	0
A_2	0	12	10	7	15	9	0	20	0
A_3	5	0	0	14	0	16	0	18	0
b_1	0		0		0		0		

Dengan X_{12}=**5** X_{14}=**10** X_{22}=**10**

X_{23}= **15** X_{31}= **5**

Sehingga tabel secara keseluruhan diperoleh sebagai berikut:

	T_1	T_2	T_3	T_4	a_1
A_1	10	5 0	20	10 11	15
A_2	12	10 7	15 9	20	25
A_3	5 0	14	16	18	5
b_1	5	15	15	10	

Jadi, biaya totalnya :

$Z = 5(0)+10(11)+10(7)+15(9)+5(0)$

$= 315$

3. Contoh dengan metode biaya terkecil (Yuwono, 2007, hal 40 no 1)

Tabel Cost

Ke / Dari	Gudang A	Gudang B	Gudang C	Kapasitas pabrik
Pabrik 1	**Rp 3.200**	Rp 3.300	Rp 3.400	106
Pabrik 2	Rp 3.600	Rp 4.200	Rp 3.800	132
Pabrik 3	Rp 3.400	Rp 3.700	Rp 4.000	127
Kebutuhan gudang	122	152	91	365

Biaya terendah terletak pada variabel X_{11} yaitu C_{11} = 3.200. Alokasi terbesar yang mungkin pada X_{11} = 106 sehingga kapasitas pabrik pada baris 1 telah terpenuhi sedangkan kebutuhan gudang pada kolom 1 tersisa 16. Karena baris 1 telah terpenuhi maka baris ini kemudian diberi tanda.

Biaya

Ke / Dari	Gudang A	Gudang B	Gudang C	Kapasitas pabrik	Sisa
Pabrik 1	Rp 3.200 106	Rp 3.300	Rp3.400	106	0
Pabrik 2	Rp 3.600	Rp 4.200	Rp 3.800	132	132
Pabrik 3	Rp 3.400	Rp 3.700	Rp 4.000	127	127
Kebutuhan gudang	122	152	91	365	
Sisa	16	152	91		

terendah selanjutnya terletak pada x_{31} yaitu $c_{31} = 3400$. Alokasi terbesar yang

mungkin pada $x_{31} = 16$ sehingga kapasitas pabrik di baris 3 tersisa 111 dan kebutuhan gudang di kolom 1 telah terpenuhi , oleh karena itu beri tanda kolom 1.

Biaya terendah selanjutnya terletak pada x_{32} yaitu $c_{32} = 3700$. Alokasi terbesar yang

Ke / Dari	Gudang A	Gudang B	Gudang C	Kapasitas pabrik	Sisa
Pabrik 1	Rp 3.200 106	Rp 3.300	Rp 3.400	106	0
Pabrik 2	Rp 3.600	Rp 4.200	Rp 3.800	132	132
Pabrik 3	Rp 3.400 16	Rp 3.700	Rp 4.000	127	111
Kebutuhan gudang	122	152	91	365	
Sisa	0	152	91		

Ke / Dari	Gudang A	Gudang B	Gudang C	Kapasitas pabrik	Sisa
Pabrik 1	Rp 3.200 106	Rp 3.300	Rp 3.400	106	0
Pabrik 2	Rp 3.600	Rp 4.200	Rp 3.800	132	132
Pabrik 3	Rp 3.400 16	Rp 3.700 111	Rp 4.000	127	0
Kebutuhan gudang	122	152	91	365	
Sisa	0	41	91		

mungkin pada $x_{32} = 111$ sehingga kapasitas pabrik di baris 3 telah terpenuhi dan kebutuhan gudang di kolom 2 tersisa 41, karena baris 3 telah terpenuhi maka baris ini kemudian di beri tanda.

