r-hosseini.ir

بسمه تعالی

نام جزوه: انتقال حرارت 1

نام استاد: دکتر بصیرت

دانشگاه: صنعتی امیرکبیر

r-hosseini.ir

انتقال حرارت - گرما:

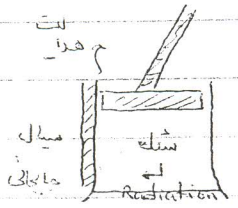
در سه شاخه بررسی می‌شود:

۱- هدایت Conduction

۲- جابجایی - همرفت Convection

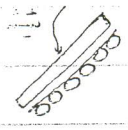
۳- تشعشع Radiation

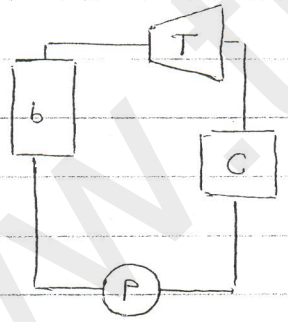
هدایت درس کاملاً ریاضی است. در مورد جابجایی نیاز به دانستن سیالات و آن هم مکانیک حالت دینامیک سیالات هستیم.



در مورد تشعشع نیز نیاز به دانستن فیزیک موج هستیم.

در مورد موتورهای احتراق داخلی و حتی کلکتورهای خورشیدی هر سه شاخه بررسی می‌شود.





در انتقال حرارت ما به rate توجه داریم.

در سیستم انتقال حرارت به سیستم میکروسکوپیک توجه داریم.

$$E_{in} - E_{out} + E_g = E_{st}$$

انتقال حرارت از معادلات نیوتن — ذخیره — تولید

یا Flux law استفاده می‌کند

$$\dot{E}_{in} - \dot{E}_{out} + \dot{E}_{gen} = \dot{E}_{ST}$$

$$\underbrace{\tau}_{F} = -\mu \frac{du}{dy}$$

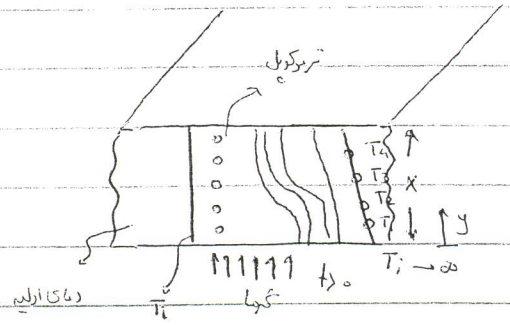
انتقال حرارت مسائل را معمولاً به صورت خطی نگاه می‌کند ولی این دید باعث برخورد کردن خطا می‌شود.

r-hosseini.ir

Bi < 0.1 با آزمایش هایی که انجام داد نشان داد.

شخصی دیگری با استفاده از این نتایج و با استفاده

از قانون نیوتن یا Flux law



$$\tau = -\mu \frac{du}{dy} = \frac{F}{A}$$

استفاده نمود که نیوتن این رابطه را از قانون هوک گرفته است.

فوریه استفاده نمود و شار حرارتی را تعریف نمود که برابر است با:

قانون فوریه

$$q'' = -k \frac{dT}{dy} = \frac{q}{A}$$

شار حرارتی — ضریب هدایت حرارتی — سطح مقطع — مقدار حرارت

قانون فیکس

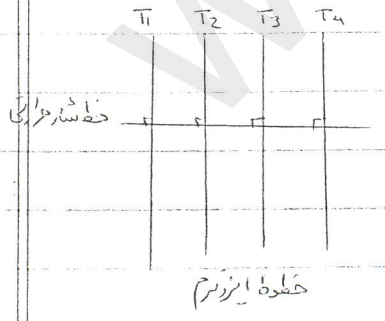
Fick

$$J = -D \frac{dc}{dy}$$

شار انتقال جرم — Diffusion — مقدار غلظت

قانون فیک در مورد مثلاً خشک کردن انگور کاربرد دارد که با اعمال حرارت باعث انتقال رطوبت و در نهایت انتقال

جرم است.



در رابطه فوریه هم است که خطوط شار بر خطوط ایزوترم عمود باشد.

r-hosseini.ir

انتقال حرارت ← هدایت ← از مولکولی به مولکول دیگر ماده

$$q_x = -KA\frac{dT}{dx} = KA\frac{\Delta T}{\Delta x}$$

dT: °C ، dx: m ، A: m^2 ، q_x: $J/s = W$

یا $q'' = K\frac{\Delta T}{\Delta x}$ → Flux

$K = \frac{W}{m.°C}$ ضریب هدایتی

خاصیت فیزیکی است و از جداول آخر کتاب بدست می‌آید.

موادی که دارای خاصیت رسانایی خوب دارند دارای هدایت حرارتی هستند

$K_{Cu} = 386$ $W/m.°C$

$K_{Al} = 210$

$K_{water} = 0.668$

$K_{\text{بیان}} = 1.0$

$K_{\text{هوا}} = 0.02$

$K_{\text{عایق پشم شیشه}} = 0.06$

انتقال حرارت در جهت های مختلف صورت می‌گیرد

ولی برداری نیست چون انرژی است با هم جمع پذیر است.

$$\dot{E}_{in} - \dot{E}_{out} + \dot{E}_{\text{تولیدی}} = \dot{E}_{\text{ذخیره}}$$

$$q = \frac{\Delta T}{\frac{\Delta x}{KA}} = \frac{\Delta T}{R}$$

مقاومت حرارتی

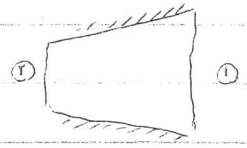
T_2 — R — T_1

$$I = \frac{\Delta E}{R}$$

بدن انسان را با خاصیت فیزیکی آب در نظر می‌گیریم - پرتقال، سیب زمینی و گوشت نیز به همین صورت است.

انتقال حرارت تا زمانی که تولیدی و ذخیره نباشد خطی است.

q در دو سمت حایلی است چون بقای انرژی موجود است. در تا در هم عایق است.



r-hosseini.ir

۲) انتقال حرارت ← جابجائی ـ همرفتی

T_∞ سیال

$$q = hA(T_w - T_\infty)$$

دیوار T_w

$$= -hA(T_\infty - T_w)$$

$T_w \neq T_\infty$

ضریب جابجائی یا همرفتی $h = \frac{W}{m^2 \cdot C}$

Convection

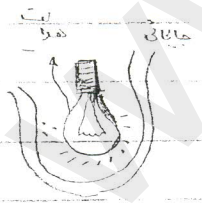
h می‌تواند از عدد صفر آغاز شود و تا حدود 100000 ادامه یابد. این اندازه به هندسه، سرعت، شکل مسئله و خیلی عوامل دیگر بستگی دارد.

جایی که سیال با دیوار توام است جابجائی از نوع اجباری است در جایی که سیال با دیوار همراه نیست جابجائی طبیعی است

$$q = \frac{\Delta T}{\frac{1}{hA}} = \frac{\Delta T}{R_h}$$

مقاومت جابجائی

بین دیوار و سیال انتقال حرارت از نوع جابجائی است.



لامپ مثلاً هر دو نوع جابجائی را دارد.

۳) انتقال حرارت ← تشعشعی Radiation

این نوع انتقال به صورت موجی است. امواج نورانی هم جزئی از این نوع انتقال حرارت هستند.

r-hosseini.ir

ضریب صدور یا محسن حرارتی — ضریب دنری بولتزمن — ضریب ثابت استفان $5.67\times10^{-8}\ W/m^2K^4$

$$q_{1-2} = F\,F_{\text{تشعشعی}}\,\sigma A(T_1^4 - T_2^4)$$

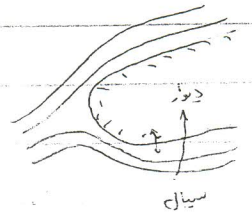
$\rightarrow K$

برای یک جسم کوچک در مقابل یک جسم بزرگ (مثل پرتقال در یک مزرعه بزرگ) دما بر حسب کلوین

$$q_{1-2} = \varepsilon_1 A_1 \sigma (T_1^4 - T_2^4)$$ است.

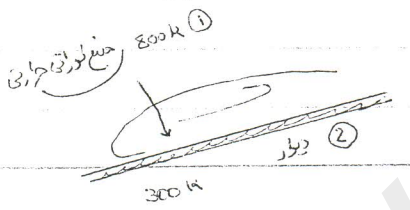
$\rightarrow$ فاکتور تشعشعی

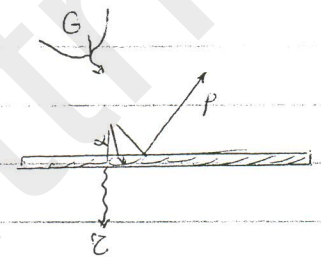
هر جسم کوچکی که توسط جسم بزرگی احاطه شده باشد



$hA\Delta T$ سرد کردن یا گرم کردن نیوتنی

$\rightarrow f(Re, L, D, \Delta T, \ldots)$





در مورد انرژی تشعشعی مقداری انرژی جذب مقدار منعکس و مقداری رد می‌شود در کل حالت زیر برقرار

$\alpha + \rho + \tau = 1.0$ است.

$\varepsilon = 0.7$ چوب یا رخت

$\varepsilon_{Al} = 0.04 - 0.1$

$\varepsilon_{\text{رنگ}} = 0.9$

تا زمانی که در سن تشعشع باشد ε را به ما می‌دهند

$\varepsilon = 1$ جسم سیاه

اگر جسم بخواهد انرژی از دست بدهد به صورت $\varepsilon\sigma T^4$ و اگر بخواهد جذب کند به صورت $\alpha\sigma T^4$ است

r-hosseini.ir

درصورتی که جسم کوچک باشد داریم :

$$q_{1-2} = \varepsilon \sigma A_1 (T_1^4 - T_2^4)$$

$\varepsilon \simeq \alpha$

جسم سیاه $\varepsilon = 1.0$

$$q_{1-2} = \sigma A (T_1 - T_2)\overbrace{(T_1 + T_2)}^{2T_1}\overbrace{(T_1^2 + T_2^2)}^{2T_1^2} \simeq 4\sigma T_1^3 A \Delta T$$

$$q = 4\sigma T_1^3 A \Delta T \Rightarrow q = \frac{\Delta T}{\frac{1}{4\sigma T_1^3 A} = \left(\frac{1}{h_r}\right)}$$ ضریب تشعشعی

در نهایت میل به همدما شدن را زندگی اختلاف را در نظر می‌گیریم . این ساده سازی برای این است که

معادله‌ی ما خطی شود. این رابطه تنها در مورد جسم کوچک صادق است.

σ ضریب ثابت استفان بولتزمن $5.67 \times 10^{-8}\ W/m^2 K^4$

$$q_{1-2} = F_\varepsilon F_G \sigma (T_1^4 - T_2^4)$$

F_ε: ضریب خنده‌ی

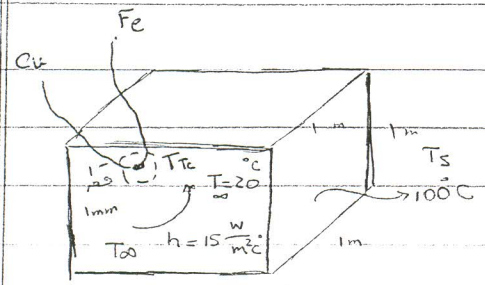
F_G: ضریب صدور یا پخش حرارتی

مثال: یک دماسنج ترموکوپل سیاه به قطر ۱ میلی متر برای اندازه گیری دمای کوره سیاهی به ابعاد $1 \times 1 \times 1\ m$

به کار رفته است. اگر سطح کوره در درجه حرارت $100^\circ C$ و هوای مجاور ترموکوپل $20^\circ C$ با ضریب جابجایی

$15\ \frac{W}{m^2 {}^\circ C}$ باشد ترموکوپل چه درجه حرارتی را نشان می‌دهد.

r-hosseini.ir



انتظار می‌رود که دمای ترموکوپل 20° باشد ولی این چنین نیست چون ترموکوپل دمای 100° را مشاهده می‌کند

steady state پایدار

$$\dot{E}_{in} - \dot{E}_{out} + \dot{E}_{\text{تولید}} = \dot{E}_{\text{ذخیره}}$$

ترموکوپل

$$\dot{E}_{in} = (5.667\times10^{-8})A\left((100+273)^4 - T_{Tc}^4\right)$$

$$\dot{E}_{out} = hA\left(T_{cA} - (20+273)\right)$$

سطح ترموکوپل

ترموکوپل دمایی بالاتر از 20 را نشان می‌دهد پس مقدار انرژی به دلیل همرفت بین سیال و ترموکوپل است و مقدار دریافتی همان تشعشع حاصل از دیواره است.

$$q_{1-2} = \varepsilon\sigma A\left(T_1^4 - T_2^4\right)$$

$$\dot{E}_{in} = \dot{E}_{out} \Longrightarrow 5.667\times10^{-8}\left[(100+273)^4 - T_{Tc}^4\right] =$$

$$15\left(T_{Tc} - (20+273)\right) \Longrightarrow T_{Tc} = 51\,^\circ C$$

با استفاده از فرض قبل

$$q = 4\sigma T_1^3 A\Delta T \Longrightarrow 4(5.667\times10^{-8})(373)^3(373 - T_{Tc}) = 15(T_{Tc} - 293)$$

$$T_{Tc} = 55\,^\circ C$$

مثال: یک قالب یخ $1\times1\times1\ m$ را در نظر می‌گیریم $T_F = 0^\circ C$: (بدون تغییر ابعاد)

۱- یخ در معرض محیط با $h = 15\ W/m^2\cdot C$ با $T_\infty = 10^\circ C$ است و بدون تشعشع زمان آب شدن چقدر است.

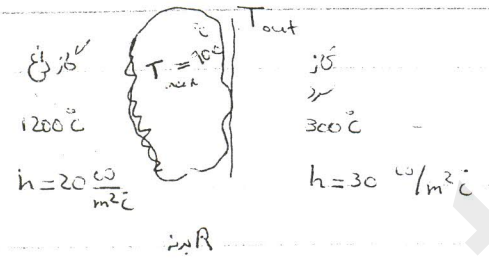
۲- با فرض دستگاه الف و $T_{sky} = -10^\circ C$ به همراه تشعشع زمان آب شدن را بیابید

r-hosseini.ir

۳- کوئی به ضخامت 1mm به دور یخ پیچیده شده است که در این حالت $k_{\text{کوئی}} = 0.06$ و دمای کوئی $10^\circ C$ است زمان آب شدن را بیابید.

مساله را با 5 وجه در نظر بگیرید.

مثال: برای طراحی یک مبدل ماکزیمم درجه حرارت پیش‌بینی شده $900^\circ C$ است اگر در یک طرف مبدل گاز داغ $1200^\circ C$ با $h = 20 \frac{W}{m^2 C}$ و طرف دیگر گاز $300^\circ C$ با $h = 30 \frac{W}{m^2 C}$ باشد ماکزیمم ضریب مقاومتی بدنه را بیابید (R)



$A = 1 \ m^2$

$\dot{E}_{in} = q_{in} = 20(1200 - 900) =$

$\dot{E}_{out} = q_{out} = 30(T_{out} - 300) =$ $\Rightarrow T_{out} = 500^\circ C$

حالت پایا است لذا دری با خروجی یکسان است

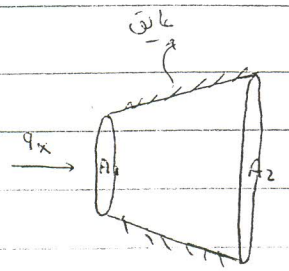
$$q = \frac{\Delta T}{R} \Rightarrow 20(1200 - 900) = \frac{(900 - T_{out})}{R} \Rightarrow R = 0.067$$

انرژی در هر مقطعی ثابت است

$$q = \frac{\Delta T}{R} \qquad R_{\text{هدایتی صفحه}} = \frac{L}{kA} \qquad R_{\text{جابجایی}} = \frac{1}{hA}$$

$$R_{\text{تشعشعی}} = \frac{1}{h_r A}$$

r-hosseini.ir



$A = aD^{1/2}$

ثابت ← ثابت ←

$$q = -kA\frac{dT}{dx}$$

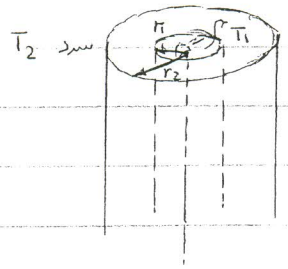
$$\int_{A_1}^{A_2} q\frac{dx}{A} = -k\int_{T_1}^{T_2} dT$$

در این جا تغییرات سطح جسم را داریم ـ می توانیم تغییرات

ضریب حرارتی برحسب دما را هم داریم.

$$k = f(T) = aT^2 + b \Longrightarrow \int_{x_1}^{x_2} q\frac{dx}{A} = -\int_{T_1}^{T_2} k\,dT$$

در حالت های متعارفی فقط مسائل را می توانیم یک بعدی حل کنیم.



می خواهیم فقط دما را در راستای r بررسی کنیم

$$\int_{r_1}^{r_2} q\frac{dx}{2\pi rL} = -k\int_{T_1}^{T_2} dT$$

سطحی که شار بر آن عمود است که همان سطح جانبی است را در نظر می گیریم.

$$\Longrightarrow \frac{q}{2\pi L}\int_{r_1}^{r_2}\frac{dr}{r} = -k\int_{T_1}^{T_2} dT \Longrightarrow \frac{q\,\ln\frac{r_2}{r_1}}{2\pi L} = k\Delta T$$

$$\Longrightarrow q = \frac{\Delta T}{\frac{\ln r_2/r_1}{2\pi kL}}$$

استوانه

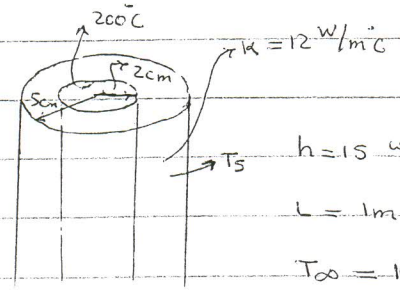
$$R_{\text{هدایتی}} = \frac{\ln r_2/r_1}{2\pi kL}$$

$$R_{\text{هدایتی}} = \frac{1/r_1 - 1/r_2}{4\pi k}$$

کره

r-hosseini.ir

مثال: لوله‌ای را در نظر می‌گیریم:

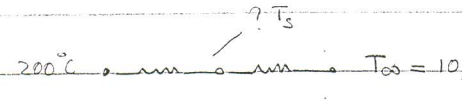


$k = 12\ W/m^\circ C$

$h = 15\ W/m^2\,^\circ C$

$L = 1m$

$T_\infty = 10^\circ C$



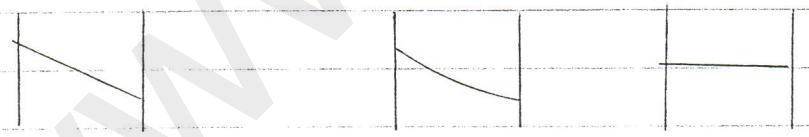
$$q_1 = \frac{\Delta T}{\frac{\ln \frac{r_2}{r_1}}{2\pi k L}} = \frac{200 - T_s}{\frac{\ln 2.5}{2\pi \times 12 \times 1}}$$

$$q_2 = \frac{\Delta T}{\frac{1}{hA}} = \frac{T_s - 10}{\frac{1}{15 \times 2\pi \times 5 \times 10^{-2} \times 1}}$$

$$q_1 = q_2 \Rightarrow \frac{200 - T_s}{\frac{\ln 5/2}{2\pi \times 12}} = \frac{T_s - 10}{\frac{1}{15(2\pi)(0.05)}} \Rightarrow T_s = 189.7\ ^\circ C$$

$$q = 846.8\ W$$

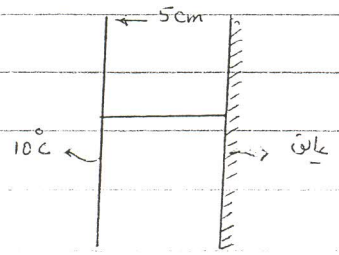
پروفیل دما در صفحه به صورت خطی و در استوانه و کره یک حالت سهمی گونه دارد.



