

ECOLE NATIONALE SUPÉRIEURE DES MINES DE SAINT-ETIENNE

Systemes Dynamiques

+ Application à la mécanique des fluides

Document rédigé par Olivier BONNEFOY
Mail : bonnefoy@emse.fr

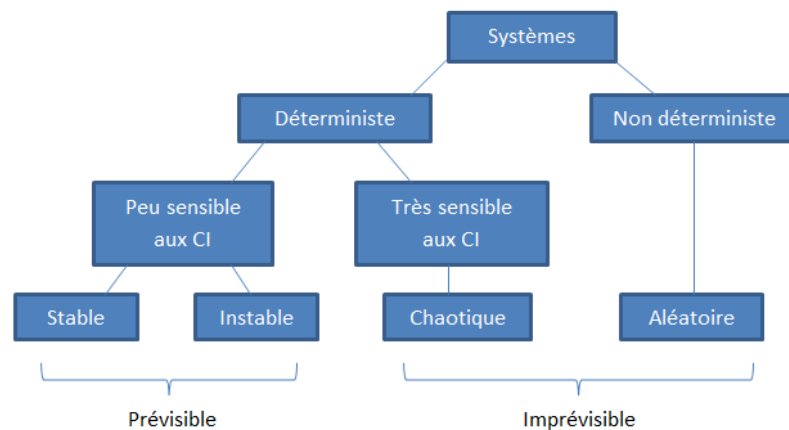
Version : 1.1 du 4 mars 2019
Dernière version : [ici](#)

Une mise à jour de ce document peut être téléchargée sur :
<http://www.emse.fr/~bonnefoy/Public/SD-EMSE.pdf>

Introduction

Le présent document est une courte introduction aux systèmes dynamiques et à l'analyse de leur stabilité destinée aux étudiants de l'Ecole Nationale Supérieure des Mines de Saint-Etienne.

Un système peut être vu de façon différente selon sa nature déterministe ou non, sa sensibilité aux conditions initiales (CI) ou sa stabilité (voir figure). Il peut très bien être instable et pourtant être prévisible. Dès que son évolution n'est plus régie par des lois déterministes ou, que de sa sensibilité aux conditions initiales naît le chaos, le système devient imprévisible.



Un système dynamique est un système qui évolue dans le temps de manière causale et déterministe.

L'étude de la stabilité des systèmes dynamiques se révèle précieuse dans un grand nombre de contextes dont :

- nucléaire : emballement d'un réacteur de fission ou extinction d'un plasma confiné (réacteur de fusion)
- chimie : emballement d'un réacteur homogène (Bhopal) ou hétérogène (torréfaction bois)
- biologie : systèmes proies-prédateurs (=ressources-consommateurs)
 - prévision des ressources halieutiques : sardine contre thon (risque d'extinction d'une espèce de poisson. La surpêche d'une espèce modifie/rompt l'équilibre sardine-thon)
 - systèmes biologiques à évolution rapide : cellule contre virus (+ou- virulent) et antibiotique contre bactérie (+ou- résistante)
- contrôle-commande : stabilité de la trajectoire d'une fusée, d'un satellite, d'un avion, ...
- mécanique des fluides : instabilités variées (Saffman-Taylor, Rayleigh-Bénard, Marangoni, Taylor-Couette, Kelvin-Helmholtz, ...)

Bonne lecture.

Olivier Bonnefoy

Introduction

Nota Bene : ce document est en cours d'élaboration. Il peut évidemment comporter des inexactitudes ou des erreurs. Merci de bien vouloir en avertir l'auteur (bonnefoy@emse.fr). Il vous en sera reconnaissant et intégrera vos remarques dans les mises à jour (voir adresse en couverture).



FIGURE 1 – Rides de sable causées par le transport éolien.

Table des matières

1	Systèmes dynamiques discrets	1
1.1	Définitions	1
1.2	Un attracteur unique	1
1.3	Deux attracteurs	2
1.4	Généralisation	3
1.5	Apparition du chaos	3
1.6	Caractérisation de la sensibilité aux conditions initiales	4
1.6.1	Exposant de Lyapounov	5
1.6.2	Horizon de Lyapounov	5
2	Systèmes dynamiques continus	7
2.1	Définitions	7
2.1.1	Système dynamique et loi de comportement	7
2.1.2	Espace des phases et trajectoire	8
2.1.3	Portrait de phase	8
2.1.4	Ensembles limites	8
2.1.4.1	Point fixe	8
2.1.4.2	Cycles limites	8
2.1.4.3	Ensemble fractal = attracteur étrange	9
2.2	Analyse de stabilité autour d'un attracteur	9
2.2.1	Linéarisation	9
2.2.2	Méthode des perturbations	10
2.2.3	Etude de stabilité d'un système dynamique linéaire 2D	10
2.2.4	Cartographie des types de points fixes en dimension 2	11
2.3	Bifurcations	11
2.3.1	Bifurcation noeud-col	12
2.3.2	Bifurcation Fourche	13
2.3.3	Bifurcation de Hopf	14
2.3.4	Scénarios de déstabilisation en dimension 3	14
2.4	4ème séance	15
2.4.1	Systèmes linéaires	15
2.4.2	Systèmes non linéaires (partie à affiner/compléter)	16
3	Exemples	19
3.1	Le pendule amorti	19
3.2	Un système quelconque	21
3.2.1	Recherche des points fixes	21
3.2.2	Etude de leur stabilité	22
3.2.3	Diagramme de bifurcation	22
3.3	L'attracteur de Lorentz (effet papillon)	22
3.3.1	Points fixes	23
3.3.2	Stabilité des points fixes	23

3.4	L'instabilité de Rayleigh-Plateau	25
3.4.1	Complément	29
3.5	L'oscillateur de Van der Pol	29
3.6	Systèmes proies-prédateurs	30
3.7	Illustrations	30
4	Annexe	33
4.1	Méthode des caractéristiques	33
4.2	Loi de Laplace	35
4.2.1	Considérations géométriques	35
4.2.1.1	Dimension 2	35
4.2.1.2	Dimension 3	35
4.2.2	Exemple des surfaces de révolution	36
4.2.3	Loi de Laplace	36
4.3	Fonctions de Bessel modifiées	37

Chapitre 1

Systèmes dynamiques discrets

Ce chapitre est construit autour d'un exemple précis et introduit les notions fondamentales.

Dans ce qui suit, nous allons nous intéresser aux systèmes discrets car ceux-ci sont plus facilement manipulables d'un point de vue mathématique. Plus précisément, nous allons étudier le système régi par les équations suivantes :

$$u_{n+1} = f(u_n) \quad \text{avec} \quad f(x) \equiv r.x.(1-x) \quad \text{et} \quad \begin{cases} r & \in [0; 4] \\ u_0 & \in [0; 1] \end{cases} \quad (1.1)$$

Il s'agit d'un modèle de population (voir par exemple les modèles du chercheur belge Verhulst qui a étudié les fonctions logistiques, ...) :

- si u_0 est faible, la croissance est exponentielle
- si u_0 est élevé, la population étant importante pour le même espace ou la même quantité de nourriture, il y a décroissance.

La figure 1.1 donne l'allure de la suite (u_n) : il s'agit d'une courbe en cloche centrée sur $x = \frac{1}{2}$.

1.1 Définitions

Adoptons ici quelques définitions pour clarifier la présentation :

- une **orbite**, ou **trajectoire**, est l'ensemble des itérés $\{x_0, x_1, \dots\}$
- la fonction f possède un **cycle d'ordre** p s'il existe un terme x_0 tel que les itérés de f reviennent à la valeur de départ au bout de p itérations. Exemple : le [chat d'Arnold](#) défini [ici](#). Un cycle d'ordre p est qualifié d'**attractif** lorsque f possède un cycle d'ordre p et que $\forall i < p$, la suite $(u_{n.p+i})$ converge.
- un **point fixe** est un cycle périodique d'ordre $p = 1$
- il y a une **bifurcation** lorsque les attracteurs changent de nombre ou de nature (stable/instable)

1.2 Un attracteur unique

Etudions le cas où $r = 2,8$. A l'aide de l'application internet accessible [ici](#), on obtient le graphique ?? sur lequel on constate que la suite (u_n) converge vers un point fixe, c'est-à-dire vers une valeur x^* telle que $f(x^*) = x^*$. Ici, il y a deux points fixes. Le premier point fixe est $x^* = 0$ et le deuxième $x^* = 9/14$. Le graphique suggère que le premier est instable et le deuxième stable.

Pour confirmer notre intuition, nous allons présenter la méthodologie à appliquer pour étudier la stabilité d'un point fixe x^* quelconque. Pour x_n proche de x^* , un développement limité de la fonction f donne :

$$f(x_n) \approx f(x^*) + f'(x^*) \cdot (x_n - x^*)$$

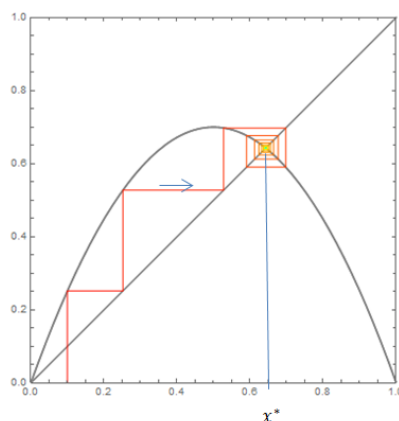


FIGURE 1.1 – Illustration d'un cycle d'ordre 1 (un attracteur unique).

Puisque $f(x_n) = x_{n+1}$ et $f(x^*) = x^*$, on a l'égalité suivante :

$$f'(x^*) = \frac{x_{n+1} - x^*}{x_n - x^*}$$

Deux cas se présentent alors :

- Si $|f'(x^*)| < 1$, alors le point x_{n+1} est plus proche de x^* que ne l'était x_n : la suite revient vers x^* qui est stable
- Si $|f'(x^*)| > 1$, alors le point fixe est instable, répulsif.

Dans notre cas où $f(x) \equiv r.x.(1-x)$, on montre facilement que les deux points fixes de f sont $x^* = 0$ ou bien $x^* = 1 - 1/r$. La dérivée de f est la fonction $f'(x) = r.(1-2x)$. Sa valeur est égale à r pour le premier point fixe et à $2-r$ pour le deuxième.

Pour $r = 2,8$, les deux points fixes sont $x^* = 0$ et $x^* \approx 0,643$. La valeur absolue de la dérivée vaut 2,8 pour le premier point fixe et 0,8 pour le deuxième. On en déduit que le premier point fixe est instable et que le deuxième est stable. On peut étendre ce raisonnement. Pour $0 < r < 3$, la suite (u_n) admet un point fixe attractif.

1.3 Deux attracteurs

Etudions désormais le cas où $r = 3,14$. On observe l'apparition d'un cycle de période 2, c'est-à-dire qu'après deux itérations, on retombe (presque) sur le même point. La suite (u_n) oscille entre deux valeurs x_1^* et x_2^* . La paire (x_1^*, x_2^*) est un attracteur de période 2. Toute trajectoire s'approche asymptotiquement du cycle d'ordre 2 composé de ces deux points mais ne les atteindra jamais.