Biaya terendah selanjutnya terletak pada x_{23} yaitu $c_{23} = 3800$. Alokasi terbesar yang

Ke / Dari	Gudang A	Gudang B	Gudang C	Kapasitas pabrik	Sisa
Pabrik 1	Rp 3.200 106	Rp 3.300	Rp 3.400	106	0
Pabrik 2	Rp 3.600	Rp 4.200	Rp 3.800 91	132	41
Pabrik 3	Rp 3.400 16	Rp 3.700 111	Rp 4.000	127	0
Kebutuhan gudang	122	152	91	365	
Sisa	0	41	0		

mungkin pada $x_{23} = 91$, sehingga kapasitas pabrik pada baris 2 tersisa 41 dan kebutuhan gudang pada kolom 3 telah terpenuhi. Oleh karena itu beri tanda kolom 3.Jelas untuk variabel selanjunya terletah pada x_{22} yaitu c_{22} = Rp 3.700. tentunya alokasi terbesarnya adalah sehingga baris 2 untuk kapasitas pabrik dan kolom 2 untuk kebutuhab pabrik telah terpenuhi.

Dengan demikian biaya total untuk pemecahan masalah ini adalah :

Ke / Dari	Gudang A	Gudang B	Gudang C	Kapasitas pabrik	Sisa
Pabrik 1	Rp 3.200 106	Rp 3.300	Rp 3.400	106	0
Pabrik 2	Rp 3.200	Rp 4.200 41	Rp 3.800 91	132	0
Pabrik 3	Rp 3.400 16	Rp 3.700 111	Rp 4.000	127	0
Kebutuhan gudang	122	152	91	365	
Sisa	0	0	0		

Z = $x_{11}\, c_{11} + x_{31}\, c_{31} + x_{32}\, c_{32} + x_{23}\, c_{23} + x_{22}\, c_{22}$

Z = (106 x Rp 3.200) + (16 x Rp 3.400) + (111 x Rp 3.700) + (91 x Rp 3.800) x Rp 3.700)

= Rp 1.001.800

4. Contoh Metode Batu loncatan (Sumber : Robert J. Thierauf, An Intoductory Approach to Operation Research. New York.Halaman 244 no 1)

The Aome Corporation mempunyai tiga pabrik yaitu di Orlando (O), Riedville (R) dan New Orleand (N). Barang produksi akan didistribusikan ke 4 gudang yaitu di Houston (H), Seattle (S), San Fransisco (F) dan Denver (D). Kapasitas produksi pabrik O, R dan N masing-masing adalah **2000,1700 dan 1400 unit** . Sedangkan keperluan di H, S, D, dan F masing-masing adalah **1000**, **800**, **2100** dan **1200** unit. Ongkos angkut per unit produk adalah (dalam mata uang dollar)

Cost Table

Tujuan / Pabrik	Houston (H)	Seattle (S)	San Fransisco(F)	Denver (D)	S
Orlando (O)	4	8	7	5	2000
New Orleans(N)	3	8	8	4	1700
Reidsville(R)	4	9	7	4	1400
D	1000	800	2100	1200	5100

Langkah Penyeleasaian

Pemecahan fisibel yang pertama dengan menggunakan Metode Sudut Barat Laut, hasilnya adalah sebagai berikut :

Tabel 1

Tujuan / Pabrik	Houston (H)	Seattle (S)	San Fransisco(F)	Denver (D)	S
Orlando (O)	(1000)	(800)	(200)		2000
New Orleans(N)			(1700)		1700
Reidsville(R)			(200)	(1200)	1400
D	1000	800	2100	1200	5100

Permintaan di H dipenuhi oleh O sebanyak 1000 unit di x_{11} . Jadi masih terdapat 1000 unit yang bersisa di O. Permintaan sebesar 800 unit di S dipenuhi dari sisa di O.(x_{12}=800) Sisanya lagi diisi di x_{13}=200. Sehingga masih terdapat 1900 unit yang dibutuhkan di F. Selanjutnya suplai di N dihabiskan di x_{23}=1700. Permintaan di F dipenuhi diambil 200 dari suplai R. x_{33}=200. Permintaan F terpenuhi. Terakhir adalah memenuhi permintaan di D sebesar 1200 unit di x_{34}.(x_{34}=1200 unit)

Jadi, biaya transportasi yang dikeluarkan adalah

$Z = c_{11}x_{11} + c_{12}x_{12} + c_{13}x_{13} + c_{23}x_{23}+ c_{33}x_{33} + c_{34}x_{34}$

= 4 (1000) + 8(800) + 7(200) + 8(1700) +7(200 + 4(1200)