صفحه — استوانه و کره — در این حالت اختلاف دما نداریم

$$q = \frac{\Delta T}{\sum R} \Rightarrow q = \frac{200 - 10}{\frac{1}{15 \times 2\pi \times \frac{5}{100}} + \frac{\ln 5/2}{2\pi \times 12 \times 1}} = 846.8\ W$$

r-hosseini.ir

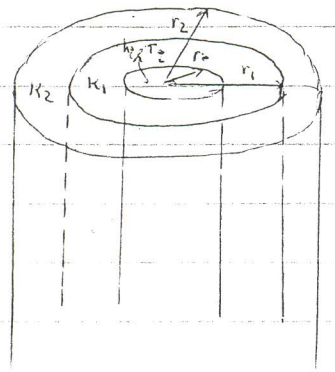


برای عایق $\frac{dT}{dx}$ یا $\frac{dT}{dr}$ صفر است در مسیر دیوار

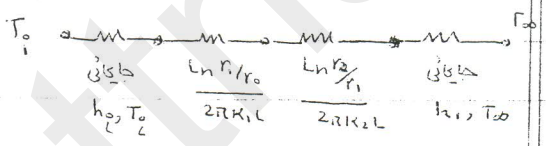
نیز پروفیل دما خطی است

در حالت پایا چون در حالت عایق گرمای خروجی نداریم دمای

همه‌ی نقاط به $10°C$ می‌رسد و پروفیل دما خطی می‌شود.



h_i, T_∞ $\qquad q = \frac{\Delta T}{\sum R}$



$$q = \frac{T_o - T_\infty}{\frac{1}{h_o A_o} + \frac{\ln r_1/r_o}{2\pi K_1 L} + \frac{\ln r_2/r_1}{2\pi K_2 L} + \frac{1}{h_\infty A_2}}$$

$$q = U_i A_i (T_o - T_\infty) \qquad U_i = \frac{1}{\frac{1}{h_i} + \frac{r_o \ln r_1/r_o}{K_1} + \frac{r_o \ln r_2/r_1}{K_2} + \frac{r_o}{r_2} \cdot \frac{1}{h_o}}$$

به U_i ضریب کلی حرارتی در داخل آن $\frac{W}{m^2 °C}$ گویند. ضریب حرارتی کلی از داخل

$$q = U_o A_o (T_o - T_\infty) \qquad U_o = \frac{1}{\frac{r_2}{r_o}\frac{1}{h_i} + \frac{r_2 \ln r_1/r_o}{K_1} + \frac{r_2 \ln r_2/r_1}{K_2} + \frac{1}{h_o}}$$

ضریب حرارتی کلی از خارج

این رابطه‌ها فقط برای استوانه‌ها و لوله‌ها است.

r-hosseini.ir

برای کره هم همین ضرایب حرارتی را داریم

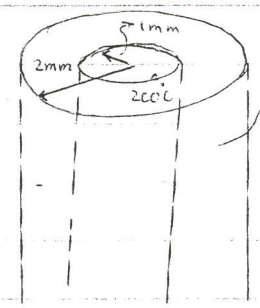
T_∞ در سیال همان دمای متوسط در سیال است حالت سرعت در محاسبه عدد رینولدز

مسأله: عایق چقدر باشد

$$\frac{dq}{dr} = 0 \Rightarrow r_{cr} = \frac{k_2}{h_o}$$

$k_2 \rightarrow W/m\,^\circ C$

$h_o \rightarrow W/m^2\,^\circ C$



$k = 12\ W/m\,^\circ C$

$L = 1m$

$h = 15\ W/m^2\,^\circ C$

$T_\infty = 10\,^\circ C$

ضخامت اضافه شده

Δr	q	T_2
0.0		
0.01		
⋮		

پشم شیشه $k = 0.06$

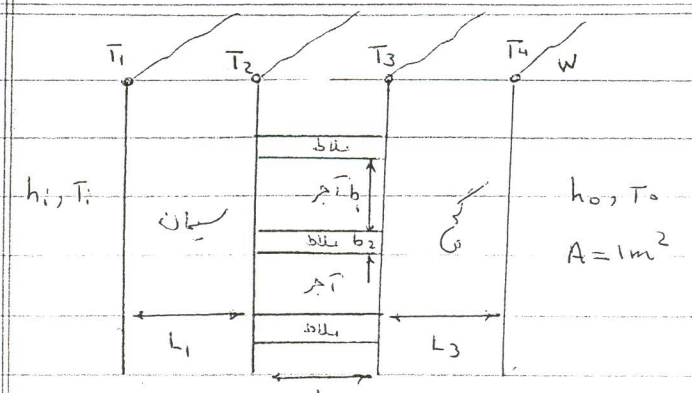
$$T_1 \bullet\!\!-\!\!\frac{\ln r_2/r_1}{2\pi k_1 L}\!\!-\!\!\bullet\!\!-\!\!\frac{\ln r_3/r_2}{2\pi k_2 L}\!\!-\!\!\bullet\!\!-\!\!\frac{1}{hA}\!\!-\!\!\bullet\ T_\infty$$

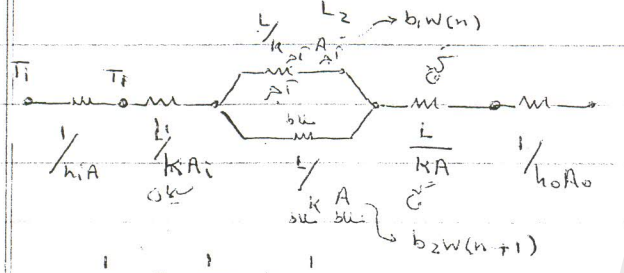
$$q = hA(T_s - T_\infty) \Rightarrow T_s = \frac{q}{hA} + T_\infty$$

شعاع بحرانی برای کره به صورت زیر است:

$$\frac{dq}{dr} = 0 \Rightarrow r_{cr} = \frac{2k}{h}$$

r-hosseini.ir



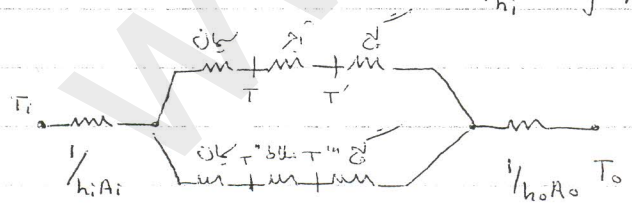


$$\frac{1}{R_{\text{معادل}}} = \frac{1}{R_{\text{آجر}}} + \frac{1}{R_{\text{ملاط}}}$$

$$b_1 W(n) + b_2 W(n+1) = A$$

$$q = \frac{\Delta T}{\frac{1}{h_i A} + \sum_j \frac{L}{kA} + R_{\text{معادل}} + R_{\text{تماس}} + \frac{1}{h_o A}}$$

$$q = UA\Delta T \Longrightarrow U = \frac{1}{1/h_i + \sum_j \frac{L_j}{k} + RA_{\text{معادل}} + RA_{\text{تماس}} + \frac{1}{h_o}}$$

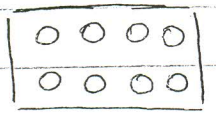


بین ملاط و آجر چون K تقریباً یکسانی دارد از مدار بالا می‌توان استفاده کرد ولی اگر به جای آجر یک میله‌ی فلزی

می‌گذاشتیم باید مدار پایین را در نظر می‌گرفتیم. هر کدام که مقاومت کمتری دارد حرارت را بیشتر انتقال می‌دهد

r-hosseini.ir

آجرهای سوراخ دار با محاسبه مساحت های سوراخ و

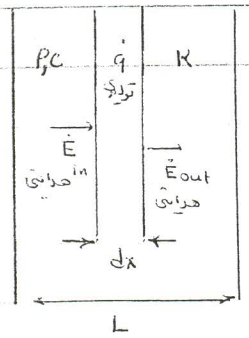


در نظر گرفتن مقاومت های موازی قابل حل است.

حالت دوم مقاومتی که رسم شد جریان شار ثابت و اولی جریان دما ثابت است.

معادله ی کلی هدایت:

فعلاً معادلات را یک بعدی



در نظر می گیریم.

$$\dot{E}_{in\ \text{هدایتی}} = -KA\frac{dT}{dx}$$

$$\dot{E}_{out\ \text{هدایتی}} = -KA\frac{dT}{dx} + dx\,\frac{d\left(-KA\,dT/dx\right)}{dx}$$

بسط تیلور $f(x+h) = f(x) + h\frac{df}{dx} + \cdots$

$$\dot{E}_{\text{تولیدی}} = \underbrace{\dot{q}}_{w/m^3}\,\overbrace{A\cdot dx}^{m^3}$$

$$\dot{E}_{\text{ذخیره}} = \frac{mC_p\Delta T}{\Delta t} = \overbrace{\rho A\cdot dx\cdot C}^{\text{جامد}}\cdot\frac{dT}{dt}$$

r-hosseini.ir

$$\dot{E}_{in} - \dot{E}_{out} + \dot{E}_{\text{تولید}} = \dot{E}_{ST} \qquad \dot{q} = q''' \ W/m^3$$ منبع تولید انرژی

$$\frac{\partial (KA\, dT/dx)}{\partial x} + \dot{q}A = \rho A C \frac{\partial T}{\partial t}$$

* اگر A ثابت و همچنین K نیز ثابت نسبت به دما باشد:

$$+KA\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + q'''A = \rho A C \frac{\partial T}{\partial t} \Rightarrow \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{q'''}{K} = \frac{\rho C}{K}\frac{\partial T}{\partial t}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{q'''}{K} = \frac{1}{\alpha}\frac{\partial T}{\partial t} \quad 1\text{-}D$$

$\alpha = \frac{K}{\rho C}$ ضریب نفوذ حرارتی یا ضریب پخش حرارتی

$\alpha = m^2/s \qquad \nu = \frac{\mu}{\rho}$

حالت سه بعدی

$$\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}\right) + \frac{q'''}{K} = \frac{1}{\alpha}\frac{\partial T}{\partial t}$$

$$\Rightarrow \nabla^2 T + \frac{q'''}{K} = \frac{1}{\alpha}\frac{\partial T}{\partial t} \quad 3\text{-}D$$ معادله کلی انتقال حرارت

معادله‌ی

$$\frac{1}{r^n}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^n \frac{\partial T}{\partial r}\right) + \frac{q'''}{K} = \frac{1}{\alpha}\frac{\partial T}{\partial t}$$

$n=0$ صفحه slab $r \longrightarrow x$

$n=1$ استوانه $r \longrightarrow r$

$n=2$ کره

بیشتر معادلات را یک بعدی در نظر می‌گیرند چون در استوانه و کره معمولاً یک بعدی و انتقال حرارت در جهت r است. انتقال حرارت جسم متقارن نیست.

در حالت کامل حداقل به 7 شرط لازم داریم تا معادلات را حل نماییم.

5

r-hosseini.ir

- منبع تولید انرژی ندارد — معادله لاپلاس — $\nabla^2 T = 0$
- پایدار است
- پایدار — معادله پواسون — $\nabla^2 T + \frac{q'''}{k} = 0$
- گذرا — معادله فوریه — $\nabla^2 T + \frac{q'''}{k} = \frac{1}{\alpha}\frac{\partial T}{\partial t}$

((در مورد سیستم های یک بعدی اگر منبع تولید انرژی نداشته باشیم روش تحلیلی است.))

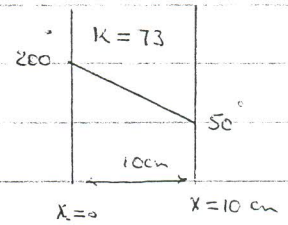
1-D , $q''' = 0$ (بدون تولید انرژی) S.S (پایدار)

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \cancel{\frac{q'''}{k}} = \frac{1}{\alpha}\cancel{\frac{\partial T}{\partial t}} \Rightarrow \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = 0 \Rightarrow T = ax + b$$

به عنوان مثال:

$x = 0 \quad T = 200$

$x = 10 \quad T = 50$



$\Rightarrow 200 = 0 + b \Rightarrow b = 200$

$50 = 10/100 \times a + 200 \Rightarrow a = -1500$

$$T = -1500x + 200$$

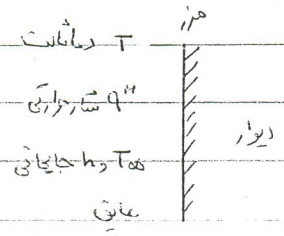
معادله شار $q'' = -k\frac{dT}{dx} = -73(1500) = -109500$

یا

$$q'' = -k\frac{\Delta T}{\Delta x} = -73\,\frac{200-50}{10/100} = -109500$$

یک مرز می تواند شرایط مختلف داشته باشد: ۱- دما ثابت ۲- شار حرارتی ۳- T_∞ و h جابجائی ۴- عایق $0 = \frac{dT}{dx} = \frac{dT}{dr}$

r-hosseini.ir



در مساله قبل اگر $h = 10\ W/m^2 C$ و $T_\infty = 50^\circ$ باشد

$$T = ax + b$$

$$x = 0 \quad T = 200 \Rightarrow b = 200$$

$$x = 10^{cm} \quad q'' = h(T_s - T_\infty)$$

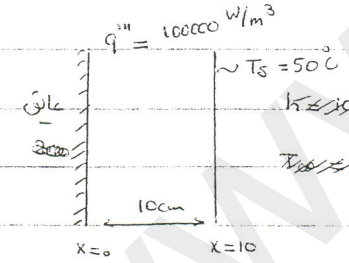
$$= 10\left(a\left(\frac{10}{100}\right) + 200 - 50\right)$$

از طرفی: $q'' = -k\dfrac{dT}{dx} = -ka$

$$-73a = a + 2000 - 500 \Rightarrow a = \frac{-1500}{74} = -20.3$$

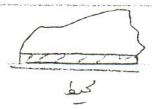
$$\Rightarrow T = -20.3x + 200 \xrightarrow{x=10^{cm}} T \simeq 198$$

دو طرف دیواره را به عنوان شرایط مرزی نمی‌توان شار حرارتی یا جابجایی باشد.



مثال: مساله پایدار دارای منبع تولید انرژی به صورت q''' است. نمودار تغییرات دما به چه صورت است:

مثل اتو



پایدار S.S

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{q'''}{k} = \frac{1}{\alpha}\cancelto{0}{\frac{\partial T}{\partial t}} \Rightarrow \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{q'''}{k} = 0 \Rightarrow \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{-q'''}{k}$$

$$\frac{dT}{dx} = \frac{-q'''}{k}x + C \Rightarrow T = \frac{-q'''x^2}{2k} + Cx + D$$

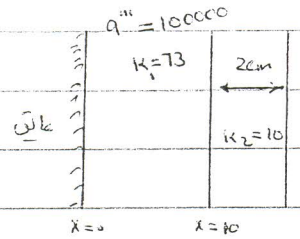
عایق $x = 0 \Rightarrow \dfrac{\partial T}{\partial x} = 0 \Rightarrow \dfrac{\partial T}{\partial x} = \dfrac{-q'''x}{k} + C \Rightarrow C = 0$

r-hosseini.ir

$$x = 10\ cm \Rightarrow 50 = \frac{-10^5 \times 10^2}{2 \times 100^2 \times 73} + D \Rightarrow D = 56.8$$

$$T = \frac{-10^5 x^2}{2 \times 73} + 56.8$$ معادله تغییرات دما داخل جسم

مثال: مساله پایدار است



$h = 10\ W/m^2 {}^\circ C$

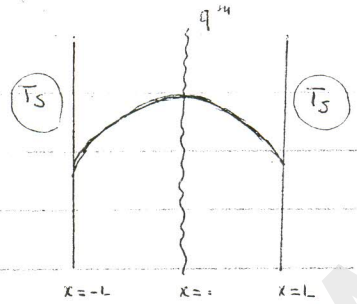
$T_\infty = -20\ {}^\circ C$

به شرط مرزی می‌خواهد

$$q''' L = q'' = h(T_{\infty} - T_{\infty})$$

$$q'' = \frac{\Delta T}{L/k_2} = 10^5 \times \frac{10}{100} = \frac{T_1 - T_s}{0.02/10}$$

در مرکز کره و یا محور استوانه $\frac{dT}{dr}$ تقریباً صفر است.



$$\frac{d^2T}{dx^2} + \frac{q'''}{k} = 0 \Rightarrow \frac{dT}{dx} = \frac{-q''' x}{k} + C$$

$$T = -\frac{q''' x^2}{2k} + Cx + D$$

$x = 0$ شرط تقارن $\frac{dT}{dx} = 0 \Rightarrow C = 0$

$x = L \quad T = T_s$

$$\Rightarrow T_s = -\frac{q''' L^2}{2k} + D \Rightarrow D = \frac{q''' L^2}{2k} + T_s$$

$$\Rightarrow T = \frac{-q''' x^2}{2k} + \frac{q''' L^2}{2k} + T_s$$

با ساده سازی داریم:

$$\underbrace{T - T_s}_{C^\circ} = \underbrace{\frac{q''' L^2}{2k}}_{C^\circ} \left(1 - \left(\frac{x}{L}\right)^2\right)$$

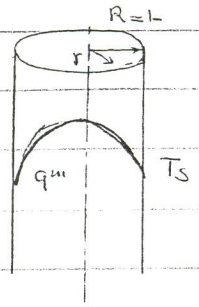
$$\Rightarrow \frac{T - T_s}{\left(\frac{q''' L^2}{2k}\right)} = 1 - \left(\frac{x}{L}\right)^2 \Longrightarrow \bar{\theta} = 1 - \bar{x}^2$$

فاصله بی بعد

دمای بی بعد

r-hosseini.ir

اختلاف دمای Max در صفحه است: $\frac{q'''L^2}{2k}$



$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial T}{\partial r}\right)+\frac{q'''}{k}=0$$

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dT}{dr}\right)=\frac{-q'''}{k}$$

$$r\frac{dT}{dr}=-\frac{q'''r^2}{2k}+C$$

$$\frac{dT}{dr}=\frac{-q'''r}{2k}+\frac{C}{r}$$

$$\Rightarrow T=\frac{-q'''r^2}{4k}+C\ln r+D$$

شرط مرزی $\frac{dT}{dr}=0 \Rightarrow C=0$

$$r=R \Rightarrow T=T_s$$

$$\frac{T-T_s}{\frac{q'''R^2}{4k}}=\left(1-\left(\frac{r}{R}\right)^2\right)$$

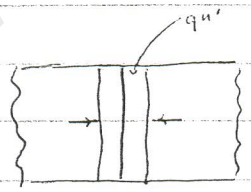
در استوانه $\frac{q'''R^2}{4k}$ اختلاف دمای مرکز است.

برای کره داریم:

$$\frac{T-T_s}{\frac{q'''R^2}{6k}}=\left(1-(r/R)^2\right)$$

کره > استوانه > صفحه

در قطعات جوشکاری نیز مثل مثال عملی کنیم:



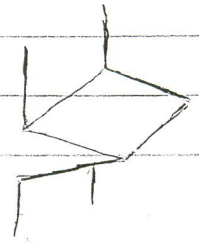
$q'''L = q''$

$$q'''=q_0(x-x_0)\ \text{یا}\ q_0\delta(x-x_0)$$

r-hosseini.ir

فین : دسته لیوان یا قاشق داخل لیوان به دلیل افزایش سطح انتقال حرارت را افزایش می دهد

همه ی این اشکال با اضافه کردن سطح باعث انتقال حرارت بیشتر



می شود.

مسائل فین ها یک بعدی باید در نظر گرفته شود

در حالت یک بعدی از روش های : ۱- مقاومت استفاده می شود.

۲- معادله کلی

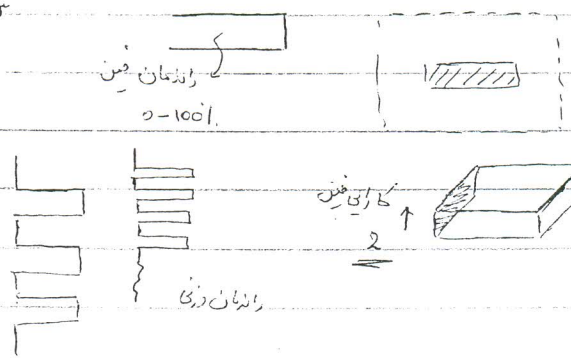
۳- فین

به صورت های استوانه ای و یا دسک هم وجود دارد.

در مورد استفاده فین ها به موارد زیر باید توجه شود : ۱- جنس

۲- ابعاد

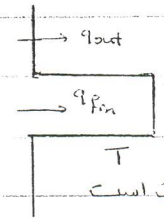
۳- تعداد



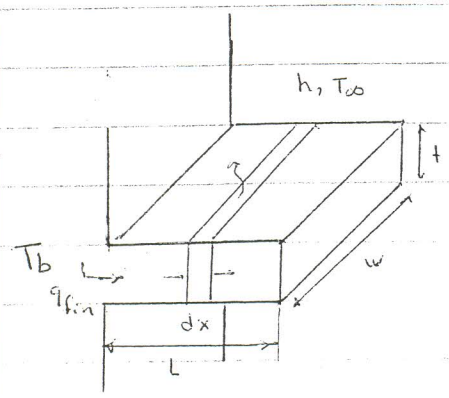
r-hosseini.ir

در صورتی که پروفیل دما در فین شناخته شود تمامی مسائل حل شده است. چون با تعادل انرژی می‌توان زمان را محاسبه نمود.

$$q_{fin} = -KA\frac{\partial T}{\partial x}$$



* از سطح مقطع صرف نظر می‌شود و خواص ثابت است



$$\dot{E}_{in} - \dot{E}_{out} + \dot{E}_{gen} = \dot{E}_{st}$$

$$\dot{E}_{in} = -KA\frac{dT}{dx}$$

$$\dot{E}_{out} = \underbrace{-KA\frac{dT}{dx} + \left(\frac{d(-KA\,dT/dx)}{dx}\right)dx}_{\text{هدایت}}$$

$$\underbrace{+hPdx(T-T_\infty)}_{\text{جابجایی خروجی}}$$

$P = 2w + 2t$ سطح جانبی

$$\frac{d^2T}{dx^2} - \frac{hP}{KA}(T-T_\infty) = 0 \qquad m^2 = \frac{hP}{KA} = \frac{W/m^2\,C\cdot m}{W/m\cdot C\,m^2} = m^{-2}$$

$$(mL)^2 = \frac{hPL^2}{KA} = \frac{\frac{L}{KA}}{\frac{1}{hPL}} = \frac{\text{ضریب مقاومت هدایت}}{\text{ضریب مقاومت جابجایی - همرفتی}}$$

به m^2 ، NTU یا مقدار شاخص انتقال حرارت Number of Transport Unit است.

$$\theta = T - T_\infty$$

$$\theta'' - m^2\theta = 0 \Rightarrow \frac{d^2\theta}{dx^2} - m^2\theta = 0$$

$$\theta = C_1e^{-mx} + C_2e^{mx}$$

21

r-hosseini.ir

$x = 0 \qquad \theta_b = T_b - T_\infty$

$x = L \qquad \theta_{\infty_L} =$ — برای طول محدود

$\frac{d\theta}{dx} = 0$

$L \to \infty \qquad \theta_\infty = 0$ — اگر میله آهنی باشد از این شرط می‌شود

h_L, T_{∞_L} ✓✓ — اگر میله به اندازه کافی بلند باشد (چوب، شیشه)

اگر طول را ندهند و یا طول بلند بگویند

$x = L \to \infty$ — * شرط عایق به این صورت است که دما در انتها نزدیک هم در انتها نزدیک به صفر است

$\theta = 0$ — * نسبتی به جنس خود دارد.

$x = 0 \qquad \theta_b = T_b - T_\infty$

$$\theta = C_1 e^{+mx} + C_2 e^{-mx} \Rightarrow x = 0 \quad C_1 + C_2 = \theta_b$$

$L \to \infty$ $\qquad x = L \to \infty \quad C_1 = 0$

$$✓✓ \Rightarrow \theta = \theta_b e^{-mx} \qquad m = \sqrt{\frac{hP}{KA}}$$

$$q_{fin} = -K \frac{d\theta}{dx} A = -KA\left(\theta_b(-m) e^{-mx}\right)\Big|_{x=0}$$

$$q_{fin} = KAm\theta_b$$ — مقدار انرژی که وارد فین می‌شود

$x = L \qquad \frac{d\theta}{dx} = 0$

$x = 0 \Rightarrow \theta_b = T_b - T_\infty$

$x = 0 \Rightarrow C_1 + C_2 = \theta_b$

$$x = L \Rightarrow \frac{d\theta}{dx} = mC_1 e^{mx} - mC_2 e^{-mx}\Big|_{x=L} \Rightarrow mC_1 e^{mL} - mC_2 e^{-mL} = 0$$

r-hosseini.ir

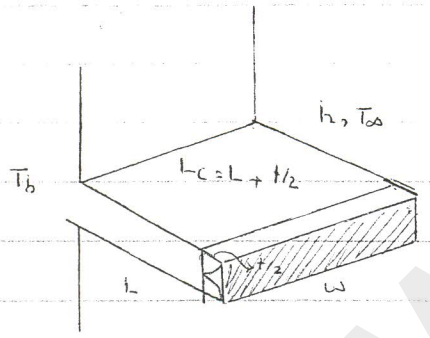
$$\theta = \theta_b \frac{\cosh m(L-x)}{\cosh mL} \Rightarrow q_{fin} = KAm\theta_b \tanh mL$$

$x = L$, $h_L, T_{\infty L}$ 3) جابجائی

$x = L$, $\theta = \theta_L$ 4)

با این چهار حالت بررسی می‌شود ولی دقیقاً حالت سوم است، ولی شرط عایق بهترین است.

در حالت عایق L را تصحیح کرده به جای آن $L_c = L + \frac{t}{2}$ قرار می‌دهند.