Pour traduire mathématiquement qu'on revient à la valeur initiale au bout de deux itérations, on peut écrire que $f(f(x_i^*)) = x_i^*$. En d'autres termes, la paire (x_1^*, x_2^*) est un attracteur d'ordre 2 si et seulement si les points x_1^* et x_2^* sont des points fixes stables de $g(x) \equiv f^{(2)}(x)$ c'est-à-dire qu'ils sont solutions de l'équation $g(x) = x$ et que $|g'(x)| > 1$.

Ici $g(x) = r.[rx(1-x)].[1 - (rx(1-x))]$ soit $g(x) = -r^2.[r.x^4 - 2r.x^3 + (r+1).x^2 - x]$. Pour $r = 3,14$, on trouve avec Matlab quatre racines qui sont 0, 0,5380, 0,6815 et 0,7805. La stabilité de ces points fixes de g est donnée par la valeur absolue de $g'(x)$. Ici, $g'(x^*) = -r^2.[4r.x^3 - 6r.x^2 + 2(r+1).x - 1]$. La valeur absolue de g' en ces points est respectivement 9,86, 0,4204, 1,30 et 0,4204. Cette valeur est inférieure à l'unité pour

la deuxième et quatrième racines. Par conséquent, seules ces deux racines sont stables. On peut étendre ce raisonnement. Pour $3 < r < 3,44948\dots$, la suite (u_n) admet un cycle attractif d'ordre 2.

1.4 Généralisation

Les deux exemples précédents montrent qu'il y a un attracteur (cycle d'ordre 1) pour $0 < r < 3$ et deux attracteurs (cycle d'ordre 2) pour $3 < r < 3,44948$. Il s'agit d'une bifurcation car le nombre d'attracteurs passe de 1 à 2 lorsque le paramètre r traverse la valeur $r_1 = 3$.

Une extension des résultats indique qu'il s'agit en fait d'un **dédoublment de période**. Lorsque le paramètre r traverse certaines valeurs particulières r_i , un cycle d'ordre p laisse la place à un cycle d'ordre $2p$.

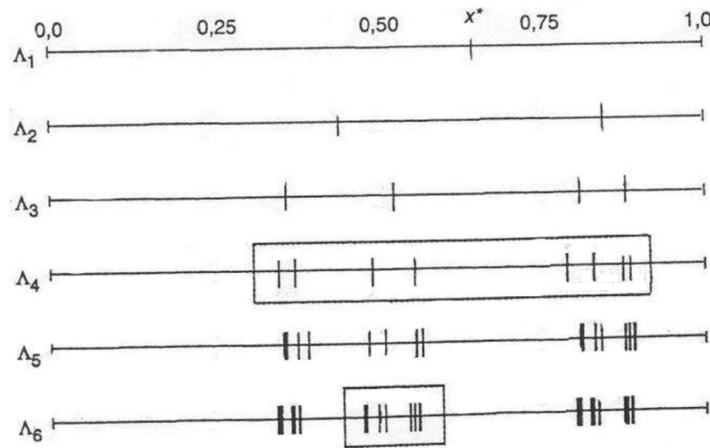


FIGURE 1.2 – Graphique donnant les attracteurs.

Sur le graphique 1.2, les traits verticaux de la ligne Λ_i indiquent la valeur des points fixes de la fonction $f^{(2^{i-1})}$. Le dédoublment de période présenté ci-dessus se manifeste de la façon suivante : un point sur la ligne Λ_i donne deux points sur la ligne Λ_{i+1} . Par ailleurs, on peut noter que, à une inversion droite-gauche près, la structure de chaque amas local de points est similaire à celle de l'amas global mais à plus petite échelle (le facteur de compression est la première constante de Feigenbaum $\alpha \approx 2,5029$). Il s'agit d'une **structure fractale**.

On peut montrer que la suite (r_n) des valeurs auxquelles s'opèrent les bifurcations converge vers une valeur limite :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} r_n = r_c \approx 3,5699456$$

Plus précisément, on peut montrer que cette convergence vers r_c est régulière au sens où :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{r_n - r_{n-1}}{r_{n+1} - r_n} = \delta \approx 4,669201$$

Cette valeur δ est la deuxième constante de Feigenbaum. Cela signifie que l'écart entre deux valeurs successives de r_n diminue de façon géométrique. On passera ainsi à huit attracteurs lorsque r dépasse $r_3 \approx 3,55$, seize attracteurs lorsque r dépasse $r_4 \approx 3,57$, trente-deux attracteurs lorsque r dépasse $r_5 \approx \dots$

1.5 Apparition du chaos

Tant que r est inférieur à r_c , les attracteurs sont bien identifiés (même si ils restent difficilement distinguables à l'oeil nu sur un graphique). En revanche, pour $r > r_c$ (par exemple pour $r = 3,58$), l'application [web](#) montre

l'apparition du chaos : il n'y a pas d'ordre apparent. Il existe toutefois un "attracteur étrange" : une réunion de sous-intervalles denses de $[0; 1]$. Il existe cependant des fenêtres (par exemple autour de $r = 3,63$) dans lesquelles le comportement chaotique cesse brusquement et l'attracteur prend de nouveau la forme d'un cycle périodique.

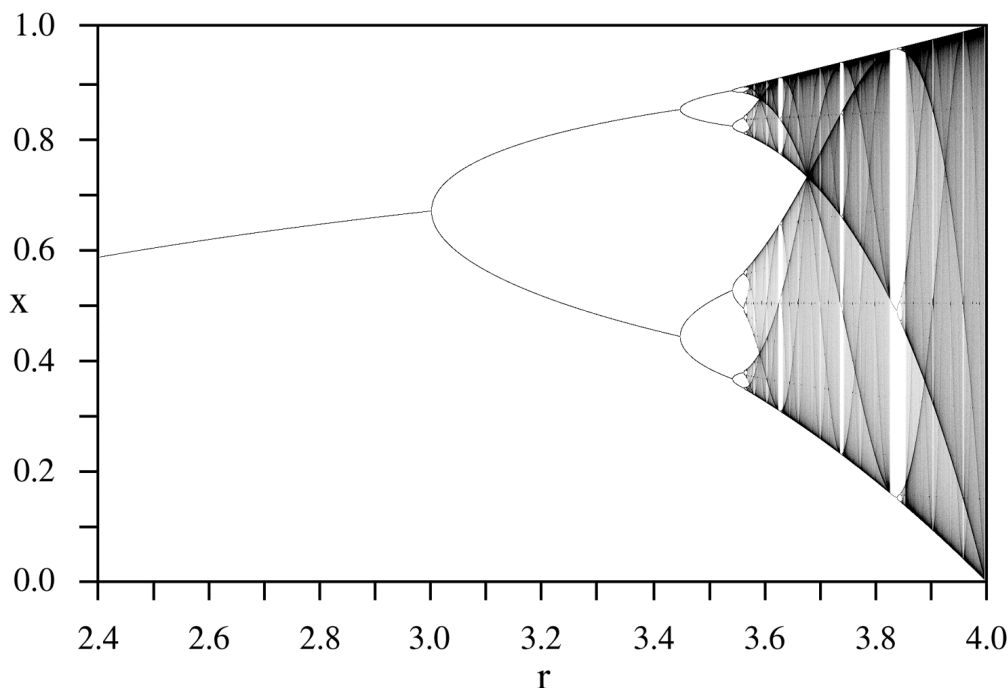


FIGURE 1.3 – Diagramme de bifurcation

1.6 Caractérisation de la sensibilité aux conditions initiales

D'une certaine manière, l'analyse de stabilité réalisée précédemment (comparaison de $|f'(x)|$ à l'unité) est un peu grossière. Considérons les orbites issues de deux conditions initiales proches (x_0 et $x_0 + \varepsilon_0$) et évaluons l'écart entre les deux orbites. Cet écart est mesuré par le ratio $\varepsilon_n/\varepsilon_0$.

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Première orbite :} \quad x_0 \quad x_1 \quad x_2 \quad \dots \quad x_n \quad \dots \\ \text{Deuxième orbite :} \quad x_0 + \varepsilon_0 \quad x_1 + \varepsilon_1 \quad x_2 + \varepsilon_1 \quad \dots \quad x_n + \varepsilon_n \quad \dots \end{array} \right. \quad (1.2)$$

Un développement limité de f conduit à :

$$f(x_0 + \varepsilon_0) \approx f(x_0) + \varepsilon_0 \cdot f'(x_0)$$

Puisque $f(x_0 + \varepsilon_0) = x_1 + \varepsilon_1$ et $f(x_0) = x_1$, on peut écrire $\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_0} = f'(x_0)$. Par analogie, on a $\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} = f'(x_1)$ et par extension, on trouve :

$$\frac{\varepsilon_n}{\varepsilon_0} = \frac{\varepsilon_n}{\varepsilon_{n-1}} \cdot \dots \cdot \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} \cdot \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_0} = \prod_{i=1}^n f'(x_{i-1})$$

On pressent que la suite $\left(\frac{\varepsilon_n}{\varepsilon_0}\right)$ converge vers 0 ou diverge, selon que $f'(x_{i-1})$ est inférieur ou supérieur à 1, c'est à dire selon le signe de $\ln(f'(x_{i-1}))$.

1.6.1 Exposant de Lyapounov

On définit la suite (λ_n) comme la valeur moyenne des n premières valeurs de $\ln(f'(x_{i-1}))$:

$$\lambda_n \equiv \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \ln(f'(x_{i-1}))$$

et l'on définit l'exposant de Lyapounov λ comme sa limite :

$$\lambda \equiv \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n \quad (1.3)$$

Par construction, on a :

$$\frac{\varepsilon_n}{\varepsilon_0} = \exp \left(\ln \left(\prod_i f'(x_{i-1}) \right) \right) = \exp(n \cdot \lambda_n)$$

Par conséquent, l'écart entre les deux orbites tend vers :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\varepsilon_n}{\varepsilon_0} = \exp(n \cdot \lambda) \quad (1.4)$$

Si l'exposant de Lyapounov est négatif ($\lambda < 0$), alors les deux orbites convergent l'une vers l'autre : le système est peu sensible aux conditions initiales. On dit qu'il est stable au sens de Lyapounov. S'il est positif, alors les trajectoires, très proches au départ, s'éloignent irrémédiablement l'une de l'autre, à une vitesse déterminée par λ . Comme on le voit, l'exposant de Lyapounov est une mesure du degré de stabilité du système.

1.6.2 Horizon de Lyapounov

L'équation 1.4 montre que $\lambda \cdot n$ est sans dimension (car argument d'une exponentielle). Puisque n est homogène à un temps (car associé à une itération supplémentaire), on trouve que λ est homogène à l'inverse d'un temps. Par conséquent, il est légitime de définir **l'horizon (temporel) de Lyapounov** τ d'un système chaotique par l'équation :

$$\tau \equiv \frac{1}{\max(\lambda_{(x_0)})}$$

où $\lambda_{(x_0)}$ est la constante de Lyapounov associé à la condition initiale x_0 . On voit que si $t \ll \tau$, alors le système est prédictible (avec une erreur à l'instant t_n proportionnelle à l'erreur à l'instant t_0). Sinon, il est impossible de prédire le comportement du système. Les prévisions météorologiques en sont l'illustration : au delà d'environ 6 ou 7 jours, les prévisions deviennent trop incertaines. Il s'agit de l'horizon de Lyapounov qui prend sa source dans la nature du système et ne pourra pas être repoussé, même à l'aide d'une puissance de calcul plus importante.