= 4000 + 6400 + 1400 +13600 + 1400 + 4800. (dalam dollar)

= 31.600

Kemudian, kita hitung semua nilai Zij-Cij sebagai uji optimalitas untuk *cell* atau kotak bukan basis.

$$z_{14}-c_{14}=c_{34}-c_{33}+c_{13}-c_{14}=4-7+7-5=-1$$
$$z_{21}-c_{21}=c_{23}-c_{13}+c_{11}-c_{21}=8-7+4-3=2$$
$$z_{22}-c_{22}=c_{23}-c_{13}+c_{12}-c_{22}=8-7+8-8=1$$
$$z_{24}-c_{24}=c_{34}-c_{33}+c_{23}-c_{24}=4-7+8-4=1$$
$$z_{31}-c_{31}=c_{33}-c_{13}+c_{11}-c_{31}=7-7+4-4=0$$
$$z_{32}-c_{32}=c_{33}-c_{13}+c_{12}-c_{32}=7-7+8-9=-1$$

Ternyata tidak semua nilai zij - $cij \leq 0$, masih ada yang positif dan lebih besar dari nol, jadi pemecahan belum optimum. Nilai z_1 belum minimum masih bisa diperkecil lagi. Maka, kita harus memilih salah satu kotak yang harus masuk basis. Kita pilih nilai positif terbesar, yaitu kotak (2,1) yang harus masuk basis. Perhatikan bahwa jalur $z_{21}=c_{23}-c_{13}+c_{11}-c_{21}$ dan variabel dari c_{ij} positif yang minimum ditetapkan sebagai kotak yang harus keluar basis. Sehingga Min ($x_{.23}$, x_{11}) = min (1700,1000) = 1000, kotak (1,1) yang memberikan nilai minimum dan harus keluar basis kemudian nilainya diisi pada kotak yang masuk menjadi basis sehingga kotak (2,1)=1000

Variabel yang terlibat dalam jalur z_{21} yaitu

x_{11} = keluar basis x_{13} = variabel lama + nilai minimum = 200+1000=1200

x_{21} = 1000 x_{23} = variabel lama-nilai minimum = 1700-1000=700

Nilai-nilainya dimasukkan ke dalam Tabel 2

Jadi, biaya yang dikeluarkan yaitu

$Z_2=c_{12}x_{12} + c_{13}x_{13} + c_{21}x_{21} + c_{23}x_{23} +c_{33}x_{33}+c_{34}x_{34}$

=(800)8+(1200)7+(1000)3+(700)8+(200)7+(1200)4=29600

Tabel 2

Tujuan / Pabrik	Houston (H)	Seattle (S)	San Fransisco(F)	Denver (D)	S
Orlando (O)		(800)	(1200)		2000
New Orleans(N)	(1000)		(700)		1700
Reidsville(R)			(200)	(1200)	1400
D	1000	800	2100	1200	5100

Kemudian, kita hitung semua nilai Zij-Cij sebagai uji optimalitas untuk *cell* atau kotak bukan basis.

$$z_{11}-c_{11}=c_{21}-c_{23}+c_{13}-c_{11}=3-8+7-4=-2$$
$$z_{14}-c_{14}=c_{34}-c_{33}+c_{13}-c_{14}=4-7+7-5=-1$$
$$z_{22}-c_{22}=c_{23}-c_{13}+c_{12}-c_{22}=8-7+8-8=1$$
$$z_{24}-c_{24}=c_{34}-c_{33}+c_{23}-c_{24}=4-7+8-4=1$$
$$z_{31}-c_{31}=c_{33}-c_{23}+c_{31}-c_{14}=7-8+3-4=-2$$
$$z_{32}-c_{32}=c_{33}-c_{13}+c_{12}-c_{32}=7-7+8-9=-1$$