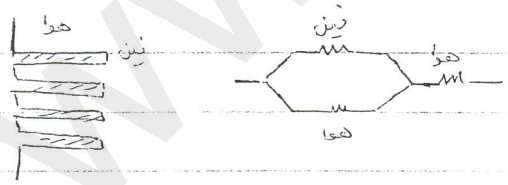


$$\theta = \theta_b \frac{\cosh m(L_c - x)}{\cosh mL_c}$$

سوزنی $= L_c = L + r/2$

حال می‌خواهیم مساله را به روش مقاومتی حل کنیم:

$$q_{fin} = \frac{\Delta T}{R} \Rightarrow R_{fin} = \frac{\theta_b}{KAm\theta_b \tanh mL_c} = \frac{1}{KAm \tanh mL_c}$$

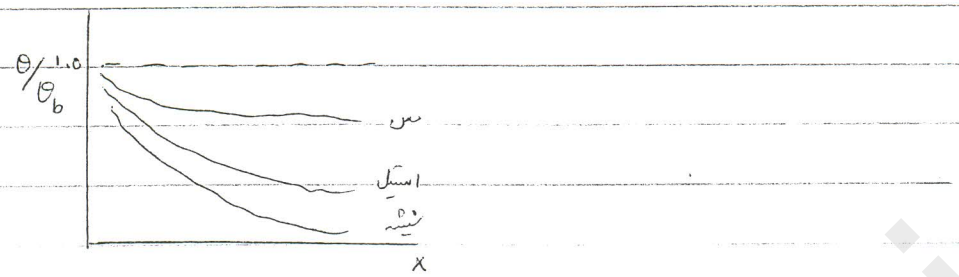


راندمان فین: به این صورت تعریف می‌شود:

$$\eta = \frac{q}{q_{max}} = \frac{KAm\theta_b}{hpL_c\theta_b} = \frac{1}{mL} = \sqrt{\frac{KA}{hpL^2}} \quad (1)$$

فین زمانی حالتی مقایسه می‌کند که تمامی سطوح جانبی با دمای base حالت جابجایی دارد

r-hosseini.ir



$$\eta = \frac{\tanh mL}{mL} \qquad m = \sqrt{\frac{hP}{KA}} \qquad (2)$$

راندمان فین

کارایی فین :

$$(1) \quad \varepsilon = \frac{q_{fin}}{q_{base}} = \frac{KAm\theta_b}{hA\theta_b} = \frac{Km}{h} = \frac{K}{h}\sqrt{\frac{hP}{KA}} = \sqrt{\frac{KP}{hA}}$$

$$(2) \quad \varepsilon = \sqrt{\frac{KP}{hA}} \cdot \tanh mL$$

می‌خواهیم ببینیم در صورت بزرگ یا بزرگ بودن فین چقدر کارا تشکیل می‌شود.

$$m = \sqrt{\frac{hP}{KA}} = \sqrt{\frac{h(2w+2t)}{Kwt}} = \sqrt{\frac{2h}{Kt}}$$

$$(1) \quad \eta = \sqrt{\frac{Kwt}{h(2w+2t)L^2}} = \sqrt{\frac{Kt}{2hL^2}} \qquad \varepsilon = \sqrt{\frac{2K}{ht}} \cdot \tanh mL \quad (2)$$

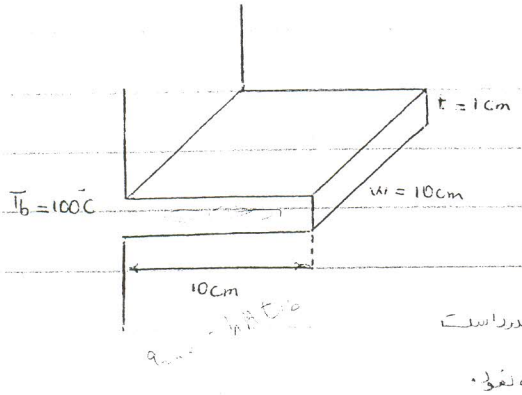
برای انتخاب فین مناسب با کارایی راندمان بالا کافی است K را بالا بگیریم ولی این حالت حدی دارد.

یکی دیگر از راه‌ها کم کردن h است که با تغییر سیال یا هندسه جسم تغییری دهند. روی ضخامت بحثی نمی‌توان کرد.

r-hosseini.ir

در نهایت K باید زیاد و h کاهش یابد t ، L و w با هم حجم را تشکیل می‌دهند برای طراحی مهم است.

راندمان وزنی:



جنس آلومینیم

$K = 210 \ W/m.°C$ $\quad A = 1m^2$

$h = 25 \ W/m^2.°C$ $\quad n = 20$ fins

$T_\infty = 20°C$

فین از نوع حالت کوتاه است چون طول کم داشت

لذا تنها از نیل در حالت عایق می‌توان استفاده نمود.

$$q_{fin} = KAm\,\theta_b \,\mathrm{Tanh}\, mL_c$$

$$\Rightarrow \eta = \frac{q_{fin}}{q_{max}} = \frac{\mathrm{Tanh}\, mL_c}{mL_c}$$

$$q_{max} = hPL_c\theta_b$$

$$m = \sqrt{\frac{hP}{KA}} = \sqrt{\frac{h(2w+2t)}{Kwt}} = \sqrt{\frac{2h}{Kt}} = \sqrt{\frac{2(25)}{210(1/100)}} = 4.88$$

$$L_c = L + t/2 = 10 + 1/2 = 10.5 \ cm$$

$$q_{fin} = (210)\left(\frac{10}{100}\right)\left(\frac{1}{100}\right)(4.88)(100-20)\,\mathrm{Tanh}\left[4.88 \times \frac{10.5}{100}\right] = 38.7 \ W$$

$$q_{max} = 25\left(2\left(\frac{10}{100}\right) + 2\left(\frac{1}{100}\right)\right)\left(\frac{10}{100}\right)(100-20) = 44 \ W$$

$$\eta = \frac{38.7}{44} = 88\%$$

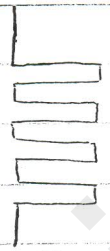
$$\varepsilon = \frac{q_{fin}}{q_{base}} = \frac{38.7}{hA\theta_b} = \frac{38.7}{(25)\left(\frac{10}{100}\right)\left(\frac{1}{100}\right)(80)} = 19.35 \gg 2.0$$

25

r-hosseini.ir

حال تعداد پین ها را به ۲۰ افزایش می دهیم درصد افزایش راندمان حرارت را بیابید:

$$q_{Total} = n\, q_{fins} + q_{unfins}$$



$$q_{\text{بدون پین}} = hA\theta_b = 25(1)(100-20) = 2000\ W = 2\ KW$$

$$q_{total} = 20\times 38.7 + hA_{unfin}\theta_b = 20\times(38.7) + 25\left[1 - \overset{20}{n}\left(\frac{10}{100}\right)\left(\frac{1}{100}\right)\right](100-20)$$

$$q_{total} = 2.7\ KW$$ با افزودن پین

$$\%\Delta q = \frac{2.7-2}{2} = 35\%$$

$$\eta = \frac{q_{total}}{q_{max}} = \frac{2.7\times 10^3}{44\times 20} = 3.07 \simeq 300\%$$ راندمان وزنی

fin efficiency η_f

overal surface efficiency $\Rightarrow \eta_o = \dfrac{q_T}{q_{max}} = \dfrac{q_T}{hA_t\theta_b}$

راندمان وزنی پین ها A_f

$$q_{max} = hA_t\theta_b$$

$$\eta_f = \frac{q_{fin}}{q_{max}}$$

$$A_t = A_f + A_b$$

$$q_t = \underbrace{hA_b\theta_b}_{q_{base}} + \underbrace{hA_f\eta_f\theta_b}_{q_{fin}}$$

$$= h\left[(A_t - A_f) + \eta_f A_f\right]\theta_b$$

$$= hA_t\left[1 - \frac{A_f}{A_t}(1-\eta_f)\right]\theta_b$$

$$\eta_o = \frac{hA_t\left[1 - \frac{A_f}{A_t}(1-\eta_f)\right]\theta_b}{hA_t\theta_b} = \left[1 - \frac{A_f}{A_t}(1-\eta_f)\right]$$

www.ttnar.ir

r-hosseini.ir

$$\eta_o = \left[1 - \frac{\overbrace{20\left(2\left(\frac{10}{100}\right) + 2\left(\frac{1}{100}\right)\right)\left(\frac{10}{100}\right) + 20\left(\frac{10}{100}\times\frac{1}{100}\right)}^{A_f}}{A_f + \left[1 - 20\left(\frac{10}{100}\right)\left(\frac{1}{100}\right)\right]}(1-0.88)\right]$$

$$= 0.96 = 96\%$$

1-D , Unsteady state

دمای بدن انسان 37° است و برای سوختن نوع اول تا دمای 60° می‌تواند تحمل کند

$$k\left[\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \cancel{\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}} + \cancel{\frac{\partial^2 T}{\partial z^2}}\right] + q''' = \rho c \frac{\partial T}{\partial t} \qquad \alpha = \frac{k}{\rho c} = \frac{W/m.^\circ C}{kg/m^3 \cdot J/kg\,^\circ C} = \frac{m^2}{s}$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \qquad T^* = \frac{T - T_\infty}{T_i - T_\infty}$$

یا

$$T^* = \frac{T}{T_i}$$

q''' : صرف نظر کردیم

T^* اولی بهتر است

$$x^* = \frac{x}{L} \qquad t^* = \frac{t}{t_o}$$

t_o : زمان اولیه است

$$\frac{\partial T^* T_i}{\partial t^* t_o} = \alpha \frac{\partial^2 (T^* T_i)}{\partial (x^* L)^2} \Rightarrow \frac{T_i}{t_o}\frac{\partial T^*}{\partial t^*} = \alpha \frac{T_i}{L^2}\frac{\partial^2 T^*}{\partial x^{*2}}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial T^*}{\partial t^*} = \underbrace{\frac{t_o \cdot \alpha}{L^2}}_{\text{عددی بعد}} \frac{\partial^2 T^*}{\partial x^{*2}}$$

تغییرات * حاین صفر و یک است

به $F_o = \frac{\alpha \cdot t_o}{L^2}$ عدد فوریه گویند که سرعت پخش حرارتی را

نشان می‌دهد. که این پخش در واحد طول است.

$$\frac{\alpha}{\frac{L}{t} \cdot L}$$

α → نفوذ حرارتی

L → طول

$\frac{L}{t}$ → سرعت

r-hosseini.ir

$$q_{cond} = q_{conv} \Rightarrow -kA\frac{dT}{dx} = hA(T-T_\infty) \qquad \frac{\Delta T}{\Delta x}$$

$$\Rightarrow \frac{\Delta T}{T-T_\infty} = \frac{hA\cdot\Delta x}{kA} \text{ یا } \frac{hL}{k} = \frac{\frac{L}{kA}}{\frac{1}{hA}} = Bi$$ عدد بی‌بعد

Biot num

حال به معادله‌ی اولیه برمی‌گردیم و داریم:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$$

روش‌های حل سیستم ناپایدار:

۱- جسم تک دما یا جسم نشده — lumped method

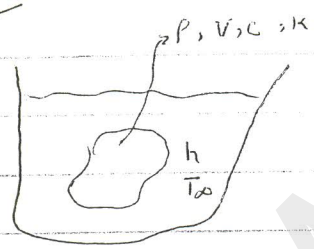
۲- روش نمودارهای هیسلر — Heissler chart

۳- روش جسم نیمه‌نامحدود

۴- روش عددی

جسم تک‌دما می‌تواند مسائل یک تا سه بعدی را بررسی کند.

مثال



T_i دمای اولیه

در جسم تک دما باید از قانون انرژی شروع و استفاده نمود.

T_∞, h

$T_\infty > T$

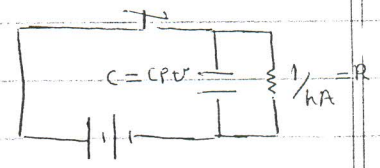
$$\dot{E}_{in} - \dot{E}_{out} + \dot{E}_{gn} = \dot{E}_{st} \Rightarrow hA(T_\infty - T) = \rho c V\frac{dT}{dt}$$

$$\Rightarrow hA(T-T_\infty) = -\rho c V\frac{dT}{dt} \Rightarrow \int_{T_i}^{T}\frac{dT}{T-T_\infty} = \int_0^t -\frac{hA}{\rho c V}\,dt$$

$$\Rightarrow \frac{T-T_\infty}{T_i-T_\infty} = e^{-\frac{hA}{\rho c V}t} = e^{(-Bi\,Fo)}$$

دمای بی‌بعد

$$= e^{-t/RC} = e^{-t/\tau}$$



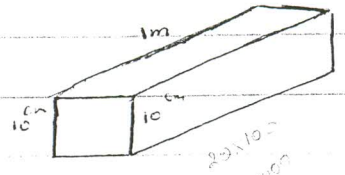
طول مشخصه $\frac{V}{A} = L$ $\qquad \frac{ht}{\rho c L} \times \frac{L}{L} \times \frac{k}{k}$

r-hosseini.ir

در مثال تک دما باید جسم از لحاظ نیروی کوچک باشد یعنی $Bi < 0.1$

اگر در مثال قبل فرض کنیم که $T_i = 200^\circ C$ و جسم مکعبی شکل با ضلع 120 cm و از جنس آلومینیوم با $K = 210 \ W/m^2 C$

باشد و در محیطی با $T_\infty = 20^\circ C$ و $h = 10 \ W/m^2 C$ قرار داشته باشد. بعد از ۲ دقیقه می‌خواهیم دما را بیابیم:



$h = 10 \ W/m^2 C$

$K = 75 \ \frac{W}{m C}$

$$Bi = \frac{hL}{K}$$

$$L = \frac{V}{A_s} = \frac{10 \times 10 \times 100}{2(10 \times 10) + 4(10 \times 100)} = 2.38 \ cm$$

$$Bi = \frac{10 \times 2.38 \times 10^{-2}}{75} = 3.17 \times 10^{-3} < 0.1$$

max طول مشخصه 2.5 است چون اگر طول را نیز تا بی‌نهایت ادامه پیدا کند طول مشخصه نهایتاً تا این مقدار پیش

می‌رود لذا فرض جسم تک دما برای ریل راه‌آهن مناسب است.

در مسأله گذرا باید اول Bi چک شود اگر کوچکتر از 0.1 نشد باید

$$Bi = \frac{hL}{K}$$

از روش‌های دیگر بدست آورد

$$L = \frac{V}{A_s} = \frac{4/3 \pi r^3}{4 \pi r^2} = \frac{r}{3}$$

$$Bi = \frac{10 \times 60 \times 10^{-2}}{3 \times 210} = 9.52 \times 10^{-2} < 0.1$$

$$\frac{T - T_\infty}{T_i - T_\infty} = e^{-Bi F_o} \Rightarrow \frac{T - 20}{200 - 20} = e^{-(9.52 \times 10^{-2})(0.253)} \Rightarrow T = 199.6^\circ C$$

$$F_o = \frac{\alpha t}{L^2} = \frac{8.418 \times 10^{-5} \times 2 \times 60}{\left(\frac{60}{100 \times 3}\right)^2} = 0.253$$

29.

r-hosseini.ir

حال در زمان صفر تا دو ثانیه می‌خواهیم بسنجیم چقدر انرژی از دست داده است:

$$q_{\text{کلی}} = hA(T-T_\infty) = hA(199.6-20)$$

$$Q = \int_0^t q\,dt = \int_0^t hA(T-T_\infty)\,dt = \int_0^t hA(T_i-T_\infty)\,e^{-\frac{hA_s}{\rho c V}}\,dt$$

$$\frac{T-T_\infty}{T_i-T_\infty} = e^{-\frac{hA_s}{\rho c V}t}$$

$$\Rightarrow Q = \frac{-hA_s}{\left(\frac{hA_s}{\rho c V}\right)}(T_i-T_\infty)\,e^{-\frac{hA_s}{\rho c V}t}\Big|_0^t = -\rho c V(T_i-T_\infty)\left(e^{-\frac{hA_s}{\rho c V}t}-1\right)$$

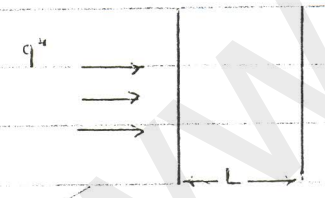
$$Q_{max} = mc\Delta T$$

if $t \longrightarrow \infty$

$$Q = \frac{4}{3}\pi(60\times10^{-2})^3 \times (2707)(896)\left(1-e^{-(9.52\times10^{-3})(0.253)}\right)(180)$$

$$= 877.8 \ [KJ]$$

الکتریکی



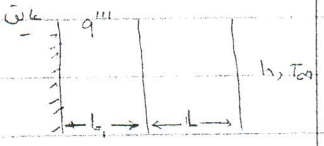
$A = 1m^2$

h, T_∞

$T_i = ?$

$t \quad T$

$Bi < 0.1$



جسم یکنواخت

$$\dot{E}_{in} - \dot{E}_{out} + \dot{E}_{gen} = \dot{E}_{ST}$$

$$q''A - hA(T-T_\infty) = \rho c V\frac{dT}{dt} \Rightarrow t=0 \quad T=T_i$$

$$\theta = T-T_\infty \Rightarrow \frac{d\theta}{dt} + m^2\theta = Q$$

r-hosseini.ir

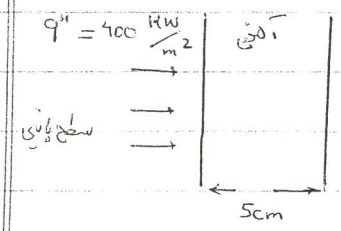
$$m = \frac{h}{\rho c L} \qquad Q = \frac{q}{\rho c L} \longrightarrow \theta = C e^{-mt} + \theta_p \quad \theta_p = \frac{Q}{m}$$

$$\Rightarrow \theta = \theta_i e^{-mt} + (1 - e^{-mt}) \frac{q''}{h}$$

$$\theta = \frac{q''}{h}$$ بعد از گذشت زمان زیاد سیستم پایدار می‌شود در نتیجه

$$q'' = h(T - T_\infty) \Rightarrow q = hA(T - T_\infty)$$

مثال: تیغه‌ی آهنی به ضخامت 5cm در دمای محیط بوده است ناگهان سطح پایین تیغه‌ی مذکور را در معرض شار حرارتی به میزان $q'' = 400 \frac{kW}{m^2}$ قرار می‌دهیم. اگر ضریب جابجایی سطح بالای تیغه $h = 50 \frac{W}{m^2 {}^\circ C}$ باشد زمان رسیدن تیغه به دمای $100^\circ C$ را معلوم نمائید.



$T_i = 20^\circ C$

$h = 50 \ W/m^2 {}^\circ C$

$T_\infty = 20^\circ C$

$Bi = \frac{hL}{k} = 0.034$

$m = \frac{h}{\rho c L} = 2.8 \times 10^{-4}$

$\rho = 7849 \quad c = 452 \quad k = 73$

$$\theta = (1 - e^{-mt}) \frac{q''}{h} \Rightarrow 100 - 20 = \frac{400 \times 10^3}{50} (1 - e^{-2.8 \times 10^{-4} t})$$

$$\Rightarrow t = 35.65 \ s$$

r-hosseini.ir

روش نمودارهای هیسلر — Heissler chart

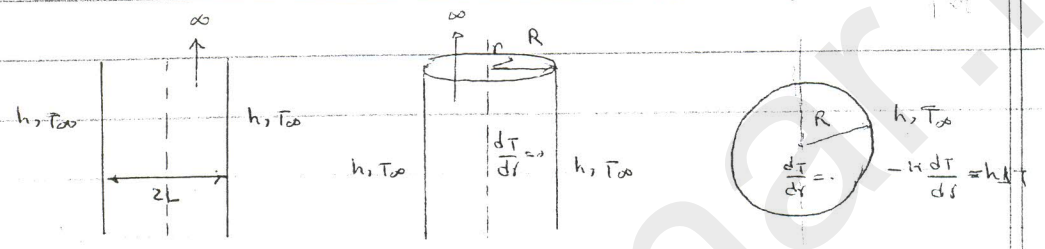
$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{\rho c}{k}\frac{\partial T}{\partial t}$$

$$\frac{1}{r^n}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^n \frac{\partial T}{\partial r}\right) = \frac{\rho c}{k}\frac{\partial T}{\partial t}$$

$r = 0$ صفحه

$r = 1$ استوانه

$r = 2$ کره



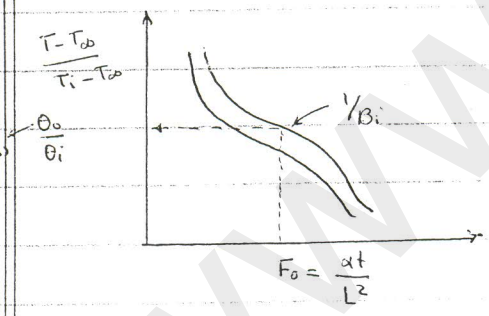
$x = -L, L$

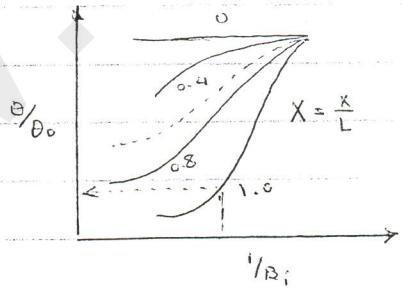
$x = 0 \rightarrow \frac{dT}{dx} = 0$ شرط عایق

$-k\frac{dT}{dx} = h\Delta T$

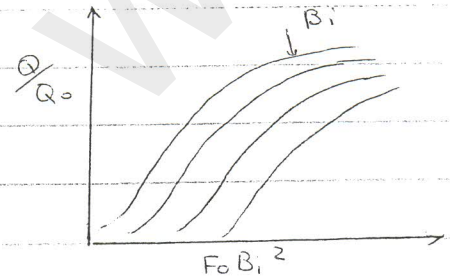
$F_0 = \frac{\alpha t}{L^2 \text{ یا } R^2}$

$$\boxed{B_i = \frac{hL}{k} \text{ یا } \frac{hR}{k}}$$





در این روش تا مرحله‌ای برای بدست آوردن حالت بی‌بعدی خارج شد.

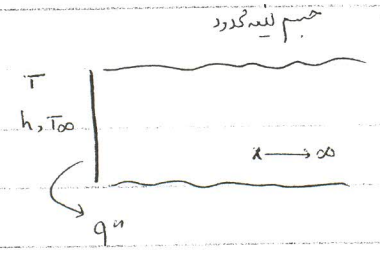


$Q_0 = \rho c V (T_i - T_\infty)$

r-hosseini.ir

با استفاده از این نمودارها در شرط قابل حل است. یکی شرط جابجایی است و دیگری دما ثابت

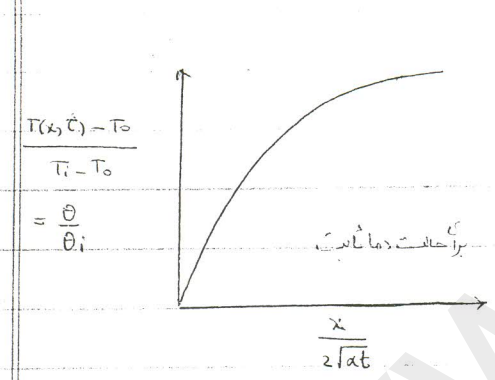
جسم نیمه کروه

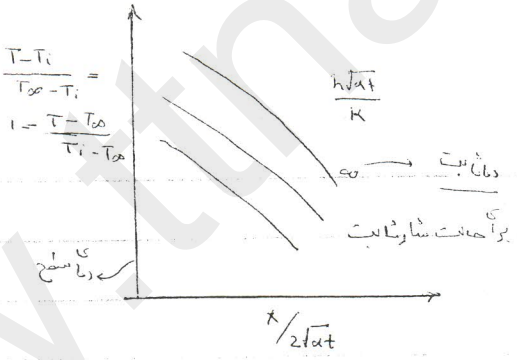


در حالتی که صفحه ی بزرگ بود مثل دیوار آتش یا

کره ی با شعاع بزرگی داشته باشد.