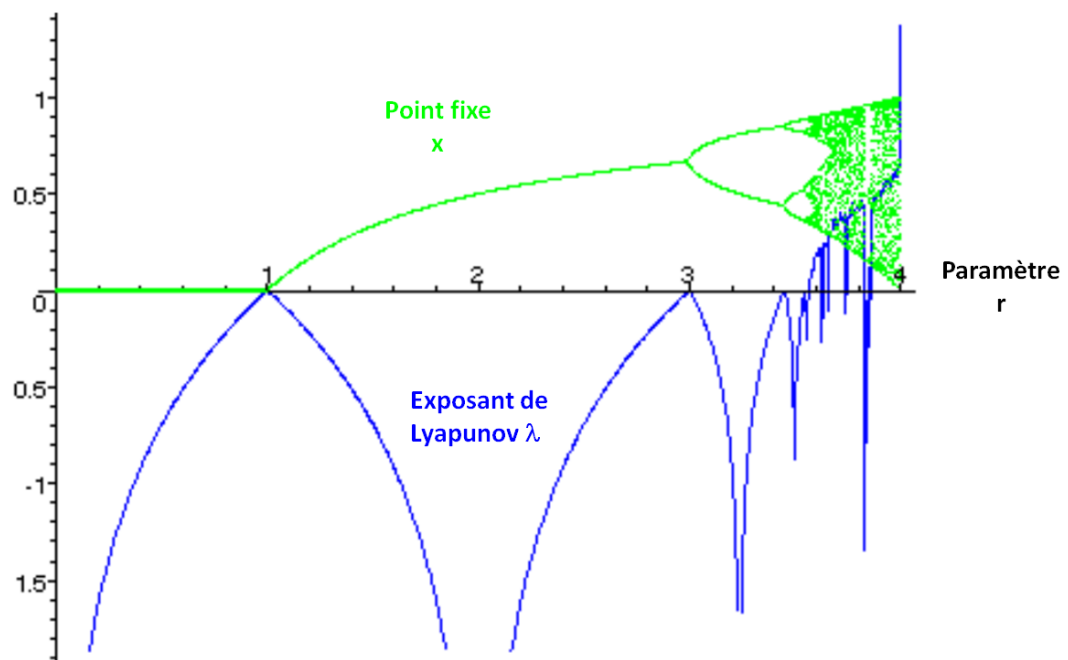


FIGURE 1.4 – Le système est stable lorsque l'exposant de Lyapunov λ est négatif et instable sinon.

Chapitre 2

Systèmes dynamiques continus

Il existe un très grand nombre de systèmes dynamiques. Chacun obéit à une loi de comportement différentielle. Dans ce qui suit, on ne cherche pas à réaliser une étude quantitative, spécifique à un système dynamique mais plutôt à évaluer la **nature qualitative** de l'état du système : est-il stable (fixe, oscillant, ...) ou bien instable (divergence) ?

2.1 Définitions

2.1.1 Système dynamique et loi de comportement

Considérons un système dont l'état à l'instant t est représenté par n grandeurs scalaires indépendantes et réelles que l'on note $x_i(t)$ avec $i \in \{1, \dots, n\}$ et que l'on appelle **degrés de liberté** (dynamiques) du système.

Par définition, l'évolution d'un système dynamique continu est régie par une ou plusieurs EDO du premier ordre. On parle de **loi de comportement**. En général, ce système d'EDO est paramétré par les grandeurs réelles μ_i avec $i \in \{1, \dots, m\}$:

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = f_1(x_1, \dots, x_n, \mu_1, \dots, \mu_m, t) \\ \vdots \\ \frac{dx_n}{dt} = f_n(x_1, \dots, x_n, \mu_1, \dots, \mu_m, t) \end{cases} \quad \text{soit} \quad \frac{d\vec{x}}{dt} = \mathbf{f}(\vec{x}, \vec{\mu}, t) \quad (2.1)$$

où $\vec{x} \equiv (x_1, \dots, x_n)$ est appelé **vecteur d'état** et $\vec{\mu} = (\mu_1, \dots, \mu_m)$ le vecteur des paramètres.

Lorsque le comportement d'un système est régi par une EDP et non une EDO, on peut utiliser la **méthode des caractéristiques** pour obtenir une EDO. Se reporter à la page 33. Dans d'autres situations, l'équation de comportement est une EDO d'ordre supérieur à l'unité. Pour se ramener à un système d'EDO du premier ordre, il suffit d'introduire de nouvelles variables, égales aux dérivées temporelles successives (Cf. l'exemple du pendule amorti, équation 3.3 en page 19).

L'équation d'évolution ne fait dépendre l'évolution du système que de son état actuel et non de son histoire. Lorsque le champ \mathbf{f} ne dépend pas explicitement du temps, on parle de **système autonome**. Dans le cas contraire, on parle de système **non-autonome**. On peut facilement ramener un système non-autonome à un système autonome en introduisant un nouveau degré de liberté $x_{n+1} \equiv t$ régi par l'équation $\dot{x}_{n+1} = 1$. Dans ce qui suit, on traitera des systèmes autonomes, c'est-à-dire obéissant à l'équation d'évolution suivante, assortie de sa condition initiale :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = f_1(x_1, \dots, x_n, \mu_1, \dots, \mu_m) \\ \vdots \\ \dot{x}_n = f_n(x_1, \dots, x_n, \mu_1, \dots, \mu_m) \end{cases} \quad \text{avec} \quad \vec{x} = \vec{x}_0 \quad \text{pour} \quad t = 0 \quad (2.2)$$

2.1.2 Espace des phases et trajectoire

Pour une condition initiale et un jeu de paramètres $\vec{\mu}$ donnés, ce système admet une solution unique. Pour représenter graphiquement l'évolution du système, deux méthodes sont possibles.

La première méthode, classique, consiste à tracer n diagrammes temporels de la forme $x_i(t)$. Ce type de représentation n'est pas complètement satisfaisante pour deux raisons :

- il n'est pas possible de voir plus d'une dizaine de courbes. L'analyse de l'influence des conditions initiales est donc très partielle. Seule une dizaine de cas sont testés.
- il n'est pas possible de repérer visuellement la nature de certaines évolutions. Par exemple, il n'est pas possible de prévoir si un système apparemment stable qui oscille autour d'un état va le rester ou bien diverger aux temps très longs

La deuxième méthode, répandue dans le domaine des systèmes dynamiques, consiste à tracer la **trajectoire** du système dans l'espace des degrés de liberté que l'on appelle **espace des phases**. Cet espace comporte n dimensions et ses axes sont x_1, \dots, x_n . Il peut être égal à \mathbb{R}^n ou bien être plus petit que ce dernier. Dans cette représentation, le temps ne figure pas explicitement. Le point représentant l'état du système se déplace sur une trajectoire lorsque le temps s'écoule (à une vitesse que le graphique n'indique pas). Parfois, les trajectoires sont désignées par le vocable orbites.

2.1.3 Portrait de phase

A chaque condition initiale correspond une trajectoire différente. L'ensemble des trajectoires constitue le **portrait de phase** du système. Lorsque l'espace des phases est de dimension 2 ou 3, la représentation graphique du portrait de phase peut se faire avec l'une ou l'autre des méthodes suivantes, éventuellement avec les deux :

- on choisit quelques conditions initiales et l'on trace la trajectoire associée à chacune d'elles (figure 3.1)
- on subdivise l'espace des phases en cellules et on associe à chacune d'elle un vecteur représentant la tangente à la trajectoire (figure ...).

L'intérêt d'un portrait de phase, par rapport à un diagramme temporel, est qu'il permet de visualiser facilement le comportement asymptotique d'un système (il suffit de suivre la trajectoire dans le sens des temps croissants) et d'étudier l'influence des conditions initiales (en considérant des trajectoires débutant en des points différents de l'espace des phases).

2.1.4 Ensembles limites

Le portrait de phase permet de repérer d'éventuelles régularités dans le mouvement du système dynamique. En effet, les trajectoires convergent parfois vers un ensemble ou un espace que l'on appelle attracteur ou ensemble-limite. Les trois principaux types d'attracteurs sont les points fixes, les cycles limites et les ensembles fractaux.

2.1.4.1 Point fixe

Un **point fixe** \vec{x}_0 est un point de l'espace des phases tel que :

$$\left(\frac{d\vec{x}}{dt} \right)_{\vec{x}_0} = \vec{0} \quad (2.3)$$

Par définition, les degrés de liberté d'un système dont l'état est représenté par un point fixe n'évoluent pas dans le temps. Cela signifie que le système est à l'équilibre. Comme on le verra plus tard, cet état d'état d'équilibre peut être stable (le système retourne à cet état après une perturbation) ou instable (il s'en éloigne).

2.1.4.2 Cycles limites

Les cycles limites sont des objets intrinsèquement non-linéaires (ils ne peuvent pas exister dans des modèles linéaires). Ils montrent qu'un système dynamique peut avoir des oscillations périodiques sans forçage extérieur.

2.1.4.3 Ensemble fractal = attracteur étrange

Le système adopte un comportement périodique. Il peut y avoir plusieurs ensembles limites. Le comportement reste périodique mais la convergence aura lieu vers tel ou tel ensemble selon les conditions initiales.

2.2 Analyse de stabilité autour d'un attracteur

Nous cherchons à savoir la nature d'un état d'équilibre. Est-il stable ? instable ? ... Pour répondre à cette question, nous allons considérer un système à l'équilibre, le perturber légèrement et observer ce qu'il devient. Si le système revient à son état d'équilibre, on parle d'équilibre stable. S'il s'en éloigne, on parle d'équilibre instable.

2.2.1 Linéarisation

L'étude de stabilité est simplifiée lorsque le système est linéaire et autonome, c'est-à-dire lorsqu'il est décrit par l'équation matricielle :

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \vdots \\ \dot{x}_n \end{pmatrix} = A \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad (2.4)$$

où $A \equiv [a_{ij}]$ est une matrice de dimension $n \times n$ à coefficients constants. Lorsque le système n'est pas rigoureusement linéaire, on étudie son comportement autour du point d'équilibre et l'on fait un développement limité au premier ordre autour du point fixe \vec{x}^{eq} :

$$\vec{f}(\vec{x}) = \vec{f}(\vec{x}^{eq}) + J_{\vec{x}^{eq}} \cdot (\vec{x} - \vec{x}^{eq}) + O((\vec{x} - \vec{x}^{eq})^2) \quad (2.5)$$

où J est la matrice jacobienne de \vec{f} au point \vec{x}^{eq} :

$$J \equiv [J_{ij}] \quad \text{avec} \quad J_{ij} \equiv \frac{\partial X_i}{\partial x_j} \quad (2.6)$$

L'équation 2.5 peut se transformer en :

$$\frac{d(\vec{x} - \vec{x}^{eq})}{dt} = J_{\vec{x}^{eq}} \cdot (\vec{x} - \vec{x}^{eq}) \quad (2.7)$$

Si la matrice jacobienne J est nulle au point \vec{x}^{eq} , on poursuit le développement limité jusqu'au second ordre. Dans ce cas, on ne parle plus de stabilité linéaire mais simplement de stabilité.