Ternyata tidak semua nilai *zij* - *cij* ≤ 0, masih ada yang positif dan lebih besar dari nol, yaitu z_{22}-c_{22} dan z_{24}-c_{24}, jadi pemecahan belum optimum. Nilai *z* belum minimum masih bisa diperkecil lagi. Maka, kita harus memilih salah satu kotak yang harus masuk basis. Kita pilih nilai positif terbesar. Karena ada dua z_{ij}-c_{ij} yang bernilai positif z_{22}-c_{22}dan z_{24}-c_{24}, maka kita memilih salah satunya saja dan yang kita pilih yaitu kotak (2,4) yang harus masuk basis. Perhatikan bahwa jalur $z_{24}=c_{34}-c_{33}+c_{23}-c_{24}$ dan variabel dari c_{ij} positif yang minimum ditetapkan sebagai kotak yang harus keluar basis. Sehingga Min (x_{34}, x_{23}) = min (1200,700) = 700, kotak (2,3) yang memberikan nilai minimum dan harus keluar basis kemudian nilainya diisi pada kotak yang masuk menjadi basis sehingga kotak (2,4)=700

Variabel yang terlibat dalam jalur z_{24} yaitu

x_{23}=keluar basis x_{33}=variabel lama + nilai minimum=200+700=900

x_{24}=700 x_{34}=variabel lama-nilai minimum=1200-700=500

Nilai-nilainya dimasukkan ke dalam Tabel 3

Tabel 3

Tujuan / Pabrik	Houston (H)	Seattle (S)	San Fransisco(F)	Denver (D)	S
Orlando (O)		(800)	(1200)		2000
New Orleans(N)	(1000)			(700)	1700
Reidsville(R)			(900)	(500)	1400
D	1000	800	2100	1200	5100

Kemudian, kita hitung semua nilai Zij-Cij sebagai uji optimalitas untuk *cell* atau kotak bukan basis.

$$\begin{aligned}
z_{11}-c_{11} &= c_{13}-c_{33}+c_{34}-c_{24}+c_{21}-c_{11} = 7-7+4-4+3-4=-1\\
z_{14}-c_{14} &= c_{34}-c_{33}+c_{13}-c_{14} = 4-7+7-5=-1\\
z_{22}-c_{22} &= c_{12}-c_{13}+c_{33}-c_{34}+c_{24}-c_{22} = 8-7+7-4+4-8=0\\
z_{31}-c_{31} &= c_{34}-c_{24}+c_{21}-c_{31} = 4-4+3-4=-1\\
z_{23}-c_{23} &= c_{33}-c_{34}+c_{24}-c_{23} = 7-4+4-8=-1\\
z_{32}-c_{32} &= c_{33}-c_{13}+c_{12}-c_{32} = 7-7+8-9=-1
\end{aligned}$$

Ternyata dari hasil uji z_{ij}-c_{ij} semuanya lebih kecil atau sama dengan nol. Sehingga dapat dikatakan bahwa biaya yang dikeluarkan telah minimum.

Jadi, biaya yang dikeluarkan adalah

$$\begin{aligned}
z &= 8(800)+7(1200)+3(1000)+4(700)+7(900)+4(500)=\\
&= 6400+8400+3000+2800+6300+2000=28900
\end{aligned}$$

Bila dibandingkan dengan metode yang digunakan sebelumnya (metode barat laut) maka dapat dilihat bahwa biaya yang dikeluarkan metode stepping stone jauh lebih minimum.

5. Contoh metode Danzing

Diketahui tiga asal persediaan yaitu 150, 210 dan 90. Serta tiga tujuan permintaan yang dimulai dengan 120, 170 dan 160. Tentukan penyelesaian basis minimum jika diketahui matriks ongkosnya adalah suatu matriks demand dan supply.

Tabel 1. Matriks Ongkos mula-mula (C_{ij})

50	100	100
200	300	200
100	200	300

Tabel 2. Matriks Demand dan Supply Mula-mula

*	*	*	150
*	*	*	210
*	*	*	90
120	170	160	

Penyelesaian:

Langkah 1 :

Pertama Tabel 2 di atas diselesaikan dengan menggunakan metode sudut barat laut, maka diperoleh hasil sebagai berikut:

Tabel 3. Matriks Ongkos, Demand dan Supply yang Baru

120	30	0	150
0	140	70	210
0	0	90	90
120	170	160	

$Z_1 = 120(50) + 30(100) + 140(300) + 70(200) + 90(300)$

$= 6000+3000 + 42000 + 14000 + 27000$

$= \$ 92000$

Dari hasil penyelesaian di atas ada lima nilai X_{ij} yang telah diperoleh yaitu X_{11}, X_{12}, X_{22},X_{23}, dan X_{33} dan memenuhi syarat m + n – 1=3+3-1=5 (degenerate)

Langkah 2:

Selanjutnya digunakan Tabel 1 untuk mencari matriks ongkos yang baru ($\overline{C_{ij}}$).