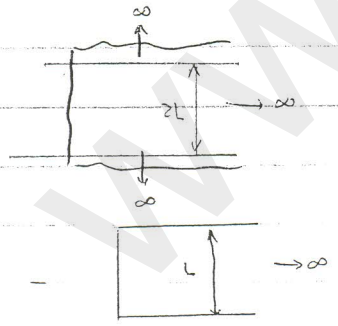
$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{\rho c}{k}\frac{\partial T}{\partial t} \longrightarrow$$ روش لاپلاس





برای حالت سه بعدی کافی است از صفحات کننده از هم استفاده نمود.

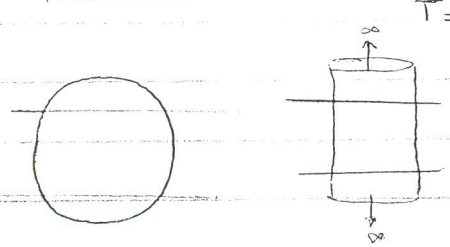
با یک صفحه قطع می دهیم



$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = \frac{1}{\alpha}\frac{\partial T}{\partial t}$$

مثلاً T تابع x و y است $T = X.Y$

برای کره داریم:



r-hosseini.ir

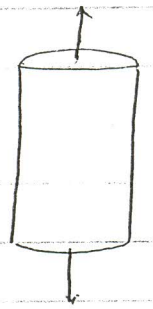
نیمه‌محدود یا یک طرف محدود

T ثابت $\quad \dfrac{T-T_0}{T_i-T_0} = \int \dfrac{x}{2\sqrt{\alpha t}}$ جدول

$$q_0 = \frac{KA(T_0-T_i)}{\sqrt{\pi \alpha t}}$$

شار ثابت $\quad T-T_i = \dfrac{2q_0\sqrt{\alpha t/\pi}}{KA}\exp\left(\dfrac{-x^2}{4\alpha t}\right) - \dfrac{q_0 x}{KA}\left(1-\operatorname{erf}\dfrac{x}{2\sqrt{\alpha t}}\right)$

مثال: میله‌ی ناگهدری به قطر 5cm (50 cm) از جنس چوب در دمای اولیه



$10^\circ C$ در معرض کیفی با شرایط جابجایی $100\ \frac{W}{m^2 C}$ و $T_\infty = 40^\circ C$ قرار

گرفته. معلوم نمایید بعد از چند ساعت دمای سطح آن به دمای $30^\circ C$ می‌رسد.

$\alpha = 0.96\times10^{-7}$ $\quad K = 0.11$

$L = \dfrac{V}{A} = \dfrac{\pi r^2 L}{2\pi r L} = \dfrac{r}{2}$

$Bi = \dfrac{hL}{K} = \dfrac{100\times 2.5\times10^{-2}}{2\times0.11} = 11.36 > 0.1$

جسم تدماسنج

$Bi = \dfrac{hR}{K} = \dfrac{100\left(\frac{2.5}{100}\right)}{0.11} = 22.73$

$\dfrac{1}{Bi} = 0.044$

$\dfrac{\theta_0}{\theta_i} = \dfrac{30-40}{10-40} = \dfrac{1}{3} = 0.33$

$F_0 = 0.5 \longrightarrow \dfrac{\alpha t}{R^2} \Rightarrow$

$\dfrac{0.96\times10^{-7}\times t}{\left(\frac{2.5}{100}\right)^2} = 0.5$

$\Rightarrow t \simeq 0.9h$

$\dfrac{1}{Bi} = 0.044$

$\dfrac{\theta_s}{\theta_i} = \dfrac{\theta_s}{\theta_0}\cdot\dfrac{\theta_0}{\theta_i} \Rightarrow \dfrac{30-40}{10-40} = \underbrace{0.05}_{\text{جدول}} \times \dfrac{\theta_0}{\theta_i}$

$B = \dfrac{R}{R} = 1.0$ دمای سطح

$\dfrac{\theta_0}{\theta_i} =$

r-hosseini.ir

$\alpha = 0.96\times10^{-7}$ $\quad K = 0.11$

$$L = \frac{V}{A} = \frac{r}{2} = \frac{50}{4} = 12.5 \Rightarrow Bi = \frac{hL}{K} = \frac{12.5\times10^{-2}\times 100}{0.11} = 113.63 > 0.1$$

جسم تکه ماسیت.

$$Bi = \frac{hR}{K} = \frac{100\times 25\times10^{-2}}{0.11} = 227.3 \Rightarrow \frac{1}{Bi} = 4.4\times10^{-3} \simeq 0$$

$$\frac{\theta_s}{\theta_i} = \frac{\theta_s}{\theta_0}\cdot\frac{\theta_0}{\theta_i} \Rightarrow \frac{30-40}{10-40} = \frac{\theta_0}{\theta_i} \times$$

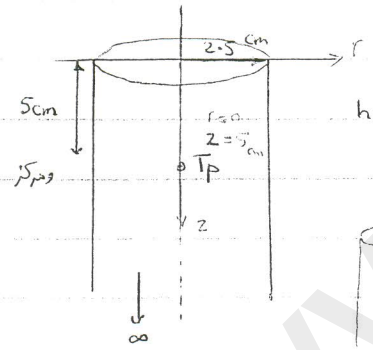
دمای سطح $\quad R = \frac{R}{R} = 1.0$ دمای سطح $\Rightarrow \frac{\theta_0}{\theta_i} =$

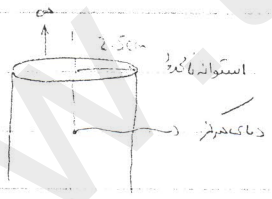
مثال: یک استوانه نیمه کروی را در نظر بگیرید از جنس گوشت (خواص فیزیکی آب)

دمای اولیه $30\,^\circ C$

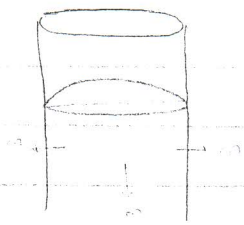
دمای T_p

بعد از یک ساعت در محیط جابجایی $T_\infty = 100^\circ$ و $h = 5\frac{W}{m^2C}$



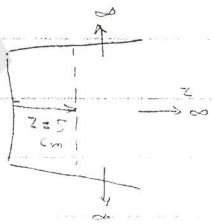


حالت ما دو بعدی است.



$$\alpha = \frac{K}{\rho C} = \frac{0.604}{997(4179)}$$ جسم نیمه کروی

$\alpha = 1.45\times10^{-7}$



$$\beta_i = \frac{hR}{K} = \frac{5\,(2.5/100)}{0.604} = 0.207$$

$$\frac{1}{Bi} = 4.83$$

$$F_o = \frac{\alpha t}{R^2} = \frac{1.45\times10^{-7}(3600)}{(2.5/100)^2} = 0.835 \Rightarrow \left.-\frac{\theta_0}{\theta_i}\right)_{\text{استوانه}} = 0.7 = \frac{T_0-T_\infty}{T_i-T_\infty}$$

$$\frac{x}{2\sqrt{\alpha t}} = \frac{5\times10^{-2}}{2\sqrt{1.45\times10^{-7}\times3600}} = 1.11$$

$$\Rightarrow \frac{\theta}{\theta_i} = 1$$

$$\frac{h\sqrt{\alpha t}}{K} = \frac{5\times\sqrt{1.45\times10^{-7}\times3600}}{0.604} = 0.19$$

r-hosseini.ir

$$\Rightarrow \frac{\theta_o}{\theta_i} = \underbrace{\left.\frac{\theta_o}{\theta_i}\right)}_{\text{استوانه}} \times \underbrace{\left.\frac{\theta}{\theta_i}\right)}_{\text{جسم نیمه محدود}} = 0.7 \times 1 = 0.7 \Rightarrow T_p = 17^\circ C$$

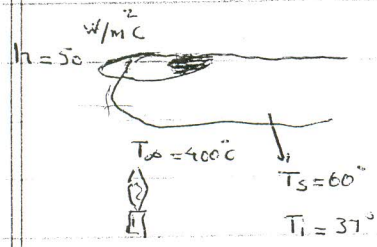
با تغییر $Z=5$ به $Z=1$ ساختی مشترک داریم

$$\frac{x}{2\sqrt{\alpha t}} = 0.22$$

$$\frac{h\sqrt{\alpha t}}{k} = 0.19$$

$$\Rightarrow \frac{\theta}{\theta_i} = 0.85 \Rightarrow \left.\frac{\theta}{\theta_i}\right)_{T_p} = 0.7 \times 0.85 = 0.595$$

$$\frac{T_p - T_\infty}{T_i - T_\infty} = 0.595 = \frac{T_p - 10}{20 - 10} \Rightarrow T_p = 15.95$$

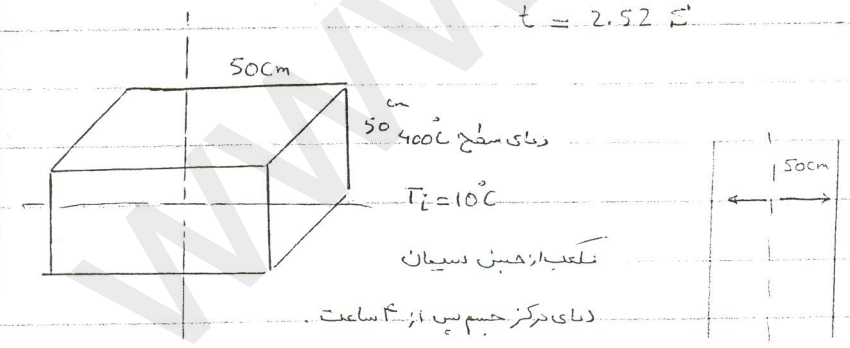


$$\frac{x}{2\sqrt{\alpha t}} = \frac{0.0}{2\sqrt{1.45\times10^{-7}(t)}} = 0.0$$

$$\frac{\theta}{\theta_i} = \frac{60-400}{37-400} = 0.94$$

$$\Rightarrow \frac{h\sqrt{\alpha t}}{k} = \frac{50\sqrt{1.45\times10^{-7}(t)}}{0.604} = 0.05$$

$$t = 2.52\ s$$



$$\alpha = 6.8\times10^{-7}$$

$$F_o = \frac{\alpha t}{L^2} = \frac{6.8\times10^{-7}(4\times3600)}{\left(\frac{25}{100}\right)^2} = 0.157 \qquad \frac{1}{B_i} = 0 \quad (h=0)$$

$$\left.\frac{\theta_o}{\theta_i}\right|_x = 0.7 \qquad \left.\frac{\theta_o}{\theta_i}\right|_y = \left.\frac{\theta_o}{\theta_i}\right|_z = 0.7 \Rightarrow \left.\frac{\theta_o}{\theta_i}\right|_{T_p(x,y,z)} = 0.7^3 = 0.343$$

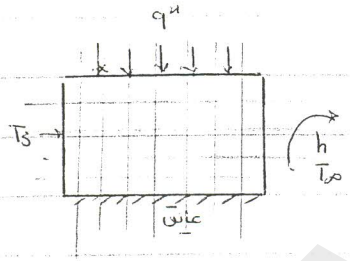
r-hosseini.ir

$$\frac{T_p - 400}{10 - 400} = 0.343 \Longrightarrow T_p = 266.23\,^\circ C$$

$$\left.\frac{\theta_0}{\theta_i}\right|_{T_p(x,y,z)} = \underbrace{\left.\frac{\theta_0}{\theta_i}\right|_x}_{\frac{\theta_s}{\theta_0}\cdot\frac{\theta_0}{\theta_i}} \cdot \left.\frac{\theta}{\theta_i}\right|_y \cdot \left.\frac{\theta}{\theta_i}\right|_z$$

جسم گذرا
- حل تحلیلی ← جداسازی توابع
- جسم تدما ← $Bi < 0.1$
- نمودارهای هسلر - نمودار جسم نیمه محدود

با استفاده از نمودارها نمی‌توان منبع تولید انرژی به کار برد. برای این کار باید از روش های عددی استفاده شود.



- $\boxed{\text{تفاضل جزئی}}$ ← معادله دیفرانسیل
- المان محدود ← معادله انتگرالی
- حجم محدود
- ⋮

از معادله اصلی داریم: $k\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}\right) = \rho c \frac{\partial T}{\partial t}$

$$\frac{\partial T}{\partial t} \Longrightarrow f(x+h) = f(x) + h\frac{df}{dx} + \boxed{\frac{h^2}{2!}\frac{d^2 f}{dx^2} + \cdots}$$

$$\Longrightarrow df/dx = \frac{f(x+h) - f(x)}{\Delta x} \quad \text{تفاضل پیشرو} \quad O(h)$$

$$f(x-h) = f(x) - h\frac{df}{dx} + \boxed{\frac{h^2}{2!}\frac{d^2 f}{dx^2}}$$

$$\frac{df}{dx} = \frac{-f(x-h) + f(x)}{\Delta x} \quad \text{تفاضل پسرو} \quad O(h)$$

37

r-hosseini.ir

$O(h^2)$

$$f(x+h) - f(x-h) = 2h\frac{df}{dx} \Rightarrow \frac{df}{dx} = \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2\Delta x}$$

تفاضل مرکزی

حال از رابطه اصلی داریم :

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{T(x+t) - T(x)}{\Delta t}$$

برای زمان فقط از تفاضل پیشرو استفاده می‌شود.

$$f(x+h) + f(x-h) = \frac{d^2f}{dx^2} = \frac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{h^2}$$

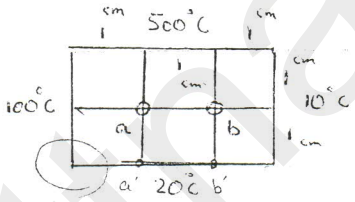
تفاضل مرکزی برای مشتق

مثال :

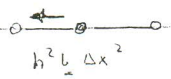
حالت پایدار

بدون منبع انرژی

$T_a, T_b = ?$



$$\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}\right) = 0 \xrightarrow[\text{یا مرکزی}]{\text{تفاضل پیشرو یا پسرو}} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{T(x+h) - 2T(x) + T(x-h)}{\Delta x^2}$$

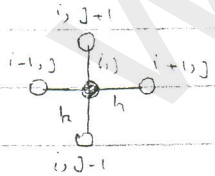


$$(T_{i+1,j} - 2T_{i,j} + T_{i-1,j})\frac{1}{h^2} + \frac{T_{i,j+1} - 2T_{i,j} + T_{i,j-1}}{k^2} = 0$$

اگر $h = k$ باشد در بیشتر مواقع این گونه است.

اگر منبع انرژی داشتیم

$$T_{i+1,j} + T_{i-1,j} + T_{i,j-1} + T_{i,j+1} - 4T_{i,j} = 0 \quad \left(\frac{-q'''}{k}\right)$$



a) $T_b + 100 + 500 + 20 - 4T_a = 0$

b) $T_a + 10 + 500 + 20 - 4T_b = 0$

با حل این دستگاه خواهیم داشت :

$$\begin{bmatrix} & \end{bmatrix}\begin{bmatrix} T_a \\ T_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix} \quad \begin{cases} T_b - 4T_a = -620 \\ T_a - 4T_b = -520 \end{cases} \Rightarrow T_a = 200.66^\circ C \quad T_b = 182.66^\circ C$$

r-hosseini.ir

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} -4 & 1 \\ 1 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_a \\ T_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -620 \\ -530 \end{bmatrix}$$

حال اگر به جای دمای 20 یا T_∞ را 20 و $h = 10$ و همین حالت k جسم نیز موجود باشد داریم:

a) $T_b + 100 + 500 + T_a' - 4T_a = 0$

b) $T_a + 10 + 500 + T_b' - 4T_b = 0$

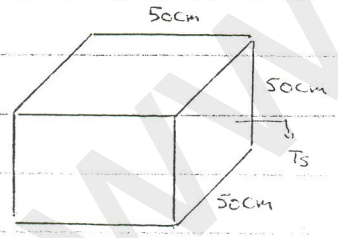
a') $-k\left(\frac{dT}{dx}\right) = h(T - T_\infty) \Rightarrow -12\,\frac{T_a - T_a'}{0.01} = 10\,(T_a' - 20)$

شیب دما یا گرادیان دما ← $\frac{\Delta T}{\Delta x}$

b') $-12\,\frac{T_b - T_b'}{0.01} = 10\,(T_b' - 20)$

در هر دما دیگر منبع ذخیره انرژی و تولید انرژی وجود ندارد و فقط جایی است که از روش بالا استفاده کنیم.

پروژه: مکعب 50cm از سیمان با دمای اولیه 10°C و دمای سطح 400°C موجود است.



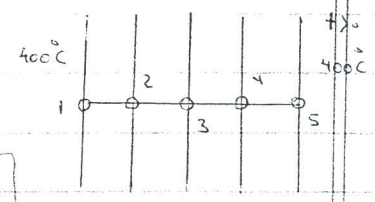
$T_i = 10°C$

$T_s = 400°C$

دمای مرکز؟ ⟶ S.S

حال مثال قبل را در حالت ناپایا حل می‌کنیم:

$$k\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}\right) = \rho c\,\frac{\partial T}{\partial t} \Rightarrow \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{1}{\alpha}\,\frac{\partial T}{\partial t}$$



$$\frac{T_{i+1} - 2T_i + T_{i-1}}{h^2} = \frac{1}{\alpha}\,\frac{T_i^{n+1} - T_i^{n}}{\Delta t}$$

زمان

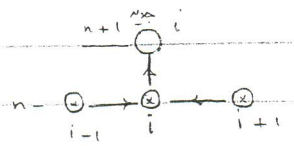
زمان $\boxed{t = \Delta t \times n}$

r-hosseini.ir

می‌توانیم دما همه را به صورت دمای اولیه در نظر گرفت

روش صریح
explicit

$$\frac{T_{i+1}^{n} - 2T_i^{n} + T_{i-1}^{n}}{h^2} = \frac{1}{\alpha}\,\frac{T_i^{n+1} - T_i^{n}}{\Delta t}$$



$$\frac{\alpha \Delta t}{h^2} = r \longrightarrow \text{فوریه}$$

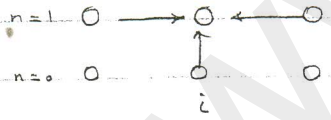
$$r\left(T_{i+1}^{n} + T_{i-1}^{n}\right) + (1-2r)T_i^{n} = T_i^{n+1}$$

$$\begin{bmatrix} r & 1-2r & r & 0 & \\ r & 1-2r & r & 0 & \\ & & 1-2r & r & \\ & & & 1-2r & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_{i-1} \\ T_i \\ T_{i+1} \\ T_{i+2} \\ \vdots \end{bmatrix}^{n} = \begin{bmatrix} T_{i-1} \\ T_i \\ T_{i+1} \\ T_{i+2} \\ \vdots \end{bmatrix}^{n+1}$$

برای سیستم یک بعدی باید حتماً $1-2r>0$ باشد لذا $r<1/2$ باشد در غیر این صورت مساله واگرا می‌شود.

روش ضمنی

$$\frac{T_{i+1}^{n+1} - 2T_i^{n+1} + T_{i-1}^{n+1}}{h^2} = \frac{1}{\alpha}\,\frac{T_i^{n+1} - T_i^{n}}{\Delta t}$$



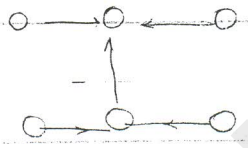
$$r\left(T_{i+1}^{n+1} + T_{i-1}^{n+1}\right) + (1+2r)T_i^{n+1} = T_i^{n}$$

$$\begin{bmatrix} 1+2r & & & \\ & 1+2r & & \\ & & 1+2r & \\ & & & 1+2r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \\ T_i \\ \\ \end{bmatrix}^{n+1} = \begin{bmatrix} \\ T_i \\ \\ \end{bmatrix}^{n}$$

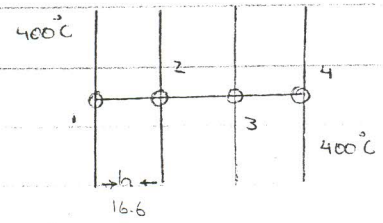
r-hosseini.ir

روش کرانک نیکلسون

$$(1-\omega)\frac{T_{i+1}^{n+1}-2T_i^{n+1}+T_{i-1}^{n+1}}{h^2}+\omega\frac{T_{i+1}^{n}-2T_i^{n}+T_{i-1}^{n}}{h^2}=\frac{1}{\alpha}\frac{T_i^{n+1}-T_i^{n}}{\Delta t}$$



$\omega = 1/2$



② $$\frac{T_1^{(0)}-2T_2^{(0)}+T_3^{(0)}}{h^2}=\frac{1}{\alpha}\frac{T_2^{(1)}-T_2^{(0)}}{\Delta t}$$

③ $$\frac{T_2^{(0)}-2T_3^{(0)}+T_4^{(0)}}{h^2}=\frac{1}{\alpha}\frac{T_3^{(1)}-T_3^{(0)}}{\Delta t}$$

$$F_o<\frac{1}{2}\Rightarrow\frac{\alpha\Delta t}{h^2}<1/2\Rightarrow\frac{6.8\times10^{-7}\,\Delta t}{\left(\frac{16.6}{100}\right)^2}<1/2\Rightarrow\Delta t<20000\ sec$$

② $$\frac{400-2T_2^{(0)}+T_3^{(0)}}{h^2}=\frac{1}{\alpha}\frac{T_2^{(1)}-T_2^{(0)}}{\Delta t}$$

③ $$\frac{T_2^{(0)}-2T_3^{(0)}+400}{h^2}=\frac{1}{\alpha}\frac{T_3^{(1)}-T_3^{(0)}}{\Delta t}$$

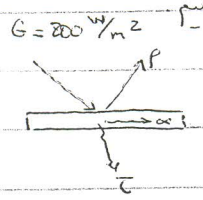
r-hosseini.ir

انتقال حرارت تشعشعی :

$$q_{1-2} = F_G \cdot F_\epsilon \, \sigma (T_1^4 - T_2^4)$$

F_G: هندسه ، F_ϵ: صدور و پخش تشعشعی ، T: K ، $\sigma \to 5.667 \times 10^{-8} \ \frac{W}{m^2 . K^4}$

هر جسم ضریب صدوری دارد که با دما و طول موج تغییر می کند ما ثابت فرض می کنیم



با ساده سازی داریم :

$$q_{1-2} = \epsilon \sigma A (T_1^4 - T_2^4)$$
$$= 4 \sigma A T_1^3 \Delta T$$

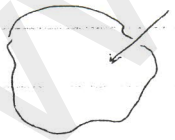
امواج نوری را نیز می توان از این نوع به حساب آورد . امواج تشعشعی طول موجی بین 0.1 μm تا 100 μm را دارند . امواج نوری جزئی از آن ها هستند . این امواج با سرعت نور حرکت می کنند .