Pour un système autonome, les éléments L_{ij} ne dépendent pas du temps. Le système 2.7 étant linéaire à coefficients constants, ses solutions sont une somme d'exponentielles et l'on peut écrire :

$$\vec{x}(t) - \vec{x}^{eq} = \sum_i A_i \cdot \exp(\lambda_i t) \quad (2.8)$$

où les coefficients λ_i sont les valeurs propres du problème. Par définition, ces dernières sont solutions du système suivant :

$$\det(J - \lambda \cdot I) = 0 \quad (2.9)$$

où \det désigne le déterminant¹ et I la matrice identité. Après réarrangement, l'équation 2.9 prend la forme d'un polynôme en λ appelé polynôme caractéristique. Les racines λ_i sont réelles ou imaginaires.

La stabilité de l'état d'équilibre dépend des valeurs propres. On distingue deux cas :

- les parties réelles des valeurs propres sont toutes négatives : la solution est une somme d'exponentielles décroissantes et toute perturbation s'amortit. Aux temps longs, le système revient à sa position d'équilibre et on qualifie ce dernier d'équilibre asymptotiquement stable.
- au moins une partie réelle des valeurs propres est positive : l'état d'équilibre est instable

1. Pour rappel, le déterminant de la matrice M_{ij} est égal à $m_{11} \cdot m_{22} - m_{12} \cdot m_{21}$ en dimension 2 et à $m_{11} \cdot (m_{22} \cdot m_{33} - m_{23} \cdot m_{32}) - m_{12} \cdot (m_{21} \cdot m_{33} - m_{23} \cdot m_{31}) + m_{13} \cdot (m_{21} \cdot m_{32} - m_{22} \cdot m_{31})$ en dimension 3.

2.2.2 Méthode des perturbations

La méthode des perturbations consiste à étudier le comportement du système lorsqu'une perturbation est apportée à son état d'équilibre. Plus précisément, on cherche à savoir si la perturbation va s'amplifier ou s'amortir spontanément.

On considère un système dynamique à un degré de liberté dont l'évolution est décrite par l'équation différentielle ordinaire suivante, faisant intervenir une fonction f quelconque, linéaire ou non :

$$\frac{dx}{dt} = f(x) \quad (2.10)$$

On suppose qu'il existe au moins un point fixe x_0 . La méthode des perturbations consiste à écrire :

$$x(t) = x_0 + \varepsilon(t)$$

où ε représente une petite perturbation. Puisque x_0 est une constante, le membre de gauche de l'équation de comportement 2.10 s'écrit :

$$\frac{dx}{dt} = \frac{dx_0}{dt} + \frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{d\varepsilon}{dt}$$

En effectuant un développement limité à l'ordre 1, le membre de droite s'écrit :

$$f(x) = f(x_0) + \varepsilon \cdot f'(x_0) + o(\varepsilon)$$

L'équation de comportement se simplifie alors en une EDO linéaire :

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = \varepsilon(t) \cdot f'(x_0) \quad (2.11)$$

On peut la résoudre facilement :

$$\varepsilon(t) = \varepsilon_{(t=0)} \cdot \exp(f'(x_0) \cdot t)$$

Il y a alors deux cas de figure :

- $f'(x_0) > 0$: la perturbation va croître exponentiellement dans le temps donc x_0 est instable
- $f'(x_0) < 0$: la perturbation va s'amortir dans le temps donc x_0 est stable

2.2.3 Etude de stabilité d'un système dynamique linéaire 2D

On considère un système dynamique linéaire à deux degrés de liberté $\vec{x} \equiv (x_1, x_2)$. Le comportement d'un tel système est décrit par l'équation :

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = A \cdot \vec{x}$$

On considère que $A \equiv [a_{ij}]$ est une matrice 2x2 à coefficients constants. On note \vec{x}_0 un point fixe (donc tel que $d\vec{x}/dt$ est nul en $\vec{x} = \vec{x}_0$) et l'on écrit la perturbation :

$$\vec{x}(t) = \vec{x}_0 + \vec{\varepsilon}(t)$$

Avec la même démarche que précédemment, on obtient l'équation :

$$\frac{d\vec{\varepsilon}}{dt} = A \cdot \vec{\varepsilon}(t) \quad (2.12)$$

On peut résoudre cette équation différentielle :

$$\varepsilon(t) = \varepsilon_{(t=0)} \cdot \exp(t \cdot A)$$

où $\exp(t \cdot A)$ est une matrice carrée dont les termes évoluent avec le temps. On note λ_1 et λ_2 les valeurs propres de A . Par construction, il existe une matrice de passage M telle que A soit diagonalisée :

$$A = M \cdot \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \cdot M^{-1} \quad (2.13)$$

Les valeurs propres λ_k sont les racines du polynôme caractéristique :

$$P(\lambda) = \lambda^2 - \text{tr}(A).\lambda + \det(A) \quad (2.14)$$

dont le discriminant est :

$$\Delta \equiv [\text{tr}(A)]^2 - 4.\det(A)$$

Par conséquent, on a :

$$\exp(A.t) = M. \begin{bmatrix} \exp(\lambda_1.t) & 0 \\ 0 & \exp(\lambda_2.t) \end{bmatrix} .M^{-1} \quad (2.15)$$

On voit que l'évolution temporelle de la perturbation est donnée par les termes $\exp(\lambda_k.t)$. Pour aller plus loin, écrivons que :

$$\lambda_k \equiv s_k + i\omega_k$$

avec s_k la partie réelle et ω_k la partie imaginaire de λ_k . On a alors :

$$\exp(\lambda_k.t) = \exp(s_k.t) \exp(i\omega_k.t)$$

Sachant que la partie $\exp(i\omega_k.t)$ est la partie oscillante² de module égal à 1, tout l'enjeu de la stabilité est dans la partie réelle s_k , et plus précisément dans son signe :

- toutes les parties réelles s_k sont négatives strictement : le point fixe est stable car $\exp(A.t) \rightarrow 0$
- il existe au moins une partie réelle strictement positive : le point fixe est instable car $\exp(A.t) \rightarrow \infty$

Cette conclusion est généralisable à un espace de dimension N quelconque.

2.2.4 Cartographie des types de points fixes en dimension 2

En dimension 2, on peut donner une représentation graphique des points fixes et de leur stabilité. On note Δ le discriminant du polynôme caractéristique. Comme l'illustre la figure 2.1, on peut tracer la courbe représentative de $\Delta = 0$ dans le plan " $\text{tr}(A)$ - $\det(A)$ ". Il s'agit d'une parabole d'équation $y = x^2/4$. A chaque sous-espace du plan correspond un type de point fixe, caractérisé par un portrait de phase qualitativement différent.

2.3 Bifurcations

On parle de **bifurcation** lorsque la variation d'un paramètre μ provoque la modification du nombre ou de la nature des attracteurs.

Dans cette section, on va considérer des systèmes à 1 degré de liberté et étudier successivement trois bifurcations majeures :

- noeud-col (*=saddle-node*) : 1 point fixe / 0 point fixe
- fourche (*=pitchfork*) : 1 point fixe / 2 points fixes
- de Hopf (*=de Hopf*) : 1 point fixe / 1 cycle limite

Dans chaque cas, on va chercher à :

- identifier les points d'équilibre x_0 du système, c'est-à-dire les états tels que le système est invariant ($df/dt = 0$ en $x = x_0$).
- étudier leur stabilité : comment le système évolue-t-il à partir d'un point fixe si on lui applique une perturbation ?
- résumer ces informations sur un diagramme de bifurcation

2. On rappelle que $\exp(i\omega_k.t) = \cos(\omega_k.t) + i.\sin(\omega_k.t)$.

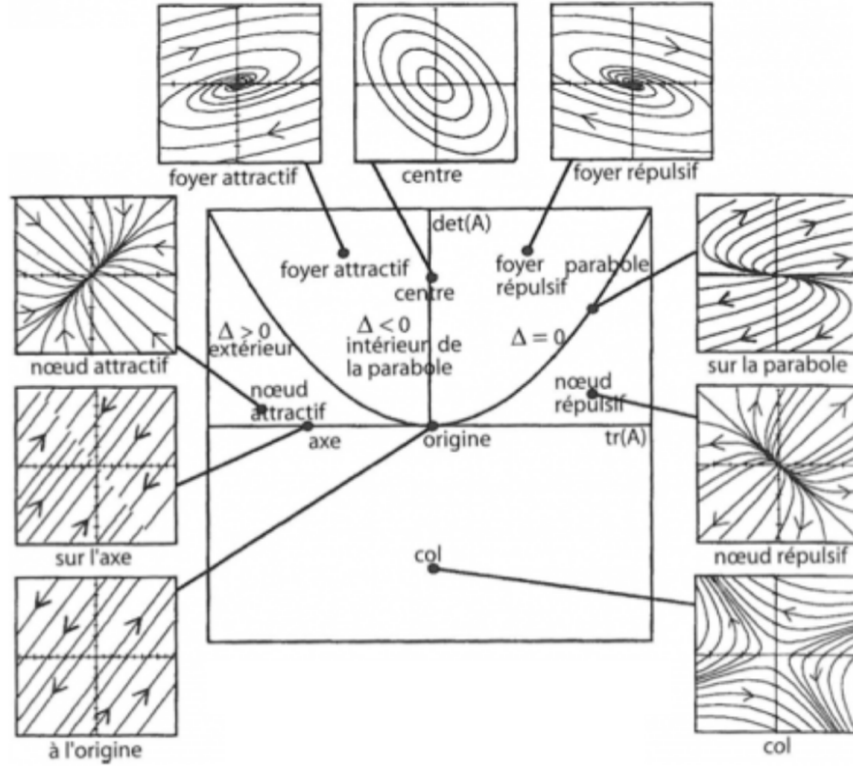


FIGURE 2.1 – Allure des portraits de phase selon la valeur du couple $\text{tr}(A)$ - $\det(A)$.

2.3.1 Bifurcation noeud-col

La **forme normale**, dite aussi **forme canonique**, est la suivante :

$$\frac{dx}{dt} = f(x) \quad \text{avec} \quad f(x) = \mu - \alpha x^2 \quad (2.16)$$

où μ est un paramètre. La bifurcation sera qualifiée différemment selon la valeur de la constante α :

- la transition est **sous-critique** pour $\alpha = -1$
- la transition est **super-critique** pour $\alpha = +1$

Le terme *super-critique* renvoie à l'idée que la transition ne présente pas d'hysteresis.

Un exemple classique est l'équation du consommateur $f(x) = r.x.(1-x) - px$ où le premier terme est l'équation logistique décrivant la croissance de la ressource et le second terme sa consommation.