Star awal dimisalkan $U_1=C_{11}=50$

$C_{11}=U_1+V_1=50$ $\quad$ $C_{23}=U_2+V_3=200$

$C_{12}=U_1+V_2=100$ $\quad$ $C_{33}=U_3+V_3=300$

$C_{22}=U_2+V_2=300$

$C_{11}=U_1+V_1 \rightarrow 50=50+V_1 \rightarrow V_1= 0$

$C_{12}=U_1+V_2 \rightarrow 100=50 +V_2 \rightarrow V_2= 50$

$C_{22}=U_2+V_2 \rightarrow 300 =U_2+50 \rightarrow U_2= 250$

$C_{23}=U_2+V_3 \rightarrow 200 =250+V_3 \rightarrow V_3= -50$

$C_{33}=U_3+V_3 \rightarrow 300 =U_3-50 \rightarrow U_3= 350$

Maka diperoleh U_1=50, V_1=0, U_2=250, V_2=50, U_3=-50, dan V_3=350

Langkah 3:

Mencari variable X yang tidak berada dalam basis (variable non basis $\overline{C_{ij}}$) yaitu

X_{13}, X_{21}, X_{31}, dan X_{32} dengan menggunakan hubungan $\overline{C_{ij}} = U_i + V_j$ dengan syarat $\left(\overline{C_{ij}} - C_{ij} \leq 0\right)$.

Tabel 4. Matriks Ongkos yang Baru

	V_1=0	V_2=50	V_3=-50
U_1=50	$\boxed{50}$ 50	$\boxed{100}$ 100	$\boxed{100}$ 0
U_2=250	$\boxed{200}$ 250	$\boxed{300}$ 300	$\boxed{200}$ 200
U_3=350	$\boxed{100}$ 350	$\boxed{200}$ 400	$\boxed{300}$ 300

Maka diperoleh :

$\overline{C_{11}} - C_{11} =$ 50- 50 = 0
$\overline{C_{12}} - C_{12} =$ 100-100 = 0
$\overline{C_{13}} - C_{13} =$ 0-100 = -100
$\overline{C_{21}} - C_{21} =$ 250-200 = 50
$\overline{C_{22}} - C_{22} =$ 300-300 = 0
$\overline{C_{23}} - C_{23} =$ 200-200 = 0
$\overline{C_{31}} - C_{31} =$ 350-100 = 250
$\overline{C_{32}} - C_{32} =$ 400-200 = 200
$\overline{C_{33}} - C_{33} =$ 300-300 = 0

Langkah 4:

Karena nilai $\overline{C_{ij}} - C_{ij}$ masih ada yang lebih besar nol, maka proses ini harus dilanjutkan karena belum ditemukan penyelesaian feasible minimumnya. Untuk sel 31, diperoleh nilai terbesar, maka X_{31} harus diintrodusir ke dalam penyelesaian oleh bilangan $Ø_1 \geq 0$ yang sangat kecil.

Sehingga diperoleh:

Tebel 5. Matriks Demand dan supply yang baru (kedua)

120-$Ø_1$	30+$Ø_1$		150
	140- $Ø_1$	70+ $Ø_1$	210
$Ø_1$		90- $Ø_1$	90
120	170	160	

Untuk menjaga fleksibilitas X_{ij} maka harga $Ø_1$ terletak di $0 \leq Ø_1 \leq 250$. Jika mengambil harga $Ø_1$=250, maka tabel 5 menjadi :

Tabel 6. Matriks demand dan supply yang baru (kedua)

-130	280		150
	-110	320	210
250		-160	90
120	170	160	

Langkah 5:

Karena variabel basisnya 6 tidak memenuhi syarat m+n-1, maka satu sel harus dibuang. Sel yang dibuang adalah sel yang tidak memenuhi nilai $\mathbf{a_i}$ maupun $\mathbf{b_j}$ yang terdapat pada kolom atau baris tersebut.