جسم سیاه جسمی که هر مقدار انرژی جذب می کند همان مقدار پخش می کند

توان پخش جسم سیاه $E_b = \sigma T^4 \to W/m^2$

E_b: black ، σ: ضریب استفان بولتزمن

یک جسم با روزنه یک جسم سیاه محسوب می شود



هر جسم یک ضریب صدور یا پخش تشعشعی

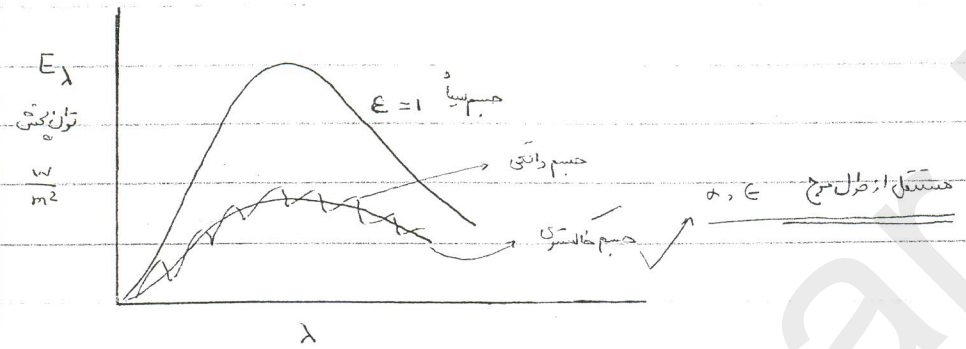
$$\left.\begin{array}{ll} \alpha(\lambda, T) & \text{جذب جسم} \\ \tau(\lambda, T) & \text{عبوری نماید} \\ \rho(\lambda, T) & \text{انعکاس} \end{array}\right\} \alpha + \tau + \rho = 1$$

فرض بر این است که این ضرایب مستقل از λ است . این ضرایب به نوع سطح ما بستگی دارد

r-hosseini.ir

در انتقال یا فرضیات ما بر مبنای

پخش آینه ای است.



مستقل از طول موج α , ϵ

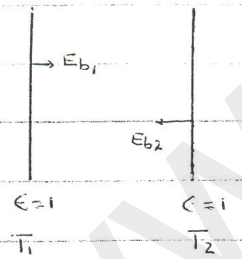
برای جسم‌هایی که جسم سیاه محسوب نمی‌شوند داریم:

$$E_{A1} = \epsilon \sigma T^4 = \epsilon E_b$$

$$\epsilon = 0.09$$

$$\longrightarrow E_{A1} = 0.09\,(5.669\times10^{-8})\,(273+23)^4$$

مثال: دو صفحه‌ی سیاه موازی به سمت بی‌نهایت



میل می‌کند طول در این حالت مهم نیست

$$q_{1-2} = (E_{b1} - E_{b2})A$$

$$A = A_1 = A_2$$

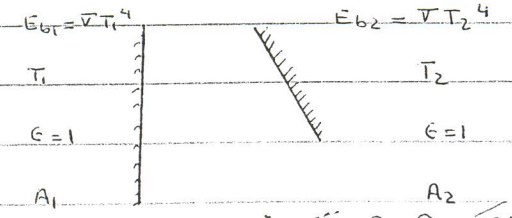
$$q_{1-2} = E_{b1}A - E_{b2}A$$

جسم‌ها هر دو خیلی بزرگ و موازی هم و هر دو سیاه هستند بنابراین نیاز به داشتن ضریب صدور و هندسه نیستیم.

$$\longrightarrow \frac{q_{1-2}}{A} = \sigma(T_1^4 - T_2^4)$$

r-hosseini.ir

در این حالت سطح بالایی تمامی



سطح صفحه‌ی راست را نمی‌بیند بنابراین

فاکتور دید سطح می‌شود F_{i-j} درصد انتقال حرارتی که از ① به ② منتقل می‌شود.

$$q_{1-2} = E_{b1} F_{1-2} A_1 - E_{b2} A_2 F_{2-1}$$

$F_{1-2} \neq F_{2-1}$ چون سطح ۱ می‌تواند تمام سطح ۲ را ببیند ولی لزومی ندارد که سطح ۲ تمام سطح ۱ را ببیند

$$q_{1-2} = \sigma A_1 \underline{\underline{F_{1-2}}} T_1^4 - \sigma A_2 \underline{\underline{F_{2-1}}} T_2^4$$

در بی‌نهایت دمای T_1 و T_2 به هم می‌رسد. فرض است که برای فاکتور هندسی سطح می‌شود چون در نهایت به تعادل ترمودینامیکی می‌رسند. در نهایت داریم:

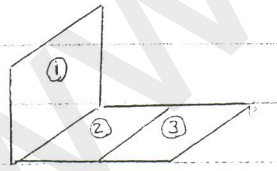
خاصیت تقارن

انتقال حرارت صفر می‌شود $\Longrightarrow A_1 F_{1-2} = A_2 F_{2-1}$ ①

$$\longrightarrow q_{1-2} = A_1 F_{1-2} \sigma (T_1^4 - T_2^4)$$

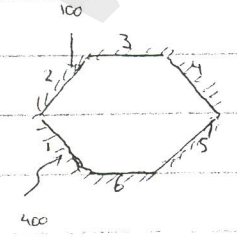
خاصیت جمع‌پذیری $A_1 F_{1-2,3} = A_1 F_{1-2} + A_1 F_{1-3}$ ②

سطوح منحنی متعرف خودشان را می‌بینند.



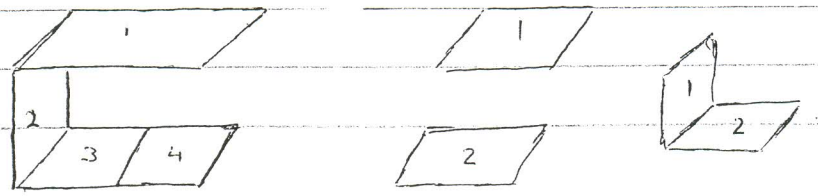
$$\sum_{j=1}^{n} F_{i,j} = 1.0 \quad ③$$

اجسامی که خودشان را نمی‌بینند.

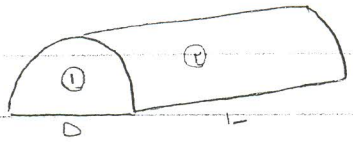


$$F_{1-1} = F_{2-2} = F_{3-3} = 0$$

r-hosseini.ir



در این موارد برای محاسبه‌ی فاکتور دید باید از جدول‌های کتاب استفاده نمود.



$F_{1-1} = 0.0$

$F_{2-2} = ?$ یا $F_{1-2} = ?$

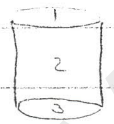
یا $F_{2-1} = ?$

$$A_1 F_{1-2} = A_2 F_{2-1}$$

$$\sum_{j=1}^{n} F_{1,j} = 1.0 \Rightarrow \cancel{F_{1,1}} + F_{1,2} = 1.0 \Rightarrow F_{1,2} = 1.0$$

$$DL(1.0) = \frac{\pi DL}{2} F_{2-1} \Rightarrow F_{2-1} = \frac{2}{\pi}$$

$$F_{2-1} + F_{2-2} = 1.0 \Rightarrow \frac{2}{\pi} + F_{2-2} = 1.0 \Rightarrow F_{2-2} = 1 - \frac{2}{\pi}$$



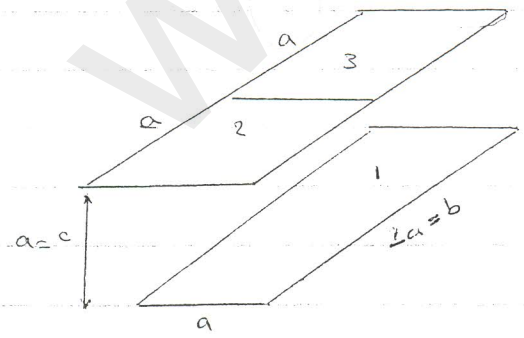
از جدول

مثال:

$F_{1-2} = ?$

$A_2 = A_3 = \frac{1}{2} A_1$

با استفاده از شکل



$$\beta = \frac{b}{c} = \frac{2a}{a} = 2 = \frac{Y}{D}$$

$$\gamma = \frac{a}{c} = \frac{a}{a} = 1 = \frac{X}{D}$$

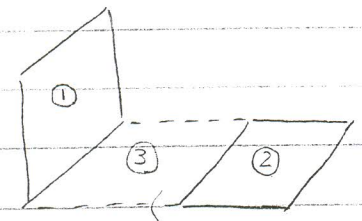
45 $F_{1-2,3} = 0.128 = F_{1-2} + F_{1-3}$

r-hosseini.ir

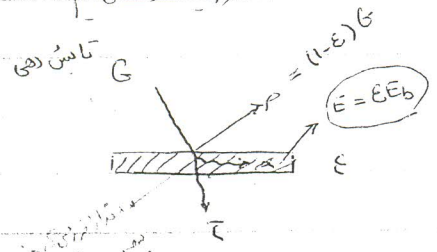
$F_{1-2,3} = 2F_{1-2} \longrightarrow F_{1-2} = \frac{0.128}{2} = 0.64$

$A_2 F_{2+1} = A_1 F_{1-2} \longrightarrow \frac{1}{2} A_1 F_{2-1} = A_1 F_{1-2} \Longrightarrow F_{2-1} =$

$F_{1-2,3} = F_{1-2} + F_{1-3}$



در نهایت حذف می‌کنیم

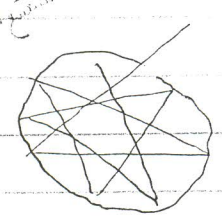


$\alpha + \rho + \tau = 1.0$

$\alpha \approx \epsilon$

$\tau = 0.0$ مانند دیوار در نظر می‌گیریم.

$\alpha + \rho = 1.0 \Rightarrow \rho \simeq 1 - \epsilon$



رادیوسیتی: J radiosity

کل شعشعی که یک سطح را ترک می‌کند اگر $\tau = 0.0$

$J = \epsilon E_b + (1-\epsilon) G$

ثابت می‌شود $\epsilon = \alpha$

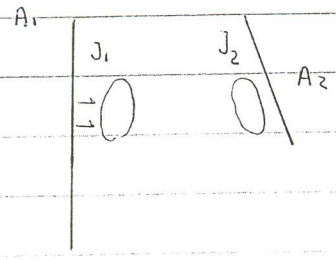
و کل انرژی که سطح خروجی را ترک می‌کند (فقط ناشی از تابش نیست)

$$\frac{q}{A} = J - G = \epsilon E_b + (1-\epsilon)G - G = \frac{\epsilon A}{1-\epsilon}(E_b - J)$$

$$= \frac{\overbrace{E_b - J}^{\text{توان محرک}}}{\underbrace{\frac{1-\epsilon}{\epsilon A}}_{\text{مانند مقاومت}}} \longrightarrow$$

مقاومت بین سطح شعشعی و فضا است.

r-hosseini.ir

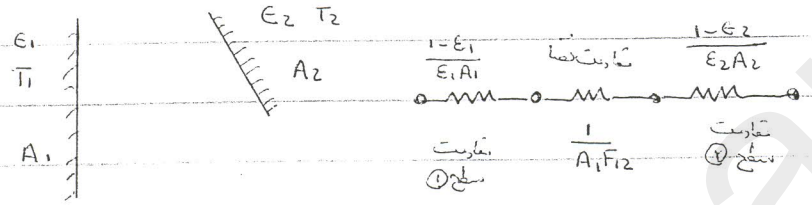


$$q_{1-2} = J_1 A_1 F_{1-2} - J_2 A_2 F_{2-1}$$

$$q_{1-2} = \frac{J_1 - J_2}{\frac{1}{A_1 F_{12}}}$$

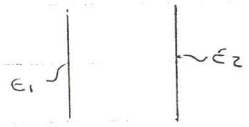
مقاومت فضا

برای یک شبکه کلی بین دو سطح :



$$① \quad q = \frac{\Delta E}{\Sigma R} = \frac{E_{b1} - E_{b2} = \sigma(T_1^4 - T_2^4)}{\frac{1-\varepsilon_1}{\varepsilon_1 A_1} + \frac{1}{A_1 F_{1-2}} + \frac{1-\varepsilon_2}{\varepsilon_2 A_2}} = \frac{q_{1-2}}{A}$$

اگر دو سطح موازی باشند و تماماً یکدیگر را ببینند

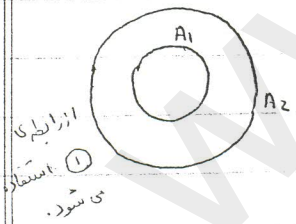


$$q = \frac{\sigma(T_1^4 - T_2^4)}{\frac{1}{A}\underbrace{\left[\frac{1-\varepsilon_1}{\varepsilon_1} + \frac{1}{F_{1-2}} + \frac{1-\varepsilon_2}{\varepsilon_2}\right]}_{\frac{1}{\varepsilon_1} - 1 + 1 + \frac{1}{\varepsilon_2} - 1}} = \frac{A\sigma(T_1^4 - T_2^4)}{\frac{1}{\varepsilon_1} + \frac{1}{\varepsilon_2} - 1}$$

دو صفحه‌ی موازی

$A_1 = A_2 = A$

$\Rightarrow F_{1-2} = 0 = 1$



از رابطه‌ی ① استفاده می‌شود.

برای لوله هم صادق است ولی رابطه‌ی قبل.

در دو صفحه‌ی موازی اگر یکی از اجسام سیاه باشد در نتیجه:

$$\varepsilon_2 = 1 \longrightarrow q = \varepsilon_1 A \sigma (T_1^4 - T_2^4)$$

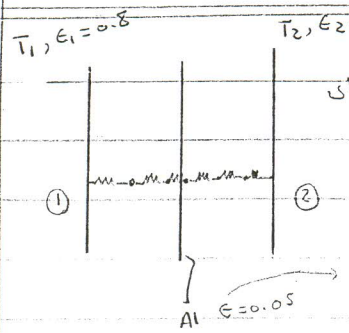
$$\text{if} \quad A_2 \to \infty \longrightarrow q = \varepsilon_1 A \sigma (T_1^4 - T_2^4)$$

$$\Rightarrow F_{1-2} = 1.0$$

$$\frac{1}{\varepsilon_1 A_1} - \frac{1}{A_1} + \frac{1}{A_1} - \frac{1}{\varepsilon_2 A_2} - \frac{1}{A_2}$$

$$\frac{1}{\varepsilon_1} + \frac{A_1}{A_2}\left(\frac{1}{\varepsilon_2} - 1\right)$$

r-hosseini.ir



سپرهای حرارتی

$$\frac{q}{A} = \frac{\sigma(T_1^4 - T_2^4)}{\frac{1}{\epsilon_1} + \frac{1}{\epsilon_2} - 1} = \frac{\sigma(T_1^4 - T_2^4)}{\frac{1}{0.8} + \frac{1}{0.4} - 1}$$

$$= 0.3636\,\sigma(T_1^4 - T_2^4)$$

حال یک صفحه‌ی آلومینیومی بین این دو صفحه قرار می‌دهیم

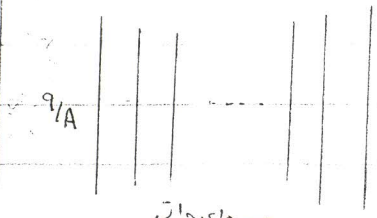
می‌توان رفتن دمای آن را باشد

$$\frac{q}{A} = \frac{\sigma(T_1^4 - T_2^4)}{\left(\frac{1}{\epsilon_1} + \frac{1}{\epsilon_{Al_1}} - 1\right) + \left(\frac{1}{\epsilon_{Al_2}} + \frac{1}{\epsilon_2} - 1\right)} = \frac{\sigma(T_1^4 - T_2^4)}{\frac{1}{0.8} + \frac{1}{0.05} - 1 + \frac{1}{0.05} + \frac{1}{0.4} - 1}$$

$$= 0.0239\,\sigma(T_1^4 - T_2^4)$$

$$\frac{\Delta q}{q} = \frac{0.3636 - 0.0239}{0.3636} = 93.4\%$$

از تشعشع این مقدار کاسته می‌شود



سپرهای حرارتی

$$\left(\frac{q}{A}\right)_{\text{با سپر}} = \frac{1}{n+1}\left(\frac{q}{A}\right)_{\text{بدون سپر}}$$

مثال: یک جسم خاکستری $A_1 = 4\,m^2$ ، $\epsilon_1 = 0.35$ ، $T_1 = 500^\circ C$ این جسم با یک جسم دیگر

شده است با $A_2 = 36\,m^2$ ، $T_2 = 100^\circ C$ ، $\epsilon_2 = 0.75$ در آن صورت $q_{1-2} = ?$

$$\frac{1}{\widetilde{F}_{1-2}} = \frac{1}{\epsilon_1} + \frac{A_1}{A_2}\left(\frac{1}{\epsilon_2} - 1\right) \qquad q_{1-2} = A_1 \widetilde{F}_{1-2}\,\sigma(T_1^4 - T_2^4)$$

$$\left(\frac{q}{A}\right)_{1-3} = \left(\frac{q}{A}\right)_{3-2} = \frac{q}{A} \Rightarrow \frac{\sigma(T_1^4 - T_3^4)}{\frac{1}{\epsilon_1} + \frac{1}{\epsilon_3} - 1} = \frac{\sigma(T_3^4 - T_2^4)}{\frac{1}{\epsilon_1} + \frac{1}{\epsilon_2} - 1} = \frac{q}{A}$$

$$\text{if } \epsilon_1 = \epsilon_2 = \epsilon_3 \Rightarrow \frac{q}{A} = \frac{\frac{1}{2}\sigma(T_1^4 - T_2^4)}{\frac{1}{\epsilon_1} + \frac{1}{\epsilon_3} - 1} = \frac{\frac{1}{2}\sigma(T_1^4 - T_2^4)}{\frac{1}{\epsilon_1} + \frac{1}{\epsilon_2} - 1}$$

$$\Rightarrow \left.\frac{q}{A}\right)_{\text{با سپر}} = \frac{1}{2}\left(\frac{q}{A}\right)_{\text{بدون سپر}} \Rightarrow \left.\frac{q}{A}\right)_{\text{بدون سپر}} = \frac{\sigma(T_1^4 - T_2^4)}{\frac{1}{\epsilon_1} + \frac{1}{\epsilon_2} - 1} \Rightarrow \left.\frac{q}{A}\right)_{\text{با سپر}} = \frac{1}{n+1}\left.\frac{q}{A}\right)_{\text{بدون سپر}}$$

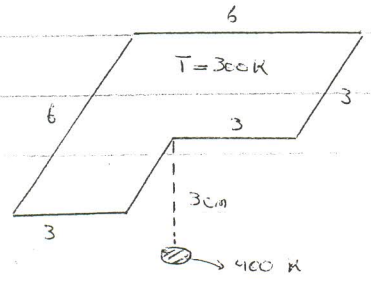
r-hosseini.ir

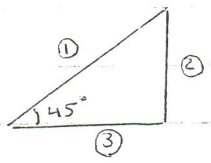
حال به حل مثال قبل می‌پردازیم:

$$\frac{1}{\tilde{F}_{1-2}} = \frac{1}{0.25} + \frac{4}{3.6}\left(\frac{1}{0.75} - 1\right) \Rightarrow \tilde{F} = 0.3455$$

$$\Rightarrow q_{1-2} = 4(0.3455)(5.667\times10^{-8})(773^4 - 373^4) = 26.4\ KW$$

مثال: هر دو جسم را سیاه در نظر بگیرید:





$F_{2-1} = ?$

$$\sum F_{1j} = 0 \Rightarrow F_{1-1} + F_{1-2} + F_{1-3} = 0.0 \Rightarrow F_{1-2} + F_{1-3} = 0.0$$

$$F_{2-1} + F_{2-2} + F_{2-3} = 0 \Rightarrow F_{2-1} \checkmark \Rightarrow A_2 F_{2-1} = A_1 F_{1-2}$$

$$\Rightarrow F_{1-2} \checkmark \Rightarrow F_{1-3} \checkmark$$

$$\Rightarrow F_{3-1} \checkmark$$

r-hosseini.ir

انتقال حرارت جابجائی : Convection

جابجائی ← طبیعی - آزاد ... Free convection (نیروی شناوری)

جابجائی ← اجباری ... Forced convection (نیروی انبرسی)

$$q = \underline{\underline{h}} A (T_s - T_\infty)$$

$h \rightarrow W/m^2 \cdot {}^\circ C$

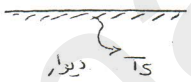
$h \rightarrow 5 - 20$ آزاد

$h \rightarrow 20 - 100000$ اجباری

اجباری باشد کولر یا فن ها .

انتقال حرارت در این جا بین سیال و دیواره است .

T_∞ و u_∞ ← سیال

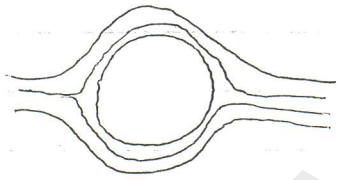


برای لامپ هر دو نوع جابجائی وجود دارد

برای بدن انسان در حالت نشستن یا راه رفتن مقدار

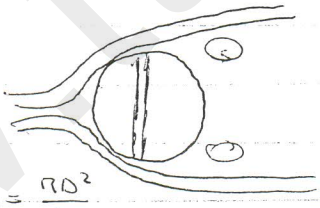
دستمتی جابجائی اجباری و دستمتی طبیعی است .

جمع زدن h ها غیر قابل قبول است .