A titre d'illustration, nous étudierons la bifurcation noeud-col super-critique ($\alpha = 1$). L'étude commence classiquement par la recherche de point d'équilibre. En utilisant l'équation 2.16, on voit que les points fixes sont solutions de :

$$\mu - x^2 = 0 \quad (2.17)$$

Pour $\mu < 0$, il n'y a aucun point d'équilibre. Pour $\mu > 0$, le système admet deux points d'équilibre : $x_1^* = \sqrt{\mu}$ et $x_2^* = -x_1^*$. Pour étudier la stabilité de ces deux points fixes, on peut ajouter une petite perturbation $\varepsilon(t)$ au point d'équilibre x^* :

$$x(t) = x^* + \varepsilon(t)$$

Le comportement du système dynamique est dicté par l'équation 2.16. En utilisant un développement limité au premier ordre pour exprimer $f(x)$ et la définition du point fixe ($f(x^*) = 0$), on a :

$$\dot{\varepsilon} = \varepsilon.f'(x^*)$$

On en déduit :

$$\varepsilon(t) = \varepsilon(t=0) \cdot e^{f'(x^*) \cdot t}$$

Si $f'(x^*) > 0$, alors le point d'équilibre est instable. Dans le cas contraire, il y a stabilité. Ici, la dérivée $f'(x) = -2x$ est du signe contraire de x . Le diagramme associé à une bifurcation noeud-col est donné sur la figure 2.2. La courbe en trait continu décrit les points fixes stables tandis que la courbe en pointillés décrit les points fixes instables.

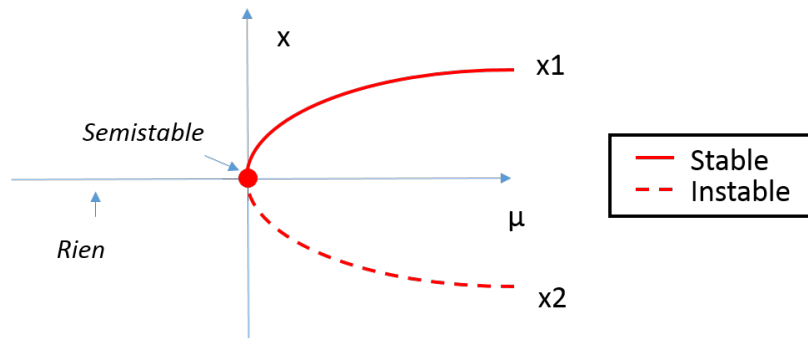


FIGURE 2.2 – Bifurcation noeud-col super-critique.

2.3.2 Bifurcation Fourche

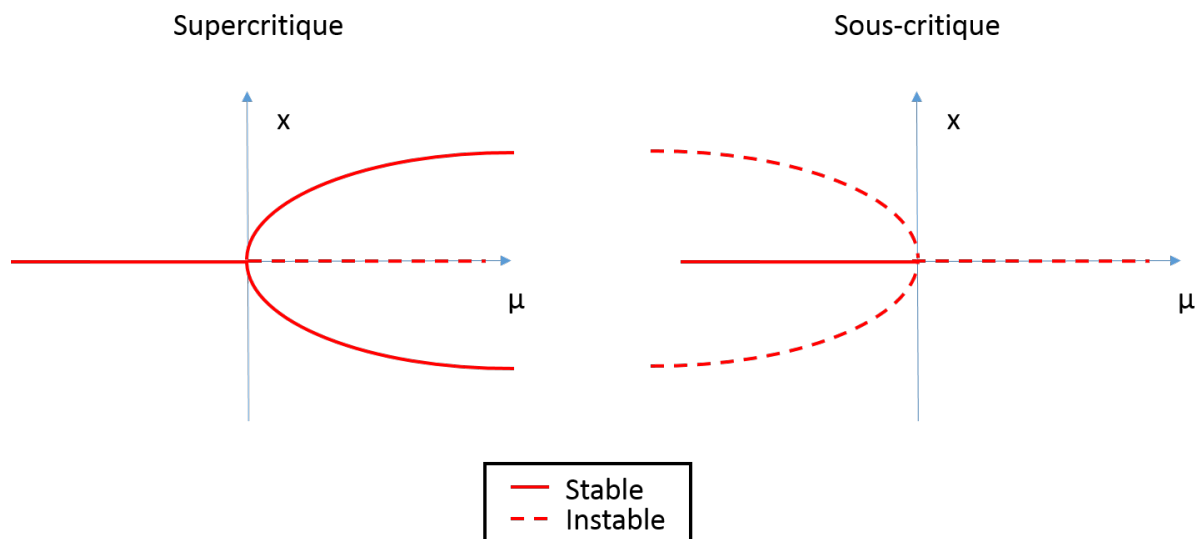
Les anglo-saxons désignent cette bifurcation par le terme "pitchfork" qui se traduit littéralement par "fourche à foin". Sa forme normale est la suivante :

$$\frac{dx}{dt} = f(x) \quad \text{avec} \quad f(x) = \mu \cdot x - \alpha \cdot x^3 \quad (2.18)$$

où μ est un paramètre. La bifurcation sera qualifiée différemment selon la valeur de la constante α :

- la transition est **sous-critique** pour $\alpha = -1$
- la transition est **super-critique** pour $\alpha = +1$

Le flambage d'une poutre constitue un exemple classique de bifurcation fourche.



2.3.3 Bifurcation de Hopf

Cette bifurcation est observée en dimension supérieure ou égale à 2. Ici, on se place en dimension 2. Pour $z \in \mathbb{C}$, la forme normale est :

$$\frac{dz}{dt} = f(z) \quad \text{avec} \quad f(z) = \lambda z - \alpha |z|^2 \cdot z \quad (2.19)$$

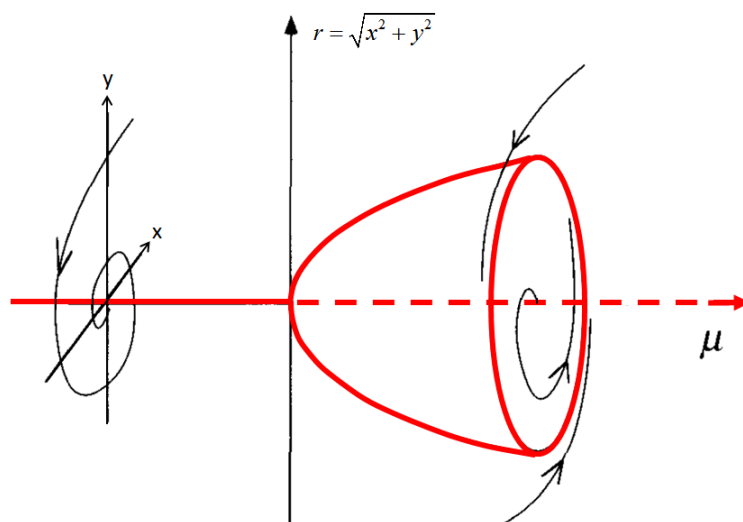
où $\lambda \in \mathbb{C}$ est un paramètre. La bifurcation sera qualifiée différemment selon la valeur de la constante α :

- la transition est **sous-critique** pour $\alpha = -1$
- la transition est **super-critique** pour $\alpha = +1$

Posons $z = r.e^{i\theta}$. Dans ce cas, la forme normale s'écrit :

$$\begin{cases} \dot{r} = \mu r + \alpha r^3 \\ \dot{\theta} = \omega \end{cases}$$

On constate que la bifurcation de Hopf est "la combinaison" d'une bifurcation fourche (\dot{r}) et d'une rotation ($\dot{\theta}$) à vitesse angulaire constante. Cette combinaison est illustrée sur la figure 2.3.3.



2.3.4 Scénarios de déstabilisation en dimension 3

En dimension 3, considérons le cas où il y a une valeur propre réelle et deux valeurs propres complexes conjuguées et où le système est initialement dans un état stable (la partie réelle des trois valeurs propres est négative). Dans ce cas, on observe deux scénarios de déstabilisation (voir figure 2.3) :

- scénario 1 : la valeur propre réelle "traverse" l'axe des ordonnées, un attracteur disparaît. La bifurcation est alors :
 - de type fourche s'il y a une brisure de symétrie
 - de type noeud-col sinon
- scénario 2 : les deux valeurs propres complexes "traversent" l'axe des ordonnées, un nouvel attracteur apparaît (cycle limite). Dans ce cas, il s'agit d'une bifurcation de Hopf.

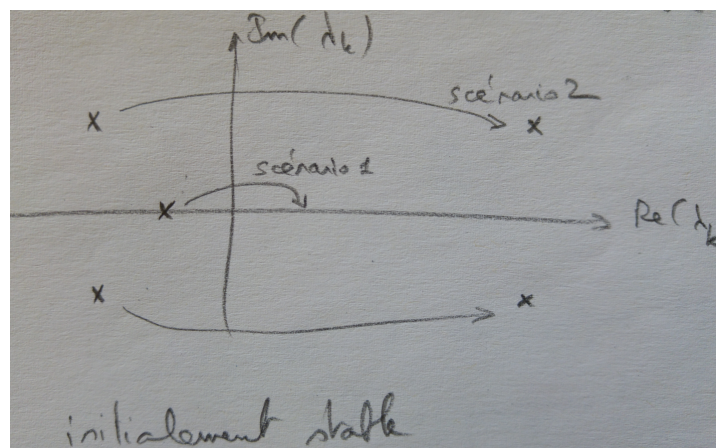


FIGURE 2.3 – Deux scénarios de déstabilisation.

2.4 4ème séance

2.4.1 Systèmes linéaires

On considère le système générique décrit par l'EDP linéaire suivante :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \alpha_1 \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \alpha_3 \cdot \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = \mu_0 \cdot u + \mu_2 \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \mu_4 \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} \quad (2.20)$$

Si le domaine est infini, la solution de cette équation peut s'écrire sous la forme d'une somme de termes exponentiels. Chacun d'eux s'écrit :

$$u_{(x,t)} = A \cdot e^{rx} \cdot e^{st} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} r = \gamma + i \cdot k \\ s = \sigma - i \cdot \omega \end{cases} \quad (2.21)$$

Si, de plus, la solution est bornée aux confins spatiaux, alors $\gamma = 0$ et l'on a :

$$u_{(x,t)} = A \cdot e^{ikx + \sigma t - i\omega t} \quad (2.22)$$

Si on injecte cette dernière équation dans l'équation 2.20, alors on obtient un système de deux équations (l'une pour la partie réelle et l'autre pour la partie imaginaire) :

$$\begin{cases} \sigma = \mu_0 - \mu_2 \cdot k^2 + \mu_4 \cdot k^4 \\ \omega = \alpha_1 \cdot k \alpha_3 \cdot k^3 \end{cases} \quad (2.23)$$

Ce sont les relations de dispersion généralisées. Elles sont de la forme :

$$\begin{cases} \sigma = \sigma(k) \\ \omega = \omega(k) \end{cases} \quad (2.24)$$

Nota Bene : l'équation 2.20 décrit un phénomène physique dans un espace à 1 dimension. La grandeur k est donc un scalaire. Lorsqu'un phénomène a lieu dans un espace à 3 dimensions, on note \vec{k} le **vecteur d'onde** et sa norme $k \equiv ||\vec{k}||$ est désignée par **nombre d'onde**.

A titre d'illustration, étudions le cas où $\alpha_1 = \alpha_3 = 1$, $\mu_2 = -2$ et $\mu_4 = -1$. La relation de dispersion est illustrée sur la figure 2.4. La courbe est décroissante à l'infini car $\mu_4 < 0$.