-130	280		150
	-110	320	210
250		-160	90
120	170	160	

Karena hanya ada satu nilai X_{ij} yang tidak merubah nilai jika dibuang yaitu X_{22} sehingga diperoleh:

$Z_2 = Z_1 –$ maks $\left(\overline{C_{ij}} - C_{ij} > 0\right)$.Ø1

= 92000- 250(250)

= $29500

Dari penyelesaian di atas maka diperoleh nilai X_{ij} lima buah, yakni:

X_{11}, X_{12}, X_{23}, X_{31}, dan X_{33} yang telah memenuhi syarat m + n – 1=3+3-1=5 (degenerate).

Langkah 6:

Selanjutnya karena matriks ongkos yang baru (tabel 4) belum lebih besar sama dengan nol maka proses dilanjutkan kembali seperti di atas, yaitu mencari matriks ongkos yang berikutnya.

Untuk start awal dimisalkan $U_1 = C_{11} = 50$

$C_{11}=U_1+V_1=50$ $\quad$ $C_{23}=U_2+V_3=200$

$C_{12}=U_1+V_2=100$ $\quad$ $C_{33}=U_3+V_3=300$

$C_{31}=U_3+V_1=100$

$C_{11}=U_1+V_1 \rightarrow 50=50+V_1 \rightarrow V_1= 0$

$C_{12}=U_1+V_2 \rightarrow 100=50 +V_2 \rightarrow V_2= 50$

$C_{23}=U_2+V_3 \rightarrow 200 =U_2+200 \rightarrow U_2= 0$

$C_{31}=U_3+V_2 \rightarrow 100 =U_2+50 \rightarrow U_3= 100$

$C_{33}=U_3+V_3 \rightarrow 300 =100+V_3 \rightarrow V_3= 200$

Maka diperoleh $U_1=50$, $V_1=0$, $U_2=0$, $V_2=50$, $U_3=100$, dan $V_3=200$

Langkah 7:

Nilai $\mathbf{U_i}$ dan $\mathbf{V_j}$ dapat dinyatakan kembali ke tabel 7 berikut dan mencari variable X yang tidak berada dalam basis (variable non basis $\overline{C_{ij}}$) yaitu X_{13}, X_{21}, X_{22}, dan X_{32} dengan menggunakan hubungan $\overline{C_{ij}} = U_i + V_j$ dengan syarat $\left(\overline{C_{ij}} - C_{ij} \leq 0\right)$.

Untuk variable non-basis $\overline{C_{ij}}$

Tabel 7. Matriks ongkos yang baru (lihat nilai diluar kotak)

	$V_1=0$	$V_2=50$	$V_3=200$
$U_1=50$	$\boxed{50}$ 50	$\boxed{100}$ 100	$\boxed{100}$ 250
$U_2=0$	$\boxed{200}$ 0	$\boxed{300}$ 50	$\boxed{200}$ 200
$U_3=100$	$\boxed{100}$ 100	$\boxed{200}$ 150	$\boxed{300}$ 300

Maka diperoleh :

$\overline{C_{11}} - C_{11} = 50 - 50 = 0$

$\overline{C_{12}} - C_{12} = 100 - 100 = 0$

$\overline{C_{13}} - C_{13} = 250 - 100 = 150$

$\overline{C_{21}} - C_{21} = 0 - 200 = -200$

$\overline{C_{22}} - C_{22} = 50 - 300 = -250$

$\overline{C_{23}} - C_{23} = 200 - 200 = 0$

$\overline{C_{31}} - C_{31} = 100 - 100 = 0$

$\overline{C_{32}} - C_{32} = 150 - 200 = -50$

$\overline{C_{33}} - C_{33} = 300 - 300 = 0$

Langkah 8:

Karena nilai $\overline{C_{ij}} - C_{ij}$ masih ada yang lebih besar dari nol, maka proses ini harus dilanjutkan. Untuk sel 13, diperoleh nilai terbesar, maka X_{13} harus diintrodusir ke dalam penyelesaian oleh bilangan $Ø_2 \geq 0$. Selanjutnya Tabel 6 berubah dengan penambahan nilai $Ø_2$ seperti pada Tabel 8 berikut.