$A = 4\pi r^2$

q_1



$A = \frac{\pi D^2}{4}$

q_2

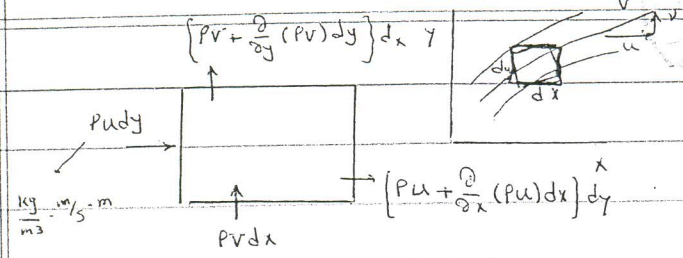
$\Rightarrow q = q_1 + q_2$ جابجائی

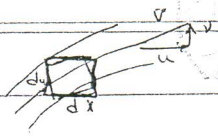
در لوله ها با وجود جریان اجباری یک جدایش رخ می دهد که باز هم نمی توان h ها را جمع کرد . در واقع در این

جا هم h ها و هم مساحت ها تغییر کرده است . در h هندسه و اختلاف دما نیز است .

r-hosseini.ir

پیوستگی جرم ـ مومنتوم ـ انرژی :

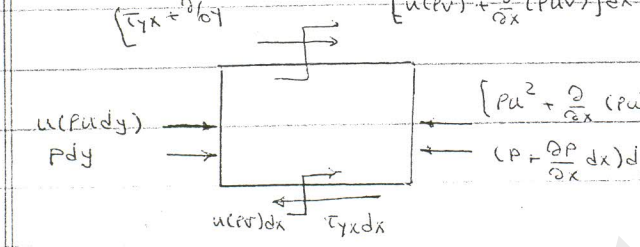




$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

با فرض پایدار ـ غیرقابل تراکم ـ آرام

دوبعدی



$$\tau_{yx} = \mu \frac{\partial u}{\partial y}$$

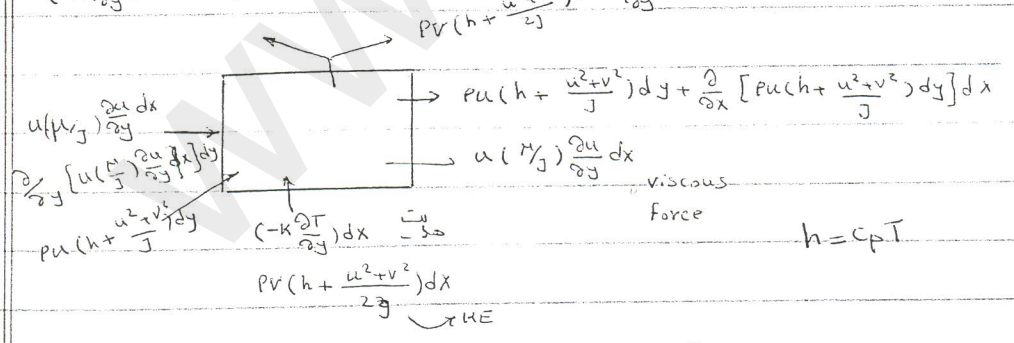
قانون نیوتن

$$\frac{\partial}{\partial x}(\rho u^2)dxdy + \frac{\partial}{\partial y}(u\rho v)dydx = -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}(\rho u^2) \rightarrow u\frac{\partial u}{\partial x} + u\frac{\partial u}{\partial x}$$

$$\frac{\partial}{\partial y}(u\rho v) \rightarrow u\frac{\partial v}{\partial y} + v\frac{\partial u}{\partial y}$$

$$\Rightarrow \rho\left(u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y}\right) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$



$$h = c_p T$$

Convective term

$$\rho c_p u\frac{\partial T}{\partial x} + \rho c_p v\frac{\partial T}{\partial y} = k\frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \mu\frac{\partial}{\partial y}\left(u\frac{\partial u}{\partial y}\right)$$

هدایتی

Viscous dissipation

انرژی از دست رفته

51. چشمه‌های انرژی که در اثر اصطکاک تولید

r-hosseini.ir

حال می‌خواهیم معادلات را بی‌بعد کنیم:

$$u^* = \frac{u}{u_0}, \quad v^* = \frac{v}{u_0}, \quad x^* = \frac{x}{L}$$

$$y^* = \frac{y}{L}$$

$$\frac{\partial u^*}{\partial x^*} + \frac{\partial v^*}{\partial y^*} = 0$$

$$\rho\left(u^* u_0 \frac{\partial u^* u_0}{\partial x^* L} + v^* u_0 \frac{\partial u^* u_0}{\partial y^* L}\right) = \mu \frac{\partial^2 u^* u_0}{\partial (y^* L)^2} \qquad \frac{\partial p}{\partial x} \simeq 0$$

$$u^* \frac{\partial u^*}{\partial x^*} + v^* \frac{\partial u^*}{\partial y^*} = \frac{\mu}{\rho u_0 L} \frac{\partial^2 u^*}{\partial y^{*2}} \rightarrow \frac{1}{Re}$$

$$u \sim u_\infty$$

$$y \sim \delta$$

از پیوستگی $\quad \frac{u_\infty}{x} + \frac{v}{\delta} \Rightarrow v \sim \frac{u_\infty \delta}{x}$

Now mom. Eq $\Rightarrow u_\infty \frac{u_\infty}{x} + \frac{u_\infty \delta}{x} \cdot \frac{u_\infty}{\delta} \simeq \nu \frac{u_\infty}{\delta^2}$

$$\Rightarrow \delta^2 \sim \frac{\nu x}{u_\infty} \Rightarrow \delta \sim \frac{x}{\sqrt{Re_x}}$$

$$\tau_\mu = \mu \frac{\partial u(x,y)}{\partial y}\Big|_{y=0} = C_x \rho \frac{u_\infty^2}{2} \Rightarrow \underbrace{C_x}_{\text{friction coefficient}} = \frac{2\nu}{u_\infty} \frac{\partial u(x,y)}{\partial y}\Big|_{y=0}$$

$$\Rightarrow C_m, \quad F = \underbrace{B}_{\text{عرض صفحه}} \underbrace{L}_{\text{طول صفحه}} C_m \frac{\rho u_\infty^2}{2}$$

$$C_m = \frac{1}{L}\int_0^L C_x \, dx$$

حال می‌خواهیم برای انتقال حرارت این روابط را بدست آوریم.

www.ttnar.ir

r-hosseini.ir

هدایت در سیال

$$-\underset{\sim}{K_f} A \frac{dT}{dy}\Big|_{y=0} = hA(T_w - T_\infty) \Rightarrow h = \frac{-K_f\, \partial T/\partial y\big|_{y=0}}{T_w - T_\infty}$$

مربوط به سیال است

$$\rho C_p u \frac{\partial T}{\partial x} + \rho C_p v \frac{\partial T}{\partial y} = K \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \mu \frac{\partial}{\partial y}\left(u \frac{\partial u}{\partial y}\right)$$

فقط صرف نظر شود

incompressible , 2-D , S.S , نیوتنی

پیوستگی $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$

حرکت $\rho\left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y}\right) = -\frac{\partial P}{\partial x} + \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$

انرژی $\rho C_p\left(u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y}\right) = K \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \mu \frac{\partial}{\partial y}\left(u \frac{\partial u}{\partial y}\right)$

$\mu\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2$ اگر برای دو باشد می‌توان از آن صرف نظر کرد

نیروی کشش سطحی — کشش سطحی — ضریب اصطکاک

آنالیز ابعادی $\delta \sim Re^{1/2}$ $\tau = \mu \frac{\partial u}{\partial y}$ $C_f \Rightarrow \bar{C}_f$, F

بی بعد سازی

از بی بعد سازی معادله‌ی انرژی داریم:

$$T^* = \frac{T}{T_\infty}$$

$$\rho C_p\left(u^* u_\infty \frac{\partial T^* T_\infty}{\partial x^* L} + v u_\infty \frac{\partial T^* T}{\partial y^* L}\right) = K \frac{\partial^2 T^* T_\infty}{\partial (y^* L)^2}$$

$$u^* \frac{\partial T^*}{\partial x^*} + v^* \frac{\partial T^*}{\partial y^*} = \underbrace{\frac{K}{\rho C u_\infty L}}_{1/Re \cdot Pr} \frac{\partial^2 T^*}{\partial y^{*2}}$$

$\frac{K}{\rho C} = \alpha$ $\frac{K\nu}{\rho C u_\infty L \nu} = \frac{\alpha}{\nu} \cdot \frac{1}{Re}$ $\frac{\alpha}{\nu} = \frac{1}{Pr}$ پرانتل

جدول

53

r-hosseini.ir

پرانتل برای مایعات بالاست و برای گازها تقریباً ۰.۷ است برای مایعات فلزی کوچک است.

چون سرعت سیال نداریم بنابراین نقطه مالک دارد

$$h = \frac{-k_f \, \partial T/\partial y \big|_{y=0}}{\Delta T} = Nu = \frac{hL}{k_f}$$ Nusselt نوسلت

اختلاف دمای سیال و دیواره

$$h = \frac{-k_s \, \partial T/\partial x \big|_{x=0}}{\Delta T} = Bi = \frac{hL}{k_s}$$ solid برای

$$T = f(Re, Pr) \qquad h = f(Re, Pr) \Rightarrow Nu = f(Re, Pr)$$

این فرض برای جریان اجباری است.

در جابجایی های اجباری عدد Nu معمولاً به این شکل است. $Nu = C Re^m Pr^n$

در همه حالات می توان h را از C_f ، $\bar{C}_f$ ، F ضرایب بدست آورد

$$h \longrightarrow \delta, C_f, F$$

می توان ضخامت لایه مرزی حرارتی δ_T را از روی معادله انرژی بدست آورد.

$$Pr = \frac{\nu}{\alpha} \sim \frac{\delta}{\delta_t} \longrightarrow Pr \simeq 1 \Rightarrow \delta \simeq \delta_T$$

در پرونیل عین هم حرکت می کند.

- مشتق جزئی زمان partial Time derivative $\frac{\partial c}{\partial t} \rightarrow \frac{\Delta c}{\Delta t}$ پل جدا

- مشتق کلی زمان Total Time derivative $\frac{dc}{dt}$ کلی بدست

- مشتق وابستگی زمان Substatial Time derivative $\frac{Dc}{Dt}$ کلی همراه با جریان آب

$$\boxed{\frac{dc}{dt} = \frac{\partial c}{\partial t} + \frac{\partial c}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial c}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial c}{\partial z}\cdot\frac{dz}{dt}}$$

$$\frac{Dc}{Dt} = \frac{\partial c}{\partial t} + u_x\frac{\partial c}{\partial x} + u_y\frac{\partial c}{\partial y} + u_z\frac{\partial c}{\partial z}$$

$$\frac{\partial c}{\partial t} + u_i\frac{\partial c}{\partial x_i} \quad \text{یا} \quad \frac{\partial c}{\partial t} + u\cdot\nabla c$$

$$\nabla = \hat{i}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{j}\frac{\partial}{\partial y} + \hat{k}\frac{\partial}{\partial z}$$

r-hosseini.ir

$$\frac{dN}{dt} = \frac{\partial}{\partial t}\int_{c.v} \eta \rho \, dV + \int_{c.s} \eta \rho V \cdot dA$$

$$\eta = 1 \longrightarrow \underbrace{\frac{\partial}{\partial t}\int_{cv} \rho \, dV}_{\text{باقی}} + \int_{c.s} \rho V dA = 0 \Rightarrow \dot{m}_{in} = \dot{m}_{out}$$

$$-\rho u_1 A_1 + 0 + \rho u_2 A_2 = 0$$

$$\frac{D\psi}{Dt} = \frac{\partial \psi}{\partial t} + \nabla \cdot \psi V = S \rightarrow \text{Sourse Term}$$

$$\psi = \rho \;,\; S = 0 \Rightarrow \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \rho V = 0$$

2-D , incomprisible , S.S , newtonnian

$$\nabla \cdot \rho V = 0 \longrightarrow \rho \cdot \nabla V + V \cdot \nabla \rho = 0 \Rightarrow \nabla V = 0$$

$$\nabla = i\frac{\partial}{\partial x} + j\frac{\partial}{\partial y} + k\frac{\partial}{\partial z}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

S برای حالت های دوفازی است.

S ← رانش

تکفاز

حال درمورد سرعت داریم :

$$\psi = \rho \vec{v}$$

$$\frac{\partial \rho u}{\partial t} + \nabla \cdot \rho u V = S \longrightarrow P, \tau, F_B, F_\gamma$$

$$\frac{\partial \rho v}{\partial t} + \nabla \cdot \rho v V = S$$

$$\frac{\partial \rho w}{\partial t} + \nabla \rho w V = S$$

55

r-hosseini.ir

$\rho = \text{Const}$, S.S , $\mu = \text{Const}$

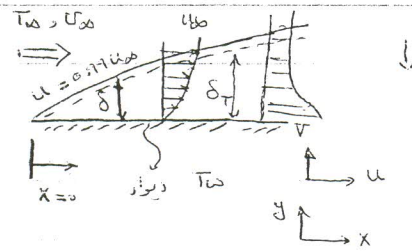
$$\rho\left(\frac{\partial u}{\partial t} + \nabla \cdot VV\right) = \underbrace{-\nabla p}_{\text{فشار}} + \underbrace{\mu \nabla^2 V}_{\text{نیروی لزجت}} + \underbrace{\rho g}_{\text{شناوری}}$$

از روی رابطه این عبارت ها

2-D , incompressible , newtonian , S.S. اعمال می شود

no pressure gradian $\frac{\partial P}{\partial x} = 0$

در جریان آرام



↓, no-slip condition

$\downarrow u_w = 0$ $\frac{\partial x}{U_\infty}$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

$$u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \Rightarrow \frac{1}{iRe} \Rightarrow \delta \qquad Nu = \frac{hL}{k_f} \qquad Re = \frac{\rho V L}{\mu}$$

$$u\frac{\partial T}{\partial x} + v\frac{\partial T}{\partial y} = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \Rightarrow \frac{1}{iRe \cdot Pr} \Rightarrow \delta_t \qquad Pr = \frac{\nu}{\alpha}$$

اگر $\nu = \alpha \Rightarrow \delta = \delta_t$ $\qquad \delta \simeq \frac{5x}{Re^{1/2}}$

$$\rho c_p\left(u_\infty \frac{T_\infty}{x} + \frac{U_\infty \delta_t}{x}\frac{T_\infty}{\delta_t}\right) = \frac{K T_\infty}{\delta_t^2} \Rightarrow \delta_t^2 = \frac{K \nu}{\rho c_p U_\infty x \nu} = \frac{\quad}{\quad}$$

$Pr \simeq 1.0 - 0.7$ گازها $\qquad \delta_t \simeq \frac{5x}{Re^{1/2} \cdot Pr^{1/3}}$

$Pr \gg 1.0$ مایعات روغن-آب

$Pr \ll 1.0$ مایعات فلزی $\qquad Pr = \frac{\nu}{\alpha} \simeq \frac{\delta}{\delta_t}$

کشش برشی

$$\Rightarrow \delta \longrightarrow \tau_w = \mu \frac{du}{dy} = C_f \frac{\rho V^2}{2} \Rightarrow \frac{0.664}{iRe^{1/2}} = C_f \Rightarrow \bar{C}_f = \frac{1.332}{Re^{1/2}}$$

r-hosseini.ir

$$\delta_t = \frac{5x}{Re^{1/2} \cdot Pr^{1/3}}$$

مقاومت هدایتی سیال به مقاومت جابجایی سیال

نسبتی بین ضخامت‌ها است

$$T = f(Re, Pr)$$

$$h = f(Re, Pr) \Longrightarrow Nu = 0.332\, Re^{1/2}\, Pr^{1/3}$$

$$Nu = f(Re, Pr)$$

$$h_x = \frac{k}{x}(0.332)\, Re^{1/2} \cdot Pr^{1/3}$$

این روابط برای 500000 عدد رینولدز درست است.

$$\bar{h} = \frac{1}{L}\int_0^L h_x\, dx \Rightarrow Nu = 0.664\, Re^{1/2} Pr^{1/3}$$

$$\frac{T_w + T_\infty}{2} = T_f$$

خواص فیزیکی مادر دمای film محاسبه می‌شود.

$\bar{h}$ باید حساب شود چون معمولاً نقطه‌ای نمی‌توان استفاده کرد. در جدول کتاب نشار اتمسفر است

ولی اگر بخواهد فشار عوض شود باید ρ را از قانون گازهای کامل استفاده کرد فقط ρ هست که عوض می‌شود

ویسکوزیته عوض نمی‌شود

ابعاد Nu و Re و Pr داریم:

$$\tau = \mu \frac{\partial u}{\partial y}\Big|_{y=0}$$ ← رابطه ارتباط اصطکاک با ضریب جابجایی

$$\tau = C_x \frac{\rho u_\infty^2}{2} \Rightarrow \frac{C_x}{2} = 0.332\, Re_x^{-1/2}$$

عدد استانتون

$$\Rightarrow St = \frac{Nu}{Re \cdot Pr}$$

57

$$Nu_x = 0.332\, Re_x^{1/2}\, Pr^{1/3}$$

r-hosseini.ir

$$St = \frac{hL/k}{\frac{\rho V L}{\mu} \cdot \frac{\nu}{\alpha}} = \frac{h\, A\Delta T}{\underbrace{\rho C u_\infty}_{\dot m} A\Delta T}$$

* نسبت مصرفی به جذب ذخیره انرژی

$$\begin{cases} \alpha = k/\rho c \\ \nu = \mu/\rho \end{cases}$$

$$St_x \cdot Pr^{2/3} = \frac{C_x}{2}$$

این معادله به نام رینولدز - کولبرن معروف است که با اندازه‌گیری کشش سطحی می‌توان ضریب جابجایی را مشخص نمود.

$$Nu = \frac{hL}{k_f} \qquad Re = \frac{\rho V L}{\mu} \qquad Pr = \frac{\nu}{\alpha} \qquad St = \frac{Nu}{Re \cdot Pr}$$

پکلت

$$Pe = Re \cdot Pr$$

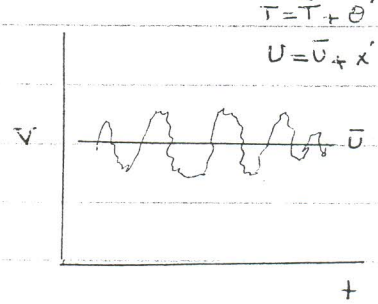
تمامی روابط بالا در جابجایی اجباری است.

حال می‌خواهیم در مورد جریان مغشوش بحث کنیم.

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \qquad Re > 5\times10^5$$

$$T = \bar T + \theta'$$

$$U = \bar U + x'$$



$$\rho\left(u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y}\right) = \nu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

$$\rho\left(u\frac{\partial T}{\partial x} + v\frac{\partial T}{\partial y}\right) = \alpha\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}$$

با تغییر در حالت توربولانس داریم:

Pr سیال → $\nu + \nu_t$

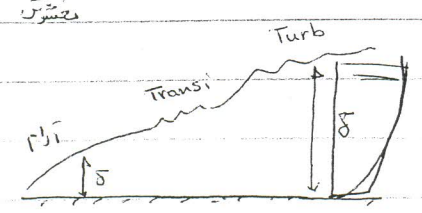
Pr مغشوش → $\alpha + \alpha_t$

که از خواص هندسی به دست می‌آید.

r-hosseini.ir

$Nu = 0.0296\, Re_x^{4/5}\, Pr^{1/3}$ توربولانس $\overline{Nu} \simeq Nu_x$

مختص x



در سیستم برج های خنک کن قطرات آب

پایین می ریزد و جریان هوا داریم که با هم انتقال

حرارت دارند.

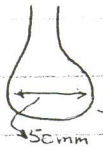
$$St = \frac{C_f/2}{1 + 2.1\, Re^{-0.1}(Pr-1)}$$

$$St\, Pr^{2/3} = \frac{C_f}{8}$$ برای جریان مضطرب در لوله

مثال: یک لامپ 40 W مفروض است. دمای سطح آن 127 °C و دمای محیط 27 °C و قطر لامپ

50 میلی متر و سرعت جریان هوا آزاد 0.3 m/s است. میزان انتقال حرارت به صورت Convection چقدر

است.



$T_s = 127\,°C$

$T_\infty = 27\,°C$

$U_\infty = 0.3\ m/s$

خواص در این حالت در دمای متوسط است

sphere $\overline{Nu} = 0.37\, Re^{0.6}$

$Nu = 2 + (0.4\, Re^{1/2} + 0.06\, Re^{2/3})\, Pr^{0.4} \left(\frac{\mu_\infty}{\mu_w}\right)^{1/4}$

T_∞ محاسبه شود

$\mu_\infty \to T_\infty$ ، $\mu_w \to T_w$

همواره Nu کره بالاتر از 2 است.

$$T_f = \frac{127+27}{2} = 77\,°C \Longrightarrow \nu_f = 2.079 \times 10^{-5}\ m^2/s$$

$$k_f = 0.03\ W/m\,K$$

$$Pr = 0.697$$

$$Re = \frac{VD\rho}{\mu} = \frac{0.3(50\times10^{-3})}{2.079\times10^{-5}} = 721.5 \Rightarrow Nu = 0.37(721.5)^{0.6}$$

59 $$\Rightarrow h = \frac{k_f}{D}(0.37)(721.5)^{0.6} = 11.52\ W/m^2.K$$

r-hosseini.ir

$$T_\infty = 27^\circ C \Rightarrow Re = \frac{VD}{\nu} = \frac{0.3(50\times10^{-3})}{15.69\times10^{-6}} = 956$$

$$Nu = 2 + (0.4(956)^{1/2} + 0.06(956)^{2/3})(0.708)^{0.4}\left(\frac{1.8462}{2.286}\right)^{1/4}$$

$$Nu = 14.21$$

$$h = \frac{0.026}{0.05} \cdot Nu = 7.4 \ W/m^2K$$

$$Q = hA\Delta T = 11.52\left(\underbrace{\pi\frac{D^2}{4}}_{\pi(\frac{0.05}{4})^2}\right)(127-27) = 2.26 \ W$$

(*) قرص شوند در جریان اجباری $A = \pi r^2$

$$\frac{2.26}{40} = 5.65\%$$

درصد Convection می باشد

اجباری

$$q = \varepsilon\sigma A(T_1^4 - T_2^4) = 5.667\times10^{-8}(\pi(0.05)^2)(400^4 - 300^4)$$

$$\varepsilon = 1.0 \qquad = 7.79 \ W$$

$$\frac{7.79}{40} = 19\%$$

جریان داخل لوله ها:

$Re < 2300$ جریان آرام

$$u = \frac{1}{4\mu}\frac{dp}{dx}(r^2 - r_0^2) \Rightarrow \frac{u}{u_0} = \left(1 - \left(\frac{r}{r_0}\right)^2\right)$$

$$f = \frac{64}{Re}$$

معادله ی انرژی $\Rightarrow \rho C_p u \frac{\partial T}{\partial x} = k\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial T}{\partial r}\right)\right)$

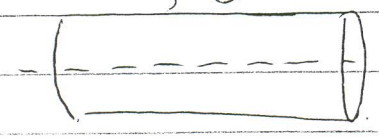
جمله

$T = ?$ پروفیل دما از درجه دوم حدس زده می شود

r-hosseini.ir

① $T = cte$

② $q'' = cte$



$\frac{dT}{dr} = 0$

کاملاً گسترش یافته

$Nu_{①} = 3.66$ Laminar

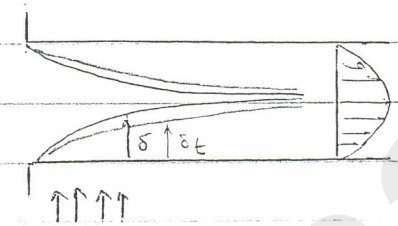
$Nu_{②} = 4.364$ fully developed

در دو حالت دمای دیواره ثابت و یا شار ثابت در نظر می‌گیریم.