Pour étudier la stabilité d'un tel système, il suffit de tracer la courbe $\sigma(k)$ pour différentes valeurs du paramètre libre restant μ_0 (voir figure 2.5).

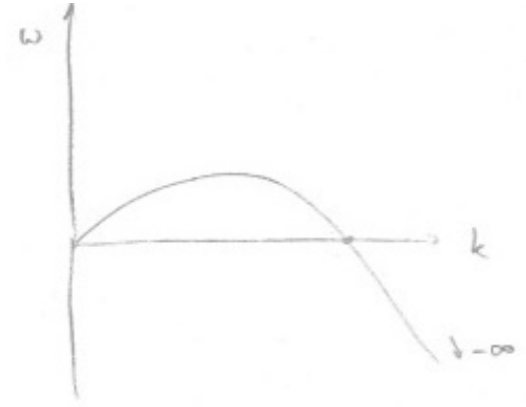


FIGURE 2.4 – Courbe $\omega(k)$

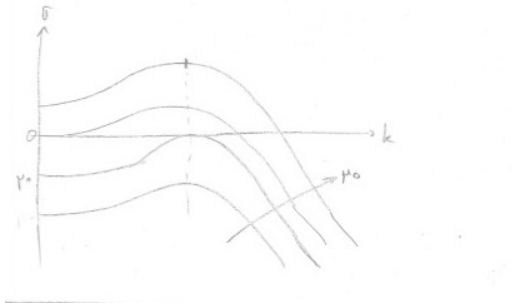


FIGURE 2.5 – Courbe $\sigma = g(k)$

Quelle que soit la valeur de μ_0 , chaque courbe présente un maximum. La valeur maximale σ_{max} est obtenue pour $k = k_c$:

$$\begin{cases} k_c &= \frac{\mu_2}{2\mu_4} = 1 \\ \sigma_{max} &= \mu_0 - \frac{\mu_2^2}{4\mu_4} = \mu_0 + 1 \end{cases} \quad (2.25)$$

Etudions dans quelle condition la valeur σ_{max} est toujours négative :

$$\sigma_{max} < 0 \Leftrightarrow \mu_0 < -1 \quad (2.26)$$

On en déduit que :

- si $\mu_0 < -1$, σ est négatif pour tout k donc la solution est stable
- si $\mu_0 > -1$, il existe des nombres d'onde k tels que $\sigma > 0$. Pour ces valeurs de k , le système est instable; il diverge.

Plus précisément, l'instabilité qui se développe le plus vite (celle observée pour $k = k_c$) "écrasera" les autres, plus lentes, et dictera au système son évolution du système. La longueur d'onde de l'instabilité sera :

$$\lambda_c = \frac{2\pi}{k_c} \quad (2.27)$$

2.4.2 Systèmes non linéaires (partie à affiner/compléter)

Dans ce cas, on linéarise. Etudions l'exemple suivant :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \cdot \frac{\partial u}{\partial x} = \mu u - \gamma u^3 + \mu_2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \mu_4 \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} \quad (2.28)$$

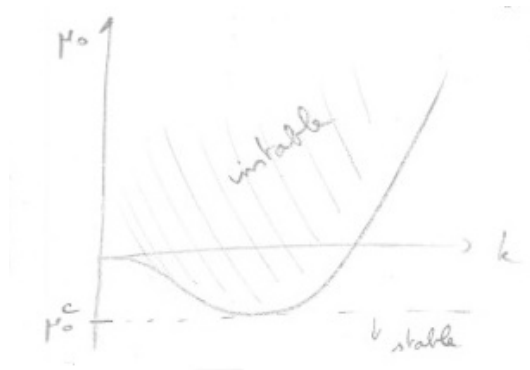


FIGURE 2.6 – Stabilité

avec $\gamma > 0$, $\mu_2 > 0$ et $\mu_4 < 0$. Si $\mu > 0$, les solutions stationnaires (c'est-à-dire constantes en temps et en espace) sont solutions de :

$$\mu u - \gamma u^3 = 0 \quad (2.29)$$

Les trois solutions sont 0 , $\sqrt{\frac{\mu}{\gamma}}$ et $-\sqrt{\frac{\mu}{\gamma}}$.

Chapitre 3

Exemples

3.1 Le pendule amorti

Considérons un pendule amorti. Il s'agit d'une masse m située à l'extrémité d'une tige rigide de longueur L formant un angle θ avec la verticale. Cette masse est soumise à la pesanteur g et à une force de frottement visqueux de coefficient c (le cas d'un forçage extérieur sera étudié plus tard). Son mouvement est décrit par la seconde loi de Newton projetée sur l'axe vertical :

$$mL \frac{d^2\theta}{dt^2} + c.L \frac{d\theta}{dt} + mg \sin \theta = 0 \quad (3.1)$$

soit :

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \mu \frac{d\theta}{dt} + \omega_0^2 \sin \theta = 0 \quad \text{avec} \quad \begin{cases} \mu \equiv \frac{c}{m} \\ \omega_0^2 \equiv \frac{g}{L} \end{cases} \quad (3.2)$$

où ω_0 est la pulsation propre du système. Cette équation peut prendre la forme d'un système d'EDO du premier ordre. En effet, il y a 3 grandeurs scalaires réelles ($\ddot{\theta}(t)$, $\dot{\theta}(t)$ et $\theta(t)$) et 1 équation. Le nombre de degrés de liberté est donc $3-1=2$. Le plus simple est de prendre la position $x_1(t) \equiv \theta(t)$ et la vitesse $x_2(t) \equiv \dot{\theta}(t)$.

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -\mu x_2 - \omega_0^2 \sin x_1 \end{cases} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} x_1 \equiv \theta \\ x_2 \equiv \dot{\theta} \end{cases} \quad (3.3)$$

Pour le pendule simple non amorti ($\mu = 0$), la trajectoire possède quatre allures différentes selon la condition initiale :

- $(x_{1,0}, x_{2,0}) = (0, 0)$: point (noir)
- $(x_{1,0}, x_{2,0}) < 000$: ellipse (bleu)
- $(x_{1,0}, x_{2,0}) = 000$: oscillation autour de $x_2 = 0$ (rouge)
- $(x_{1,0}, x_{2,0}) > 000$: oscillation autour d'une valeur x_2 non nulle (vert)

L'axe x_1 est l'angle θ et boucle donc sur lui-même tous les 2π radians. Pour le pendule simple amorti ($\mu \neq 0$), la figure 3.1.

Sur le portrait de phase 3.1 sont représentées 250 trajectoires dont les conditions initiales sont prises aléatoirement dans la zone de couleur bleu foncé (en haut à gauche) et 250 autres trajectoires dont les conditions initiales sont prises aléatoirement dans la zone de couleur orange (en bas à droite). On voit clairement que ces trajectoires convergent (en spiralant) vers des points fixes qui sont autant d'état d'équilibre. En fait, ici, les différents points fixes représentent un seul et même état car il y a une périodicité de x modulo 2π . On observera que, bien que l'équation du mouvement 3.3 soit non linéaire, le pendule a un comportement conforme au paradigme classique : si on part de deux conditions initiales proches, les trajectoires seront voisines l'une de l'autre et une petite erreur sur leur détermination aura comme conséquence une petite erreur sur les trajectoires. On peut utiliser l'application internet accessible [ici](#) pour mieux appréhender la notion de portrait de phase.

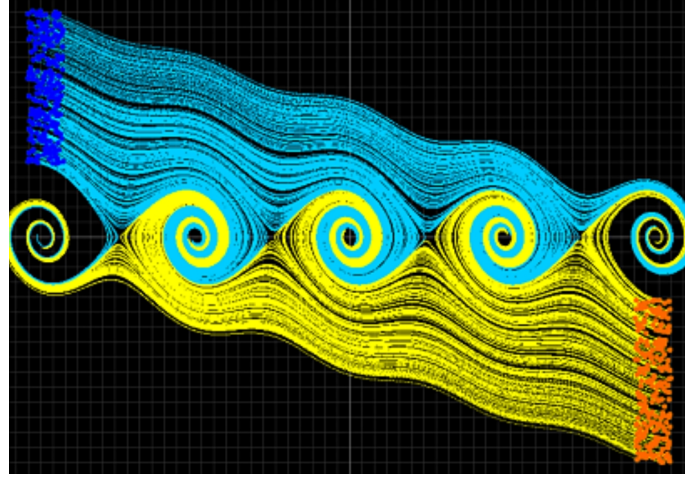


FIGURE 3.1 – Portrait de phase d'un pendule amorti.

Dans la limite des petits angles, on peut remplacer $\sin \theta$ par θ et l'équation du mouvement 3.1 devient linéaire :

$$mL\ddot{\theta} + cL\dot{\theta} + mg\theta = 0 \quad \text{soit} \quad \begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -\frac{c}{m}.x_2 - \frac{g}{L}.x_1 \end{cases} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} x_1 \equiv \theta \\ x_2 \equiv \dot{\theta} \end{cases} \quad (3.4)$$

Cette équation d'un oscillateur *pendulaire* amorti est formellement identique à celle régissant le mouvement d'un oscillateur *linéaire* amorti dont la raideur k serait égale à mg/L .

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + k.x = 0 \quad \text{soit} \quad \begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -\frac{c}{m}.x_2 - \frac{k}{m}.x_1 \end{cases} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} x_1 \equiv x \\ x_2 \equiv \dot{x} \end{cases} \quad (3.5)$$

Toujours dans la limite des petits angles (càd autour de la position verticale basse), nous allons chercher les points fixes et évaluer leur stabilité. L'équation 3.4 peut prendre la forme suivante :

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = A. \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad A \equiv \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_0^2 & -\mu \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{cases} \mu \equiv \frac{c}{m} \\ \omega_0^2 \equiv \frac{g}{L} \end{cases} \quad (3.6)$$

Les points fixes sont solutions de l'équation suivante :

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = \vec{0} \Leftrightarrow A. \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow A.\vec{x} = \vec{0} \quad (3.7)$$

Si $\det(A) \neq 0$ alors A est inversible et la seule solution est :

$$\vec{x}_0 = \vec{0}$$

On peut facilement calculer la trace $tr(A) = -\mu$ et le déterminant $\det(A) = \omega_0^2$. Puisque μ et ω_0 sont tous deux positifs, on se situe dans le quadrant Nord-Ouest du diagramme. Pour être plus précis, écrivons le polynôme caractéristique :

$$P(\lambda) = \lambda^2 - tr(A).\lambda + \det(A) = \lambda^2 + \mu.\lambda + \omega_0^2$$

Le discriminant est :

$$\Delta = [tr(A)]^2 - 4.\det(A) = \mu^2 - 4\omega_0^2$$

1er cas : pour $|\mu| \geq 2\omega_0$, le discriminant est positif. Il y a donc deux valeurs propres réelles :

$$\lambda = \frac{tr(A) \pm \sqrt{\Delta}}{2} = \frac{-\mu}{2} \cdot \left(1 \pm \sqrt{1 - \frac{4\omega_0^2}{\mu^2}} \right) \quad (3.8)$$

On voit que les deux valeurs propres λ sont du signe contraire à celui de μ . Or μ est positif (la viscosité freine toujours), donc la partie réelle des deux valeurs propres est négative donc les points fixes sont tous les deux stables.