Tabel 8. Matriks demand dan Supply yang Baru (ketiga)

$-20-Ø_2$	170	$Ø_2$	150
		210	210
$140+Ø_2$		$-50-Ø_2$	90
120	170	160	

Untuk menjaga fleksibilitas harga $Ø_2$ terletak di $0 \leq Ø_2 \leq$. Jika mengambil $Ø_2 = 150$

Maka Tabelnya menjadi :

Tabel 9. Matriks Demand dan Supply (ketiga)

-170	170	150	150
		210	210
290		-200	90
120	170	160	

Langkah 9:

Oleh karena variabel basisnya 6 tidak memenuhi syarat m + n – 1, maka satu sel harus dibuang. Sel yang dibuang adalah sel yang tidak merubah nilai $\mathbf{a_i}$ maupun $\mathbf{b_j}$ yang terdapat pada kolom atau baris tersebut.

-170	170	150	150
		210	210
290		-200	90
120	170	160	

Karena hanya ada satu nilai X_{ij} yang tidak merubah nilai jika dibuang yaitu X_{33}, maka X_{33} harus dibuang. Sehingga diperoleh :

$Z_3 = Z_2 - \text{maks}(\overline{C_{ij}} - C_{ij} > 0)\O_2$

$= 29500 - 150(150)$

$= \$ 7000$

Dari penyelesaian di atas maka diperoleh nilai X_{ij} yaitu lima buah, yakni:

$X_{11}, X_{12}, X_{13}, X_{23}, X_{31}$

Langkah 10:

Selanjutnya kembali dicari nilai matriks ongkos yang baru (ketiga) dengan mencari nilai U_i dan V_j

Untuk start awal dimisalkan $U_1 = C_{11} = 50$

$C_{11} = U_1 + V_1 = 50$ $C_{12} = U_1 + V_2 = 100$ $C_{13} = U_1 + V_3 = 100$

$C_{23} = U_2 + V_3 = 200$ $C_{31} = U_3 + V_1 = 100$

$C_{11}=U_1+V_1 \rightarrow 50=50+V_1 \rightarrow V_1= 0$

$C_{12}=U_1+V_2 \rightarrow 100=50 +V_2 \rightarrow V_2= 50$

$C_{13}=U_1+V_3 \rightarrow 100 =50+V_3 \rightarrow V_3= 50$

$C_{23}=U_2+V_3 \rightarrow 200 =U_2+50 \rightarrow U_2= 150$

$C_{31}=U_3+V_1 \rightarrow 100 =U_3+0 \rightarrow U_3= 100$

Maka diperoleh U_1=50, V_1=0, U_2=150, V_2=50, U_3=100, dan V_3=50

Tabel 10. Matriks Ongkos yang Baru (lihat nilai di luar kotak)

	V_1=0	V_2=50	V_3=50
U_1=50	$\boxed{50}$ 50	$\boxed{100}$ 100	$\boxed{100}$ 100
U_2=150	$\boxed{200}$ 150	$\boxed{300}$ 200	$\boxed{200}$ 200
U_3=100	$\boxed{100}$ 100	$\boxed{200}$ 150	$\boxed{300}$ 150

Maka diperoleh:

$$\overline{C_{11}} - C_{11} = 50 - 50 = 0$$

$$\overline{C_{12}} - C_{12} = 100 - 100 = 0$$

$$\overline{C_{13}} - C_{13} = 100 - 100 = 0$$

$$\overline{C_{21}} - C_{21} = 150 - 200 = -50$$

$$\overline{C_{22}} - C_{22} = 200 - 300 = -100$$

$$\overline{C_{23}} - C_{23} = 200 - 200 = 0$$

$$\overline{C_{31}} - C_{31} = 100 - 100 = 0$$

$$\overline{C_{32}} - C_{32} = 150 - 200 = -50$$

$$\overline{C_{33}} - C_{33} = 150 - 300 = -150$$

Karena sudah terpenuhi syarat $\overline{C_{ij}} - C_{ij} \leq 0$ maka telah tercapai penyelesaian fleksibel minimum yaitu Z_3 = 7000 dengan

X_{11} = -20

X_{12} = 170

X_{13} = 150

X_{23} = 210

X_{31} = 290