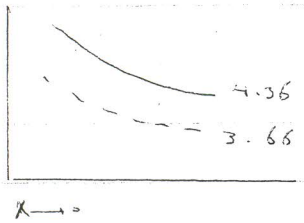
$$D_H = \frac{4A}{P}$$

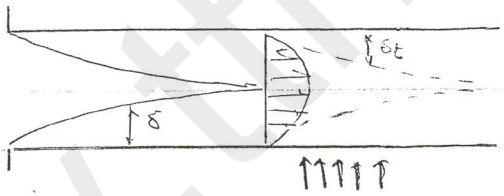
شعاع هیدرولیکی

قطر هیدرولیکی



گرم کردن





q'' یا T

$$Nu = C\,Re^{m}\,Nu^{n}$$

نشان دهنده‌ی آن است که پروفیل

$$(Gz)^{-1} = \frac{x/D}{Re.Pr}$$

دما و سرعت چه موقع با هم گسترش یافته‌اند

از روی نمودار به دست می‌آید

در برگه 8.56 و 8.57

$(Gz)^{-1} < 0.1$ از نمودار استفاده می‌شود

if $Re > 2300 \Rightarrow Nu = 0.023\,Re^{4/5}\,Pr^{n}$ نیتوس بولتز

$n = 0.3$ سرد کردن

$n = 0.4$ گرم کردن

$(Pr \ll 1.0)\ \{(Pe)^{n}\}$ ← سیال فلزی

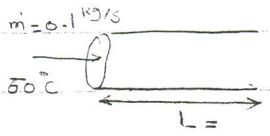
Q1 ① $Re \longrightarrow$ ② $Gz \longrightarrow$ if $Gz > 0.1 \Rightarrow Nu_{T} \downarrow Nu_{q}$

r-hosseini.ir

مثال: لوله با قطر داخلی 2.5cm و دبی عبوری آب 0.1 kg/s دمای ورودی آب 60°C در معرض محیطی با سرعت

$U = 0.3\ m/s$ و $T_\infty = 27°C$ همچنین قطر خارجی 3cm از جنس استیل. طول لوله برابر با 3 متر

دمای خروجی را بیابید.



سیال داخل آب $\Rightarrow Re = \frac{\rho V D}{\mu} = \frac{\rho\, 4\dot{m}/\rho \pi D^2 \cdot D}{\mu} = \frac{\dot{m} 4}{\pi D \mu} = \frac{4(0.1)}{\pi(2.5\times10^{-2})(4.71\times10^{-4})}$

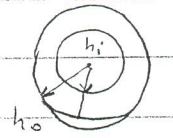
$\dot{m} = \rho A V \Rightarrow \dot{m} = \rho \frac{\pi}{4} D^2 V \Rightarrow V = \frac{4\dot{m}}{\rho \pi D^2} =$

$Re = 10813 > 2300$ توربولانت

$Nu = 0.023\, Re^{4/5}\, Pr^{0.3} = 0.023(10813)^{4/5}(3.01)^{0.3} = 54$ (سردشدن آب)

$\frac{k_f}{D} Nu = h \Longrightarrow h = 54 \times \frac{0.654}{0.025} = 1412\ W/m^2K$

$Re = \frac{1.17(0.3)(3\times10^{-2})}{1.84\times10^{-5}} = 572$



$Nu = C(Re)^n$ 40–4000

$C = 0.615$

$n = 0.466$

$\Rightarrow Nu = 0.615(572)^{0.466} = 11.86$

$h_o = 0.026 \times \frac{11.86}{0.03} = 10.27\ \frac{W}{m^2K}$

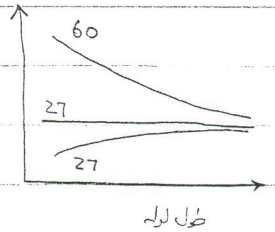
$U_i = \frac{1}{\frac{1}{h_i} + \frac{r_i \ln r_o/r_i}{k} + \frac{r_i}{r_o}\frac{1}{h_o}} = \frac{1}{\frac{1}{1412} + \frac{\frac{1.25}{1000}\ln 3/2.5}{20} + \frac{3}{2.5}\frac{1}{10.27}}$

r-hosseini.ir

$q = U_i A_i \Delta T = \dot{m} c_p \Delta T$ تغییرات دما در طول لوله ثابت فرض شده

$q = 8.5 \times (\pi)(\frac{2.5}{100})(15)(60-27)$

$= 0.1\,(4180)\,(60 - T_{خروجی})$



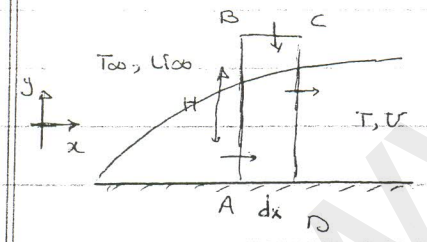
$T_{خروجی} = 59.21\,^\circ C$

$Nu_{اجباری} = C Re^m Pr^n$ $\Rightarrow T = f(Re, Pr)$

$Pr \ll 1.0$ $(Re\,Pr)^n = Pe^n$

$\left.\begin{array}{l} \text{تابع جرم} \\ \text{مومنتم} \\ \text{انرژی} \end{array}\right\}$ $\begin{array}{l} u \\ T \end{array}$ پروفیل $\Rightarrow h = \dfrac{-k_f \frac{\partial T}{\partial y}\Big|_{y=0}}{\Delta T}$

$h = f(Re, Pr)$



$Pr = 1$ ، لایه مرزی سرعت = لایه مرزی حرارتی

$\frac{\partial P}{\partial x_i} \simeq 0$

$2-D$

$S.S$

incompressible - آرام

می توان

$iN = 1.0$

$\dot{m}_{AB} = -\left[\int_0^H \rho u\,dy\right] w$ $\dot{m}_{DC} = \left[\int_0^H \rho u\,dy + \left(\frac{\partial}{\partial x}\int_0^H \rho u\,dy\right)dx\right] w$

$\dot{m}_{BC} = -\frac{\partial}{\partial x}\left[\int_0^H \rho u\,dy\right] dx \cdot w$

حال همین کار را برای انرژی انجام می دهیم :

r-hosseini.ir

Energy flow in

$$\dot{E}_{AB} = \int_0^H c\rho u T\,dy \qquad e = \frac{h}{} \quad h = c_p T$$

Energy flow out

$$\dot{E}_{CD} = \int_0^H c\rho u T\,dy + \frac{d}{dx}\left[\int_0^H c\rho u T\,dy\right]dx$$

$$\dot{E}_{BC} = \frac{d}{dx}\left[\int_0^H c\rho u T_\infty\,dy\right]dx$$

$$\frac{d}{dx}\left[\int_0^H c\rho u T\,dy\right]dx - \frac{d}{dx}\left[\int_0^H c\rho u T_\infty\,dy\right]dx =$$

$$-\frac{d}{dx}\left[\int_0^H c\rho u (T-T_\infty)\,dy\right]dx = S$$

$$S_t \Rightarrow T_\infty - T \Rightarrow H = \delta_t \Rightarrow -\frac{d}{dx}\left[\int_0^{\delta_t} c\rho u (T-T_\infty)\,dy\right]dx$$

بگونه‌ای تعریف می‌کنیم

$$= -k_f \left.\frac{dT}{dy}\right|_{y=0} dx$$

یک پروفیل دما و سرعت حدس زده می‌شود و حل می‌شود

مثال: لایه مرزی حرارتی δ $\qquad \frac{T-T_\infty}{T_w-T_\infty} = \frac{y}{\delta}$ $\qquad$ for all y $\quad u = U_\infty$

با استفاده از معادله بالا داریم:

$$-\frac{d}{dx}\int_0^\delta c\rho u_\infty (T-T_\infty)\,dy = -k_f \left.\frac{dT}{dy}\right|_{y=0}$$

$$\int_0^\delta \frac{c\rho u_\infty (T_w-T_\infty)}{\delta}\, y\,dy = \frac{\rho u_\infty c (T_w-T_\infty)\delta}{2}$$

$$k\left.\frac{dT}{dy}\right|_{y=0} = k\,\frac{T_w-T_\infty}{\delta} \Rightarrow \frac{d}{dx}\left[\frac{c\rho u_\infty (T_w-T_\infty)\delta}{2}\right] = k\,\frac{T_w-T_\infty}{\delta}$$

$$\delta\,d\delta = \frac{2k}{c\rho u_\infty}\,dx \Rightarrow \delta^2 = \frac{4k}{c\rho u_\infty}x + C \Rightarrow \delta = 0 \ @\ x = 0 \Rightarrow C = 0$$

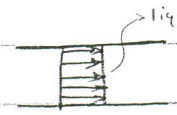
r-hosseini.ir

$$\Rightarrow \delta^2 = 4x^2 \frac{K}{\rho c} \cdot \frac{\mu}{\mu U_\infty x} = \frac{4x^2}{Re\, Pr} \Rightarrow \delta = \frac{2x}{(Re_x Pr)^{1/2}}$$

$$h_x (T_w - T_\infty) = \frac{K(T_w - T_\infty)}{2x} (Pe\, Re)^{0.5}$$

$$\frac{h_x}{K} = Nu = 0.5 (Re_x Pr)^{1/2} \Rightarrow \boxed{Nu = 0.5\, Pe^{1/2}}$$

همانند تقریباً برای حالت روغن کاری است تقریباً برای سیال فلزی است.

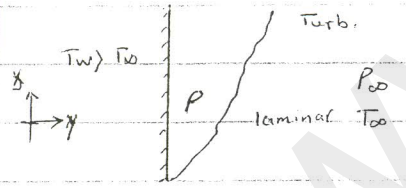


در آخر برای محاسبه h، جابجایی با هوا یکسان قرار می‌دهیم

جابجایی آزاد:

ممکن است که نیروی اینرسی داشته باشیم ولی به گونه‌ای است که نیروی شناوری غالب بر اینرسی است.

بی‌بعد کردن را بدست آورید؟



2-D — تائم — صفحه‌ی تخت

لامینار ناپذیر — پایدار — نیوتنی

$$\beta = \frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P = \frac{1}{V_\infty} \frac{V - V_\infty}{T - T_\infty} = \frac{\rho_\infty - \rho}{\rho (T - T_\infty)}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

$$\rho\left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y}\right) = \underbrace{-\frac{\partial P}{\partial x}}_{\text{شناور}} \underbrace{- \rho g}_{\text{وزن}} + \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

$$\frac{\partial P}{\partial x} = -\rho_\infty g \rightarrow g(\rho_\infty - \rho)$$

$$Gr = \frac{g \beta (T_w - T_\infty)}{\nu^2} x^3$$

برای مواد دیگر در جداول

انبساط حجمی

$\beta = \frac{1}{T_\infty}$ یا $\frac{1}{T_f}$ در گازها

کی گراشف Grashof ← از بی‌بعد کردن بدست می‌آیند

r-hosseini.ir

$$\rho c\left(u\frac{\partial T}{\partial x}+v\frac{\partial T}{\partial y}\right)=k\frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \longrightarrow \frac{1}{Pr\,Re}$$

$Nu = f(Gr, Re, Pr)$ مخلوط

اگر فقط آزاد ـ Re کوچک

$Nu = f(Gr, Pr)$ $\frac{\text{ضخامت لایه مرزی}}{\text{ضخامت لایه حرارتی}}$

$\frac{Gr}{Re^2} = \frac{\text{نیروی شناوری + نیروی لزجت}}{(\text{نیروی اینرسی})^3}$

در جداول و نمودارها $Nu = C(Gr\,Pr)^n$

$= C\,Ra^n$

$n = 1/3$ توربولانت

$n = 1/4$ آرام

تعریف خاصی ندارد مانند (Re)

معیار توربولانس $Ra = Gr.Pr$ رایلی

و آرام بودن جریان آزاد عدد رایلی است که باید در صفحات گفت $Ra > 10^9$ باشد.

$$Ri = \frac{Gr}{Re^2}\begin{cases} \ll 1 & \text{اجباری} \\ \approx 1 & \text{Mixed} \quad (0.8-1.5) \quad \text{آزاد-اجباری} \\ \gg 1 & \text{آزاد} \end{cases}$$

توربولانت

لامب هر دو است

Gr نیروی شناوری به لزجت است. ولی در واقع هر سه نیروی شناوری، لزجت و اینرسی است.

$Ri = \frac{Gr}{Re^2} \longrightarrow$ Ritchardson number

که در روزنگی های دریایی

و یا آلودگی ها استفاده می شود

$q = hA\Delta T$

h در جریان توربولانس ارتباطی به طول ندارد

r-hosseini.ir

مثال: لامپی که قبلاً حل شده است:

40 watt

$T_b = 127\,^\circ C$

$T_\infty = 27\,^\circ C$

$D = 50$ mm

% lost by convection

Free?

$$Gr = \frac{g\beta\Delta T\,(50/1000)^3}{\nu^2} = \frac{9.8\left(\frac{1}{77+273}\right)(100)\,(50/1000)^3}{(2.07\times10^{-5})^2} \simeq 8.1\times10^5$$

β باید حتماً کلوین یا رانکین باشد.

$$Gr/Re^2 = \frac{8.1\times10^5}{(721.5)^2} = 1.55$$ آزاد - اجباری

در جریان ها اجباری آزاد هم Nu بزرگتر از 2 است

$$Nu_{\text{آزاد}} = 2 + 0.43\,(Gr\,Pr)^{1/4}$$ هولمن

Pr گازها حدود 0.7 است

$$Nu = 2 + 0.43\,(8.1\times10^5 \times 0.7)^{1/4}$$

$$= 13.8$$

$$\frac{hD}{k_f} = 13.8 \Rightarrow h_{\text{آزاد}} = \frac{13.8\,(0.028)}{\frac{50}{1000}} = 7.73\ W/m^2\cdot{}^\circ C$$

$$q = hA\Delta T = 7.73\times\pi\left(\frac{50}{100}\right)^2(100) = 6.07\ W$$

(*) توجه شود که در جریان آزاد $A = 4\pi r^2$ می باشد

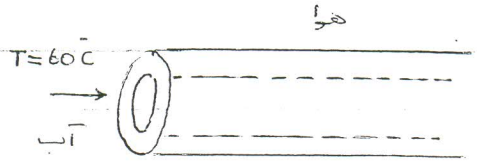
$$\text{lost درصد} = \frac{6}{40} = 15\%$$ آزاد

20% تشعشع ⟵ از تشعشع سیم لامپ صرف نظر شده و فقط حباب در نظر گرفته شده است.

6.0% اجباری

r-hosseini.ir

طراحی مبدل حلقوی



$D_i = 2.5\ cm$

$D_o = 3\ cm$

$K = 17$ steel

$V_{\dot{e}} = 3\ m/s$

$U_\infty = 0.3\ m/s$

$T_\infty = 27°C$

$$Re = \frac{\rho V D}{\mu} = \frac{1000(3)(2.5/100)}{4.71\times10^{-4}}$$

$$= 1.6\times10^5$$ توربولانت

$$Nu = 0.023\, Re^{4/5} Pr^n = 0.023\,(1.6\times10^5)^{4/5}(3)^{0.3} = 465.76$$

$$h_i = \frac{0.654(465.76)}{0.025} = 60.92\times10^3 \simeq 1.2\times10^4$$ آب اجباری است

چون سرعت سیال بالا است

$$Gr = \frac{9.8\left(\frac{1}{27+273}\right)(60-27)(3/100)^3}{(15.7\times10^{-6})^2} = 1.18\times10^5$$ دیگر نیاز به محاسبه نیست

دمای سطح لوله ما دائم در حال تغییر است باید تخمین بزنیم ابتدا فرض می‌کنیم دمای سطح ما 60°C باشد

باید سعی و خطا شود

$$Re = \frac{\rho V D}{\mu} = \frac{(0.3)(3/100)}{15.7\times10^{-6}} = 573.2$$

$$\Rightarrow \frac{Gr}{Re^2} = \frac{1.18\times10^5}{(573.2)^2} = 0.34$$ اجباری

$$Nu = CRe^n = 0.615\,(573.2)^{0.466} = 11.9$$

$$h = \frac{11.9\,(0.03)}{0.03} = 11.9$$

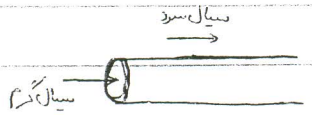
r-hosseini.ir

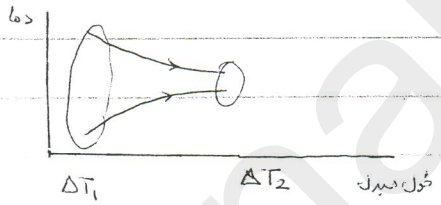
$$U_o = \frac{1}{\frac{1}{h_i} + \frac{r_i \ln r_o/r_i}{k} + \frac{r_i}{r_o}\frac{1}{h_o}} = \frac{1}{\frac{1}{12000} + \frac{0.025 \ln(3/2.5)}{2(1.7)} + \frac{2.5}{3}\cdot\frac{1}{11.9}}$$

$$= 14.6$$

$$q = U_i A_i \Delta T = 14.6(\pi)\left(\frac{2.5}{100}\right)L(60-27) = \dot{m} C_p \Delta T$$

ثابت بودن دمای 60 مشکل دارد





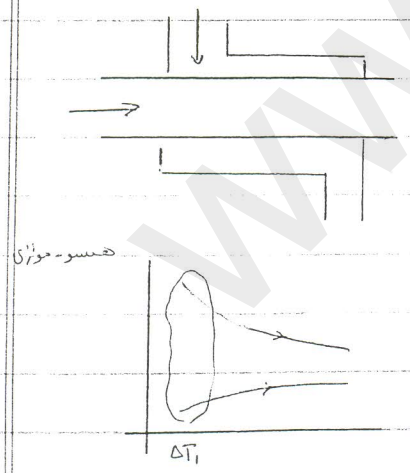
از روش های مختلف استفاده می کنند که این ثابت بودن دما را در نظر نگیرند. روش متوسط لگاریتمی LMTD

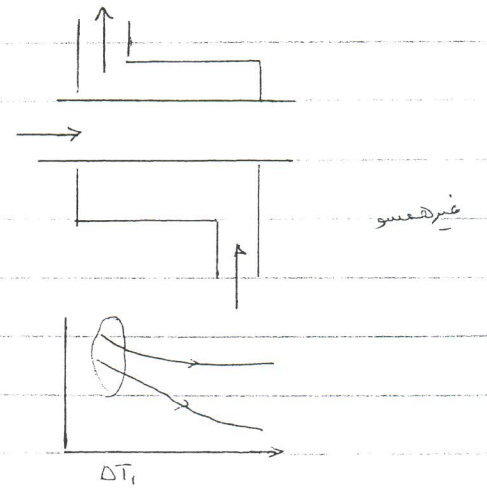
ε-NTU

$$q = UAF\Delta T_{logritmic}$$

F: ضریب تصحیح - فاکتور

$$\Delta T_{log} = \frac{\Delta T_1 - \Delta T_2}{\ln \frac{\Delta T_1}{\Delta T_2}}$$





r-hosseini.ir

$$U_i A_i F \Delta T_{ln} = \dot{m} C_p (60 - T_{ow})$$

$$(190)\, A_i \cdot \underset{1.0}{F} \frac{(60-27) - (T_{ow}-27)}{\ln \frac{60-27}{T_{ow}-27}} = \rho A V C_p (60 - T_{ow})$$

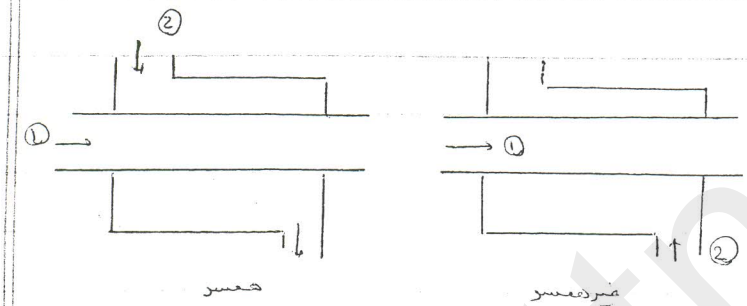
طراحی مبدل‌ها :

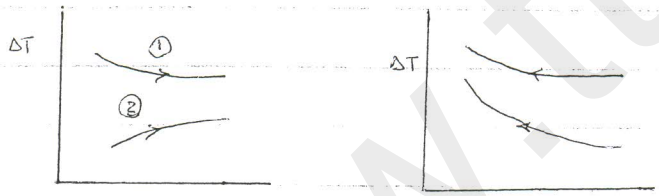
۱- روش LMTD

2- روش ϵ-NTU

ضریب تصحیح

$$q = UAF\Delta T_{LMTD}$$





$$U_1 = \frac{1}{\frac{1}{h_1} + \frac{r_1 \ln \frac{r_2}{r_1}}{k_1} + \frac{r_1}{r_2}\frac{1}{h_2}}$$

اثبات ΔT_{log}

$$dq = \dot{m}_c c_c\, dT_c = -\dot{m}_h c_h\, dT_h$$

$$d(T_h - T_c) = -dq\left(\frac{1}{\dot{m}_h c_h} + \frac{1}{\dot{m}_c c_c}\right)$$

$$\Rightarrow \int \frac{d(T_h - T_c)}{T_h - T_c} = -\int U\left(\frac{1}{\dot{m}_h c_h} + \frac{1}{\dot{m}_c c_c}\right) dA$$

$$\Rightarrow \ln \frac{T_{h2} - T_{c2}}{T_{h1} - T_{c2}} = -UA\left(\frac{1}{\dot{m}_h c_h} + \frac{1}{\dot{m}_c c_c}\right)$$

r-hosseini.ir

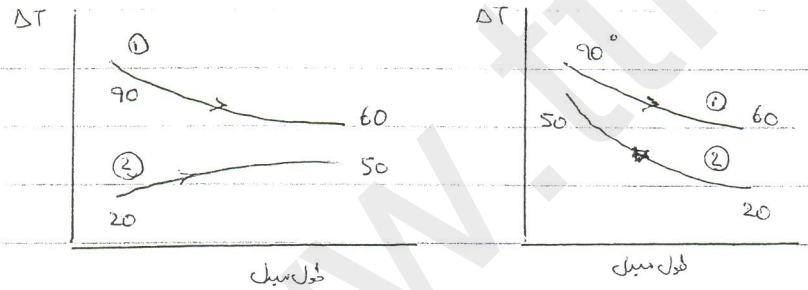
$$q = \dot{m}_h c_h \Delta T = \dot{m}_h c_h (T_{h_2} - T_{h_1})$$
$$\dot{m}_c c_c (T_{c_2} - T_{c_1})$$

$$\Delta T_{ln} = \frac{(T_{h_1} - T_{c_2}) - (T_{h_2} - T_{c_1})}{\ln \frac{T_{h_1} - T_{c_2}}{T_{h_2} - T_{c_1}}} = \frac{\Delta T_{\text{ورودی}} - \Delta T_{\text{خروجی}}}{\ln \frac{\Delta T_{\text{ورودی}}}{\Delta T_{\text{خروجی}}}}$$

اگر دماها بصورتی بودند که نزدیک هم بودند و جواب ۰/۰ شد باید از رابطه‌ی زیر استفاده کنیم:

$$\Delta T_{\text{mathematic}} = \frac{\Delta T_{\text{ورودی}} + \Delta T_{\text{خروجی}}}{2}$$

مثال:



$Q = 300000$ W $\qquad Q = UAF\Delta T_{log}$

$U = 300$ $W/m^2 {}^\circ C$ $\qquad A = ? \longleftarrow F = 1.0$ در مورد همسو غیرهمسو

$A = ?$ زمانی که لوله‌ها پیچ نخورده‌اند

$$\Delta T_{log\,(\text{همسو})} = \frac{(90-20) - (60-50)}{\ln \frac{90-20}{60-50}} = 30.8\,{}^\circ C$$

$$\Delta T_{log\,(\text{غیرهمسو})} = \frac{(90-50) - (60-20)}{\ln \frac{90-20}{60-50}}$$

باهم کم می‌شوند و همواره اختلاف 40° است لذا برای غیرهمسو داریم:

r-hosseini.ir

$\Delta T_{min} = 40^\circ C$ ← غیرمستقیم

حال A ها را محاسبه کرده و هرکدام را که کمتر است چون مواد کمتری مصرف می‌شود لذا از مبدل غیرمستقیم استفاده می‌کنیم.