2ème cas : pour $|\mu| < 2\omega_0$, le discriminant est strictement négatif. Il existe donc deux valeurs propres conjuguées λ_1 et $\lambda_2 = \bar{\lambda}_1$. Evaluons les parties réelles et imaginaires :

$$\begin{cases} \operatorname{Re}(\lambda_1) = \operatorname{Re}(\lambda_2) = \frac{\operatorname{tr}(A)}{2} \\ \operatorname{Im}(\lambda_1) = -\operatorname{Im}(\lambda_2) \neq 0 \end{cases} \quad (3.9)$$

La partie imaginaire est toujours non nul. On a donc affaire à un mouvement pseudo-périodique. Comme la trace de A est égale à $-\mu$, la trajectoire est un cercle autour du point fixe pour un pendule non amorti ($\mu = 0$) et une spirale convergeant vers le point fixe pour un pendule amorti ($\mu > 0$). Dans les deux cas, le point fixe stable est le pendule au repos en position verticale basse.

On peut utiliser l'application internet accessible [ici](#) pour mieux appréhender la notion de bifurcation.

3.2 Un système quelconque

On cherche à établir le diagramme de bifurcation de $\dot{x} = \mu.x + \frac{x^2}{1+x^2}$

3.2.1 Recherche des points fixes

Commençons par définir la fonction f :

$$f(x) = \mu.x + \frac{x^2}{1+x^2}$$

et la fonction g telle que $f(x) = x.g(x)$:

$$g(x) = \mu + \frac{x}{1+x^2}$$

Les racines de $f(x) = 0$ sont $x_0 = 0$ et les racines de $g(x) = 0$.

$$g(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 = \frac{-\mu}{1+\mu} \equiv \mu'$$

L'équation $g(x) = 0$ possède $\begin{cases} 2 \text{ solutions réelles} & \text{si } \mu' > 0 \text{ c'est à dire } -1 < \mu < 0 \\ 1 \text{ solution double} & \text{si } \mu' = 0 \text{ c'est à dire } \mu = 0 \\ 0 \text{ solution réelle} & \text{sinon} \end{cases}$

Etudions le cas $-1 < \mu < 0$. Dans ce cas, les racines de $g(x)$ sont $\pm\sqrt{\mu'}$ soit $\pm\sqrt{\frac{-\mu}{1+\mu}}$.

La racine supérieure est $x_{sup} \equiv \sqrt{k(\mu)}$ avec $k(\mu) \equiv \frac{-\mu}{1+\mu}$. Le tableau de variation de x_{sup} est :

μ	-1		0
x_{sup}	$+\infty$	+	0
$\frac{dx_{sup}}{d\mu}$	$-\infty$	-	$-\infty$

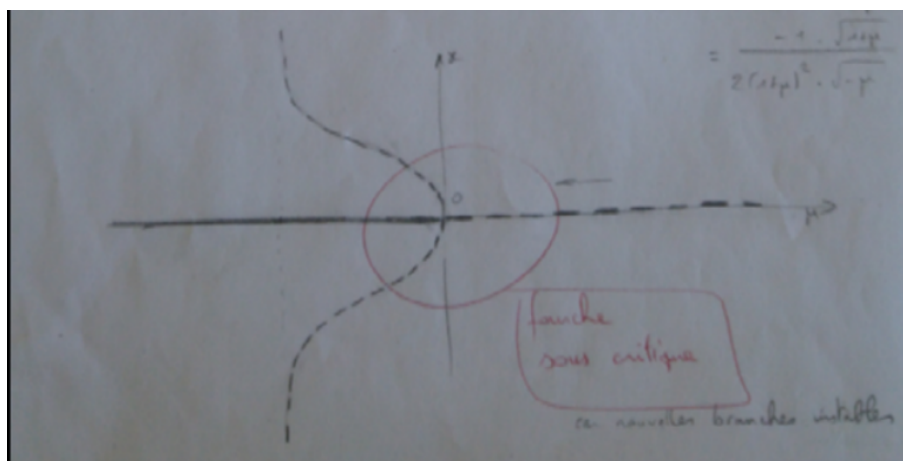


FIGURE 3.2 – Représentation des points fixes x en fonction du paramètre μ .

3.2.2 Etude de leur stabilité

La stabilité dépend du signe de la dérivée $f'(x)$ pour chacune des trois racines. On a :

$$f'(x) = \mu + \frac{x^2 \cdot (x^2 + 3)}{(1 + x^2)^2}$$

Premier point fixe ($x = 0$) On a $f'(0) = \mu$. Par conséquent, le point fixe $x = 0$ est $\begin{cases} \text{stable} & \text{pour } \mu < 0 \\ \text{instable} & \text{pour } \mu > 0 \end{cases}$

Deuxième point fixe ($x = x_{sup}$) On a $f'(x_{sup}) = \mu + \frac{\mu' \cdot (\mu' + 3)}{(1 + \mu')^2} = \frac{-\mu'}{1 + \mu'} + \frac{\mu' \cdot (\mu' + 3)}{(1 + \mu')^2} = \frac{2\mu'}{(1 + \mu')^2}$. Or x_{sup} n'existe que pour $\mu' > 0$ donc $f'(x_{sup}) > 0$ donc x_{sup} est instable.

Troisième point fixe ($x = x_{inf}$) Puisque $f'(x_{inf}) = f'(x_{sup})$ et que $f'(x_{sup}) > 0$, on peut dire que x_{inf} est instable.

3.2.3 Diagramme de bifurcation

De tout cela, on déduit le diagramme de bifurcation 3.2 qui donne les points fixes et leur stabilité en fonction du paramètre μ .

3.3 L'attracteur de Lorentz (effet papillon)

Le système d'équations suivant décrit le transfert thermique dans l'atmosphère, avec de la conduction et parfois de la convection.

$$\begin{cases} \dot{x} = f_1(x, y, z) = \sigma(y - x) \\ \dot{y} = f_2(x, y, z) = rx - y - xz \\ \dot{z} = f_3(x, y, z) = xy - bz \end{cases}$$

où x représente la vitesse, y la différence locale de température (dT), z la distortion des profils de température (par rapport au cas linéaire conductif). σ est proportionnel au nombre de Prandtl et b à l'élongation de la boîte et r le paramètre de contrôle (proportionnel au gradient thermique vertical imposé au fluide ($\Delta T/L$)). Ici, on prend $\sigma = 10$ et $b = \frac{8}{3}$. [Source](#).

3.3.1 Points fixes

Cherchons les points fixes de ce système dynamique qui prend la forme $\frac{d\vec{u}}{dt} = f(\vec{u})$.

$$\begin{cases} \dot{x} = 0 \\ \dot{y} = 0 \\ \dot{z} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x \\ (r-1-z).x = 0 \\ x^2 = bz \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases} \quad \text{ou bien} \quad \begin{cases} y = x \\ r-1 = z \\ x^2 = bz \end{cases}$$

Le deuxième point fixe obéit à :

$$\begin{cases} x^2 = b(r-1) \\ y = x \\ z = r-1 \end{cases}$$

Premier cas : $r < 1$ Dans ce cas, il n'y a qu'un seul point d'équilibre :

$$\vec{u}_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Deuxième cas : $r > 1$ Il y a trois points d'équilibre :

$$\vec{u}_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \vec{u}_1 = \begin{pmatrix} \sqrt{b(r-1)} \\ \sqrt{b(r-1)} \\ r-1 \end{pmatrix}; \vec{u}_2 = \begin{pmatrix} -\sqrt{b(r-1)} \\ -\sqrt{b(r-1)} \\ r-1 \end{pmatrix}$$

3.3.2 Stabilité des points fixes

On linéarise le système. On obtient :

$$\begin{pmatrix} \dot{\varepsilon}_x \\ \dot{\varepsilon}_y \\ \dot{\varepsilon}_z \end{pmatrix} = A \cdot \begin{pmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \end{pmatrix}$$

avec

$$A \equiv \left[\frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right] \quad \text{c'est-à-dire} \quad A = \begin{pmatrix} -\sigma & \sigma & 0 \\ r-z & -1 & -x \\ y & x & -b \end{pmatrix}$$

La stabilité dépend du signe de la partie réelle des valeurs propres de A qui sont les solutions de l'équation :

$$\det(\lambda I - A) = 0 \Leftrightarrow \lambda^3 - \lambda^2 \cdot \text{tr}(A) + \frac{\lambda}{2} \cdot [\text{tr}(A)^2 - \text{tr}(A^2)] - \det(A) = 0$$

Stabilité du point fixe \vec{u}_0 . Dans ce cas, la matrice A s'exprime :

$$A_{(\vec{u}_0)} = \begin{pmatrix} -\sigma & \sigma & 0 \\ r & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -b \end{pmatrix}$$

Par conséquent, on a :

$$\text{tr}(A) = -(\sigma + 1 + b) \quad \text{et} \quad \det(A) = \sigma b(r-1)$$

d'où

$$\begin{aligned} \lambda^3 + (\sigma + 1 + b).\lambda^2 + (\sigma(1-r) + b(1+\sigma)) - \sigma b(r-1) &= 0 \\ \Leftrightarrow (\lambda + b)(\lambda^2 + (1+\sigma)\lambda + \sigma(1-r)) &= 0 \end{aligned}$$

Le terme de droite est un polynôme de degré 2 dont le discriminant est :

$$\Delta = (1+\sigma)^2 - 4\sigma(1-r)$$

La nature des solutions du polynôme caractéristique dépend du signe de Δ :

$$\begin{aligned}\Delta > 0 &\Leftrightarrow (1 + \sigma)^2 > 4\sigma(1 - r) \\ &\Leftrightarrow 1 - r < \frac{(1 + \sigma)^2}{4\sigma}\end{aligned}$$

Ici, $\sigma = 10$. Par conséquent, le discriminant sera positif si et seulement si $r > \frac{-81}{40}$. C'est toujours le cas car $r > 0$. Nous avons donc les 3 racines réelles $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$:

$$\begin{cases} \lambda_1 = -b < 0 \\ \lambda_2 = \frac{-(1+\sigma) + \sqrt{(1+\sigma)^2 + 4\sigma(r-1)}}{2} \\ \lambda_3 = \frac{-(1+\sigma) - \sqrt{(1+\sigma)^2 + 4\sigma(r-1)}}{2} < 0 \end{cases}$$

On voit que λ_2 est négatif pour $0 < r < 1$ et positif pour $r > 1$. Par conséquent, le point fixe \vec{u}_0 est stable pour $0 < r < 1$ et instable pour $r > 1$.