چون در روش اول نیاز به هر سه دما است و دماهای خروجی بدست می‌آید. لذا داشتن این دماها مشکل است به همین دلیل از روش ϵ-NTU استفاده می‌شود.

$$\epsilon \longrightarrow \quad \text{ضریب موثر بودن} = \frac{q_{\text{واقعی}}}{q_{max}}$$

$$\dot{m} C_{p_{\text{سیال ①}}} = C_{①} \qquad \dot{m} C_{p_{\text{سیال ②}}} = C_{②}$$

در این روش دبی و ورودی‌های ورودی را به ما می‌دهند. از دو مقدار C بالایی کمتر است و min و max

در این جا تعریف می‌شود:

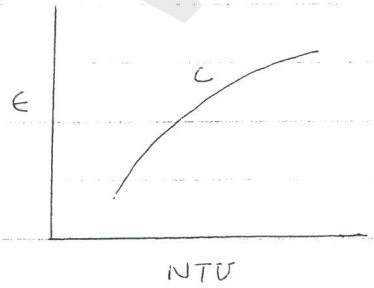
$$C = \frac{C_{min}}{C_{max}}$$

بر این اساس ϵ تعریف می‌شود:

$$\epsilon = \frac{\dot{m}(C_p)_1 \Delta T_1}{C_{min}(\Delta T_{max})} = \frac{\dot{m}(C_p)_2 \Delta T_2}{C_{min}(\Delta T_{max})}$$

$$NTU \quad \text{number of Transfer Unit} = \frac{AU}{C_{min}}$$

تعداد شمارش انتقال حرارت



r-hosseini.ir

مثال ۵:

water $\dot{m} = 0.05\ kg/s$ $T_i = 400\ K$ $T_o = 330\ K$

air $\dot{m} = 0.75\ kg/s$ $T_i = 300\ K$

$U = 200\ W/m^2\text{-}K$ $A = ?$

۱- مبدل Cross-flow دو سیال با مخلوط اند «unmixed»

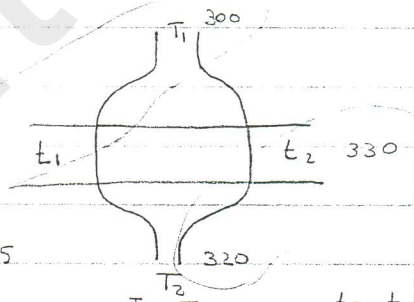
۲- مبدل لوله‌ای غیرمستقیم

LMTD $\longrightarrow$ $q = UAF\Delta T_{lm} \Rightarrow q = \dot{m} C_p \Delta T)_{\text{آب}} = 0.05(4180)(400-330)$

$q = 14630$

$14630 = q = \dot{m} C_p \Delta T)_{\text{هوا}} = 0.75(1000)(T_{ao} - 300) \Rightarrow$

$\Rightarrow T_{ao} = 320\ K$



$$\begin{cases} R = \dfrac{300-320}{330-400} = 0.286 \\ P = \dfrac{330-400}{300-400} = 0.7 \end{cases} \Rightarrow F = 0.95$$

$R = \dfrac{T_1 - T_2}{t_2 - t_1}$, $P = \dfrac{t_2 - t_1}{T_1 - t_1}$

$14630 = 200(0.95)(A)(39.71)$ (شکل 10-10 کتاب)

$$\Delta T_{log} = \frac{(400-300)-(330-320)}{\ln \dfrac{400-300}{330-320}} = 39.71\ K$$

$\Longrightarrow A = 1.9\ m^2$

r-hosseini.ir

نوع هیدل	LMTD A	ε-NTU
cross flow	1.9	1.81
غیرهمسو لوله‌ای	1.8	1.4
یک پوسته و لوله		1.67

ε-NTU

$$\dot{m}c_p)_{water} = (0.05)(4180) = 209 = C_{min} \qquad \dot{m}c_p)_{air} = (0.75)(1000) = 750 = C_{max}$$

$$C = \frac{209}{750} = 0.28$$

$$NTU = \frac{AU}{C_{min}} = ? \qquad \text{از نمودار} \Longrightarrow 1.75$$

$$\epsilon = \frac{q_{واقعی}}{q_{max}} = \frac{(400-330)}{400-300} = 0.7$$

اختلاف دمای max در دو سری جابجایی می‌باشد چون در خروجی‌ها نمی‌رسند اختلاف آن حاکم است.

$$1.75 = \frac{A(200)}{209} \Longrightarrow A = 1.81$$

غیرهمسو $NTU = 1.3 \Longrightarrow 1.3 = \frac{A(200)}{209} \Longrightarrow A = 1.4$

— (10-13)

درصورت سعی و خطا بهتر است از جداول (10-3) و (10-4) استفاده شود

$\boxed{1.8\ m^2}$ ← به فضا بستگی دارد

$$\pi DL = 1.8 \Longrightarrow \pi\left(\frac{2.5}{100}\right)L = 1.8 \Longrightarrow L = 23\ m$$

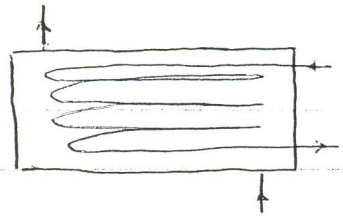
← غیرمنطقی برای اتومبیل است.

پوشال کوار در واقع mixed است ولی رادیاتورها unmixed هستند.

r-hosseini.ir

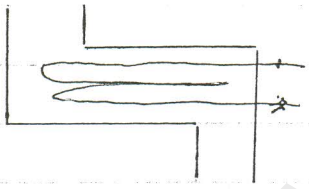
$0.5\pi\left(\frac{2.5}{100}\right)n = 1.9 \Longrightarrow n = 50$ تعداد لوله ها

طول لوله ها



$NTU = 1.6 \Longrightarrow \frac{A(200)}{209} = 1.6 \Rightarrow A = 1.67$

$0.5\pi\left(\frac{2.5}{100}\right)n = 1.67 \Rightarrow n =$



مبدل پوسته لوله

$A = 10\,m^2$

① To heat water

$T_{c\,in} = 15\,^\circ C$

$T_{c\,out} = ?$

$\dot{m}_c = 2\ kg/s$

چون دمای ورودی را نداریم لذا فقط از ϵ-NTU می توان استفاده نمود.

② آب گلیکول:

$c_p = 2600\ J/kg\cdot K$

$T_{hi} = 85\,^\circ C$

$T_{h\,out} = ?$

$\dot{m}_h = 1\ kg/s$

$U = 500\ W/m^2\,^\circ C$

$\dot{m}c_p)_h = 1(2600) = 2600 \quad C_{min}$

$\dot{m}c_p)_c = 2(4180) = 8360 \quad C_{max}$

$C = \frac{C_{min}}{C_{max}} = \frac{2600}{8360} = 0.31$

$\Longrightarrow \epsilon = 0.75$

transver انتقال

$NTU = \frac{AU}{C_{min}} = \frac{10(500)}{2600} = 1.9$

$q_{max} = C_{min}(85-15)$

$= 182000$

15

r-hosseini.ir

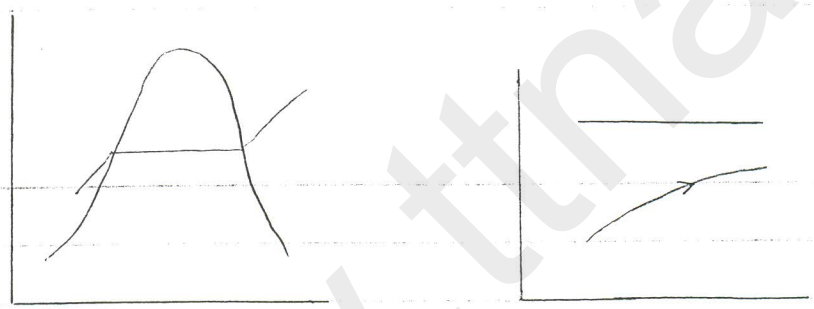
$$\epsilon = \frac{q_{\text{واقعی}}}{q_{max}} = \frac{26000\,(85 - T_{hout})}{182000} = \frac{8360\,(T_{cout} - 15)}{182000}$$

$T_{hout} = 32.5\ ^\circ C$

$T_{cout} = 31.3\ ^\circ C$

اگر مبدل با دریا و رودخانه کار کند $C_{max} \to \infty$ لذا $C \simeq 0$ می شود

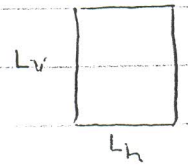
$$C = \frac{C_{min}}{C_{max}} = 0 \longrightarrow$$ در کندانسورها و اواپراتورها



$$\epsilon = 1 - e^{-NTU}$$ درصورتی که C صفر باشد به این وسیله

ϵ مبدل بدست می آید

نکته: به عنوان صفحه ی تخت حساب می شود برای Re که جریان آزاد باشد



$$Nu = C\,Re^{m}\,Pr^{n}$$

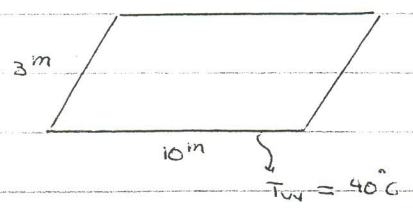
$$Re = \frac{\rho u L}{\bar{V}} \qquad L = \frac{1}{\frac{1}{L_h} + \frac{1}{L_v}}$$

r-hosseini.ir

تعریف قطر هیدرولیکی در مورد اجسام بسته است :

$$D_h = \frac{4A}{P} \qquad R_h = \frac{A}{P}$$

مثال:



$V_\infty = 0.5\ m/s$

$T_\infty = 80\,^\circ C$

هوا $P = 5\,atm$

$$T_f = \frac{80+40}{2} = 60\,^\circ C \qquad \beta = \frac{1}{T_f} = \frac{1}{60+273} = 0.003$$

$C_p = 1000$

$\mu = 2\times10^{-5}$

$Pr = 0.71$

$K = 0.028$

$$\rho = \frac{P}{RT} = \frac{5\times1.0132\times10^5}{(287)(333)} = 5.3$$

$$Re = \frac{\rho V L}{\mu} = \frac{5.3\,(0.5)(10)}{2\times10^{-5}} = 1.32\times10^6$$

می‌توانستیم از رابطه‌ی قبل $\frac{1}{\frac{1}{L_1}+\frac{1}{L_2}}$ استفاده کنیم ولی کاشیها 3m کم است. در این جا چون می‌دانیم آزاد است یا اجباری برای طول بزرگ در نظر می‌گیریم.

$$Gr = \frac{\rho^2 g \beta \Delta T L^3}{\mu^2} = \frac{(5.3)^2(9.8)(0.003)(80-40)(10^3)}{(2\times10^{-5})^2}$$

$$= 8.26\times10^{13}$$

$$Gr/Re^2 = \frac{8.26\times10^{13}}{(1.32\times10^6)^2} = 47.41 \quad \text{آزاد}$$

حال داریم : $L = \frac{1}{\frac{1}{10}+\frac{1}{3}} = 2.31$

r-hosseini.ir

$$Re = \frac{\rho V L}{\mu} = \frac{(5.3)(0.5)(2.31)}{2\times10^{-5}} = 3.1\times10^{5}$$

$$Gr = \frac{\rho^2 g \beta \Delta T L^3}{\mu^2} = \frac{(5.3)^2(9.8)(0.003)(80-40)(2.31)^3}{(2\times10^{-5})^2} = 4.41\times10^{11}$$

$$\frac{Gr}{Re^2} = \frac{4.4\times10^{11}}{(3.1\times10^{5})^2} = 4.6 \gg 1$$ آزاد

$$Nu = C\,Ra^{n}$$

$$Ra = Gr \cdot Pr = 4.4\times10^{11}\times0.7 = 0.3\times10^{12} > 10^{9}$$ توربولانت

جدول ۲-۷ هولمن $\Rightarrow h = \underbrace{1.52(\Delta T)^{1/3}}_{\text{فشار استوانه}} \underbrace{\left(\frac{P}{101.32}\right)^{2/3}}_{\text{فشار اتمسفر}} = 1.52(80-40)^{1/3}\left(\frac{5\times101.32}{101.32}\right)^{2/3}$

$$= 15.2$$

$$Nu = 0.15\,(4.4\times10^{11}\times0.7)^{1/3} \Rightarrow Nu = 1013$$

$$h = \frac{Nu\,K}{L} = \frac{1013\,(0.028)}{2.31} = 12.3$$

فشار فقط تاثیرش روی ρ است و باید از جداول μ را باید انتخاب کنیم چون

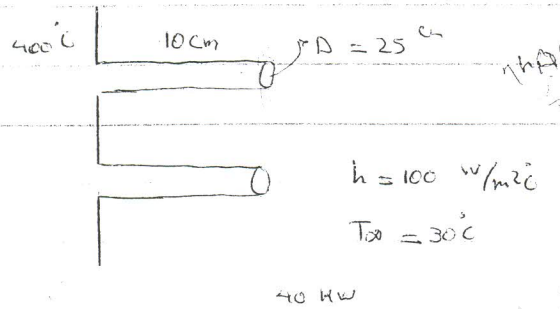
$$\nu = \frac{\mu}{\rho}$$

در فشار، تاثیر نمی‌کند

r-hosseini.ir

سروش صادق نژاد
۸۴۲۶۰۵۷

مثال: سطحی با دمای 400°C اگر تعدادی پین به قطر 2.5cm و طول 10cm با راندمان 80 درصد استفاده شده باشد اگر دمای محیط 30°C با ضریب جابجایی 100 W/m²°C و انتقال حرارتی کل برابر با 40KW باشد تعداد پین ها را بیابید.



$q_{fin} = kAm\theta_b \tanh mL_c$

$q_{max} = hpL\theta_b$

$L_c = L + r/2 = 1.25 + 1 = 1.25$ cm

$\eta = \frac{\tanh mL_c}{mL_c} \Rightarrow 0.8 = \frac{\tanh m \times 1.25}{1.25 \times m} \Rightarrow$ با محاسبه m و k هم بدست می آید

$$\eta_0 = \left[1 - \frac{A_f}{A_t}(1-\eta_f)\right] = \left[1 - \frac{n[\pi DL + \pi D^2/4]}{A_f + [1 - \pi D^2/4]}(1-\eta_f)\right] = \frac{q_T}{hA_t\theta_b}$$

$$\frac{40000}{100 \times [\pi DL + \pi D^2/4] + [1 - \pi D^2/4]} = 1 - \frac{n[\pi DL + \pi D^2/4]}{A_f + [1 - \pi D^2/4]}(1-\eta_f)$$

n

با حل این رابطه و با معلوم بودن داده ها n محاسبه می گردد

1/2

r-hosseini.ir

$$q_{total} = n\, q_{fins} + q_{unfin} = n\eta h A_s \theta_b + (A_t - A_f) h \theta_b$$

$$n\eta h \theta_b \left(\frac{\pi D^2}{4} + \pi D L \right) + \left(A_t - n \left(\frac{\pi D^2}{4} + \pi D L \right) \right) h \theta_b$$

$$= q_{total} \Rightarrow \quad \underline{400 \times 10^3} = n \left[0.8 \times 370 \times 100 \left(\frac{\pi}{4} \left(\frac{25}{100} \right)^2 + \pi \left(\frac{25}{100} \right) \left(\frac{10}{100} \right) \right) \right]$$

$$+ \left(1 - \underbrace{n \left(\frac{\pi}{4} \left(\frac{25}{100} \right)^2 + \pi \left(\frac{25}{100} \right) \left(\frac{10}{100} \right) \right)}_{0.13} \right) 100 \times 370$$

$$(1 - 0.13n) \times 100 \times 370 + n\, 3848 = \boxed{3848n} + 37000 - \boxed{4810n}$$

www.ttnar.ir

r-hosseini.ir

سروش صادق نژاد — «بنام خدا» — تمرین انتقال حرارت

۸۴۲۶۰۵۷

عایق	$\dot{q}''' = 100000\ W/m^3$ $k_1 = 73\ W/m\,^\circ C$	– $k_2 = 10\ W/m\,^\circ C$	$h = 10\ W/m^2\,^\circ C$ $T_\infty = 20^\circ C$

$x=0$ $\quad x=10\,cm$ $\quad x=12\,cm$

فرضیات: ۱- مسأله پایا

۲- مسأله یک بعدی

$$\frac{d^2T}{dx^2} + \frac{\dot{q}'''}{k} = \frac{1}{\alpha}\frac{dT}{dt}$$

پایا

قسمت اول: $\frac{d^2T_1}{dx^2} + \frac{\dot{q}'''}{k} = 0 \Rightarrow \frac{dT_1}{dx} = \frac{-\dot{q}'''}{k_1}x + C \xrightarrow[\frac{dT_1}{dx}=0]{x=0} \boxed{C=0}$

$$T_1(x) = \frac{-\dot{q}'''}{2k_1}x^2 + D$$

قسمت دوم: $\frac{d^2T_2}{dx^2} = 0 \Rightarrow \frac{dT_2}{dx} = a \Rightarrow T_2(x) = ax + b$

شرایط مرزی: $x = 10\,cm \Rightarrow \dot{q}''_1 = \dot{q}''_2 \qquad x = 12\,cm \Rightarrow \dot{q}''_1 = \dot{q}''_2$

$T_1 = T_2$

$x = 10\,cm \Rightarrow T_1 = T_2 \Rightarrow -\frac{10^5}{2\times 73}(0.1)^2 + D = a(0.1) + b$ ①

$q_1 = q_2 \Rightarrow 73\times\frac{-10^5}{73}(0.1) = a\times 10$ ②

$\Rightarrow a = -1000$

r-hosseini.ir

$x = 12\ cm \Rightarrow q''_1 = q''_2 \Rightarrow h(T_w - T_\infty) = -k_2 \frac{dT}{dx} \Rightarrow$

$-a \times k_2 = h(a(0.12) + b - 20) \Rightarrow$

$1000 \times 10 = 10(-1000 \times 0.12 + b - 20) \Rightarrow b = 1140$

$-\frac{10^5}{2 \times 73}(0.1)^2 + D = -1000 \times (0.1) + 1140 \Rightarrow D = 1046.85$

$T_1(x) = -\frac{10^5}{2 \times 73} x^2 + 1046.85 = -684.9\, x^2 + 1046.85$

$T_2(x) = -1000\, x + 1140$

10

www.ttnar.ir

r-hosseini.ir

۱/۸

«بنام خدا»

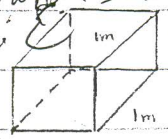
سروش صادق نژاد
۸۴۲۶۰۵۷

یک قالب یخ $1\times1\times1\ m^3$ را در حالتی که دمای آن $T_F = 0^\circ C$ است در نظر می‌گیریم:

۱- یخ در معرض محیط با $h = 15\ \frac{W}{m^2 C}$ با $T_\infty = 10^\circ C$ است. بدون در نظر گرفتن تشعشع زمان لازم برای آب شدن یخ را بیابید.

۲- یخ در معرض محیط با $h = 15\ \frac{W}{m^2 C}$ با $T_\infty = 10^\circ C$ است. با در نظر گرفتن $T_{sky} = +10^\circ C$ زمان لازم برای آب شدن یخ را بیابید.

۳- گونی به ضخامت 1mm به دور یخ پیچیده شده است که در این حالت $K_{گونی} = 0.06$ و دمای گونی $10^\circ C$ است. زمان لازم برای آب شدن یخ را بیابید.



۱- فرضیات: از تشعشع صرف نظر می‌شود. باتوجه به این که دمای یخ صفر درجه و دمای محیط $10^\circ C$ است بنابراین انتقال حرارت همرفتی بین محیط و یخ در پنج سطح صورت می‌گیرد و چون انرژی برداری نیست و قابل جمع شدن در جهات مختلف است لذا کافی است انتقال حرارت یک سطح را محاسبه نموده و در پنج ضرب کنیم. (با در نظر گرفتن $L_{F_{آب}} = 333\ \frac{kJ}{kg}$)

$$\dot{E}_{in} - \dot{E}_{out} + \dot{E}_{gen} = \dot{E}_{st} \Rightarrow \dot{E}_{in} = \dot{E}_{store}$$

$$\Rightarrow hA(T_\infty - T_w) = \dot{m} L_F \Rightarrow 15 \times 5 \times 1 \times 1\ (10-0) = \dot{m} L_F$$

$$\rho_{\text{یخ}} = 920\ \frac{kg}{m^3} \Rightarrow \dot{m} = 2.25 \times 10^{-3}\ \frac{kg}{s} \Rightarrow t = \frac{10^3 \times 1 \times 1 \times 1 \times 920}{2.25} = 113.6\ h$$

۲- حال باتوجه به وجود تشعشع بین محیط و یخ چون دمای یخ بیشتر از محیط است لذا یک انتقال حرارت تشعشعی از یخ به محیط صورت می‌گیرد با فرض یخ جسم سیاه داریم: (چون $\varepsilon_{\text{یخ}} = 0.99 \simeq 1$)

r-hosseini.ir

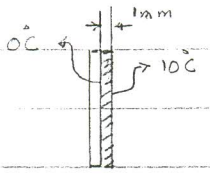
$$\dot{E}_{in} - \dot{E}_{out} + \dot{E}_{gen} = \dot{E}_{store} \Rightarrow hA(T_\infty - T_w) - \varepsilon\sigma A(T_1^4 - T_2^4) = m L_f$$

$$\Rightarrow 15 \times 5 \times 1 \times 1 \times (10-0) - 1 \times 5.667 \times 10^{-8} \times 5 \times 1 \times 1 \times (273^4 - 263^4) = m L_f$$

$$\Rightarrow 750 - 218.24 = m L_f \Rightarrow t = 160\ h$$

۳. با توجه به این که یخ با گرمای به ضخامت 1mm پیچیده شده است و دمای گرمای 10°C است لذا هیچ گونه انتقال حرارت همرفتی بین سیال داخل و گرمای اتفاق نمی افتد چون دمای هر دو 10°C است همچنین هیچ گونه انتقال حرارت تشعشعی نیز وجود ندارد پس داریم:

$$\dot{E}_{in} - \dot{E}_{out} + \dot{E}_{gen} = \dot{E}_{store} \Rightarrow KA\frac{\Delta T}{\Delta x} = m L_f$$



$$5 \times 0.06 \times 1 \times 1 \times \frac{(10-0)}{10^{-3}} = m L_f \Rightarrow 3000 = m L_f$$

$$\Rightarrow \dot{m} \simeq 9 \times 10^{-3}\ \frac{kg}{s} \Rightarrow t \simeq 28.36\ h$$

مشاهده می شود که با پیچیدن گرمای به دور یخ، یخ زودتر آب می شود و در حالت اول نیز از حالت دوم یخ سریعتر آب می شود.

www.ttnar.ir