Stabilité du point fixe \vec{u}_1 . Notons qu'il n'existe que pour $r > 1$. Dans ce cas, la matrice A s'exprime :

$$A_{(\vec{u}_1)} = \begin{pmatrix} -\sigma & \sigma & 0 \\ 1 & -1 & \sqrt{b(r-1)} \\ \sqrt{b(r-1)} & \sqrt{b(r-1)} & -b \end{pmatrix}$$

On a :

$$\begin{cases} \text{tr}(A) &= -(\sigma + 1 + b) \\ \det(A) &= 2\sigma b(r - 1) \end{cases}$$

Par conséquent, le polynôme caractéristique est :

$$\lambda^3 + \lambda^2(\sigma + 1 + b) - \lambda(br - 3b - 1) + 2\sigma b(r - 1) = 0 \quad (3.10)$$

Selon la valeur de r , on peut obtenir comme racines :

- 3 racines réelles, toutes négatives
- 1 racine réelle et deux racines complexes conjuguées $\lambda_k = \mu \pm i\omega$

On va chercher à savoir s'il existe une valeur r_c telle que les points fixes \vec{u}_1 et \vec{u}_2 deviennent instables. On s'appuiera pour cela sur la réflexion présentée dans la section 2.3.4 en page 14.

Dans le scénario n°1, une valeur propre réelle change de signe. Cela équivaut à un changement de signe d'une valeur propre λ_k . L'expression du polynôme caractéristique (équation 3.10) indique que cela n'est possible que si le dernier terme $2\sigma b(r - 1)$ s'annule. Cela signifierait que $r = 1$, ce qui n'est pas possible puisque l'on s'est placé dans le cas où $r > 1$. Ce premier scénario n'est donc pas possible.

Dans le scénario n°2, les deux valeurs propres conjuguées traversent l'axe des ordonnées (bifurcation de Hopf). Cela signifie que $\lambda_k = 0 \pm i\omega$. En utilisant cette relation dans l'expression du polynôme caractéristique, on peut tirer deux expressions (l'une sur l'axe des réels et l'autre sur l'axe des imaginaires) :

$$\begin{cases} -\omega^2(\sigma + b + 1) + 2b(r - 1)\sigma &= 0 \\ -i(\omega^3) + i\omega b(\sigma + r) &= 0 \end{cases}$$

En éliminant ω^2 , il vient :

$$r_c = \frac{\sigma(\sigma + b + 3)}{\sigma - b - 1} \approx 24,73$$

On trouve donc que, pour $r \geq r_c$, la trajectoire est chaotique. Elle tourne alors autour d'un des deux équilibres (devenus instables lorsque le paramètre r a dépassé le seuil r_c), comme si elle convergeait puis elle bascule vers l'autre équilibre. C'est le célèbre **effet papillon**. Le diagramme de bifurcation est donné sur la figure 3.3.

On peut utiliser les applications internet accessibles [ici](#) et [ici](#) pour visualiser cette instabilité.

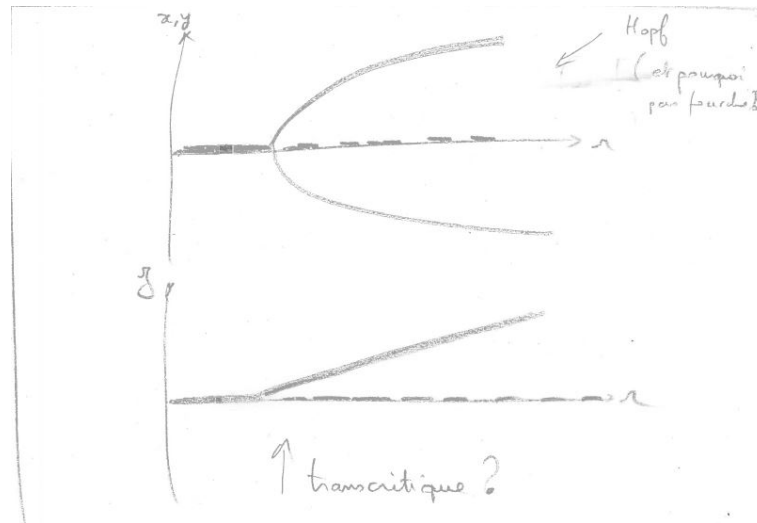


FIGURE 3.3 – Diagramme de bifurcation du système de Lorenz (effet papillon).

3.4 L'instabilité de Rayleigh-Plateau

Considérons la rosée se déposant sur une toile d'araignée. La figure 3.4 laisse imaginer le scénario suivant : sous l'effet du refroidissement nocturne, la vapeur d'eau de l'atmosphère condense et crée une pellicule d'eau autour de chaque fil, sous forme de cylindre continu. A cause de la tension superficielle, cette géométrie est instable. Il s'ensuit que le cylindre se fragmente en une succession de gouttes. On constate qu'elles sont à distance régulière les unes des autres : il existe une longueur d'onde bien spécifique. Laquelle? Quel lien y a-t-il entre la longueur d'onde et les paramètres du système : viscosité, masse volumique, tension superficielle, ...?



FIGURE 3.4 – Instabilité de Rayleigh-Plateau sur fil d'araignée.

La démarche est la suivante :

- identification des équations décrivant les phénomènes physiques. Ici : Navier-Stokes et équation de continuité + équation de Laplace
- identification des hypothèses simplificatrices
- identification d'une solution. Ici : cylindre parfait au repos

- linéarisation des équations physiques autour de cette solution (développement limité)
- analyse de stabilité en étudiant le devenir de la perturbation

Equations physiques. Les mouvements du fluide obéissent à l'équation de Navier-Stokes qui s'énonce :

$$\frac{\partial(\rho\vec{v})}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho\vec{v} \otimes \vec{v}) = -\nabla \cdot (p.I) + \nabla \cdot \tau + \rho.\vec{g} \quad (3.11)$$

Dans notre cas, on va faire les trois hypothèses suivantes :

- l'influence de la gravité est négligeable
- le fluide est incompressible (classique pour un liquide)
- le fluide est parfait (et donc $\tau = 0$). L'expérience montre que la viscosité n'est pas un ingrédient indispensable dans l'instabilité de Rayleigh-Plateau. Elle la retarde simplement.

L'équation de Navier-Stokes se simplifie alors en :

$$\frac{\partial\vec{v}}{\partial t} + \nabla \cdot (\vec{v} \otimes \vec{v}) = -\frac{1}{\rho}.\nabla p \quad (3.12)$$

Par ailleurs, l'équation de Young-Laplace permet de calculer la différence de pression entre le liquide constituant le cylindre et le gaz environnant :

$$\Delta p = \frac{\gamma}{R} \quad (3.13)$$

où R est le rayon du cylindre et γ la tension superficielle associée au couple liquide/gaz.

Recherche d'un point fixe. De manière assez évident, un cylindre infini de rayon uniforme R_0 au repos constitue une solution aux équations physiques. Si l'atmosphère gazeuse a une pression nulle, alors la pression p_0 à l'intérieur du cylindre liquide est égale à γ/R_0 . En d'autres termes, les conditions initiales sont :

$$\begin{cases} R(z, t = 0) &= R_0 \\ \vec{v}(r, z, t = 0) &= \vec{0} \\ p(r, z, t = 0) &= p_0 \end{cases} \quad (3.14)$$

Linéarisation. On va considérer une perturbation variqueuse infinitésimale :

$$\begin{cases} R &= R_0 + \tilde{R} \\ \vec{v} &= \vec{v}_0 + \tilde{\vec{v}} \\ p &= p_0 + \tilde{p} \end{cases} \quad \text{avec} \quad \tilde{\vec{v}} \equiv \begin{pmatrix} \tilde{v}_r \\ \tilde{v}_z \end{pmatrix} \quad (3.15)$$

On peut utiliser les expressions de \vec{v} et p données dans l'équation 3.15 et les insérer dans l'équation de Navier-Stokes. En ne retenant que les termes du 1er ordre, il vient :

$$\frac{\partial\tilde{\vec{v}}}{\partial t} = \frac{-1}{\rho}.\nabla\tilde{p} \quad \text{soit} \quad \begin{cases} \frac{\partial\tilde{v}_r}{\partial t} &= \frac{-1}{\rho}.\frac{\partial\tilde{p}}{\partial r} \\ \frac{\partial\tilde{v}_z}{\partial t} &= \frac{-1}{\rho}.\frac{\partial\tilde{p}}{\partial z} \end{cases} \quad (3.16)$$

Puisque le fluide est considéré comme incompressible, la divergence de la vitesse est nulle. Il s'ensuit que la divergence de $\tilde{\vec{v}}$ est nulle :

$$\frac{1}{r}.\frac{\partial(r\tilde{v}_r)}{\partial r} + \frac{1}{r}.\frac{\partial\tilde{v}_\theta}{\partial\theta} + \frac{\partial\tilde{v}_z}{\partial z} = 0$$

Du fait de l'invariance par rotation, le second terme est nul et l'on a :

$$\frac{\partial\tilde{v}_r}{\partial r} + \frac{\tilde{v}_r}{r} + \frac{\partial\tilde{v}_z}{\partial z} = 0 \quad (3.17)$$

Etude de stabilité. On fait maintenant l'hypothèse que les perturbations de vitesse, pression et rayon du cylindre ont toutes la même forme :

$$\begin{cases} \tilde{R} &= R_{(r)}^* . e^{\omega t + i k z} \\ \tilde{v}_r &= v_{r(r)}^* . e^{\omega t + i k z} \\ \tilde{v}_z &= v_{z(r)}^* . e^{\omega t + i k z} \\ \tilde{p} &= p_{(r)}^* . e^{\omega t + i k z} \end{cases} \quad (3.18)$$

Les deux équations 3.16 et l'équation 3.17 deviennent respectivement :

$$\begin{cases} \omega . v_r^* = \frac{-1}{\rho} . \frac{dp^*}{dr} \\ \omega . v_z^* = \frac{-1}{\rho} . i k . p^* \\ \frac{dv_r^*}{dr} + \frac{v_r^*}{r} + i k . v_z^* = 0 \end{cases} \quad (3.19)$$

En éliminant v_z^* et p^* , on obtient la relation :

$$r^2 . \frac{d^2 v_r^*}{dr^2} + r \frac{dv_r^*}{dr} - [1 + (kr)^2] . v_r^* = 0 \quad (3.20)$$

En notant $x \equiv kr$ et $y \equiv v_r^*$, on voit que les solutions de cette équation différentielle sont les fonctions de Bessel modifiées d'ordre 1, notées I_1 et K_1 , ainsi que leurs combinaisons linéaires (voir annexe en page 37). Par construction, K_1 diverge lorsque x s'approche de 0. Comme on sait par ailleurs que la solution de l'équation différentielle doit rester bornée pour $r \rightarrow 0$, on déduit que la vitesse radiale est :

$$v_r^* = A . I_1(kr) \quad (3.21)$$

avec A une constante que l'on déterminera plus tard. Pour trouver l'expression de la pression, on peut utiliser la première équation du système 3.19 et l'expression ci-dessus de v_r^* . On trouve :

$$\frac{dp^*}{dr} = -\omega . \rho . A . I_1(kr)$$

Puisque $I_0' = I_1$, on obtient :

$$p^* = \frac{-\omega \rho A}{k} . I_0(kr) \quad (3.22)$$

Pour trouver la constante A , on va utiliser une condition aux limites cinématique : la vitesse de changement de rayon est égale à la composante radiale de la vitesse à la surface libre (en $r = R_0$) :

$$\frac{\partial R}{\partial t} = \vec{v} . \vec{n}$$

En vertu des équations 3.14 et 3.18, le membre de gauche s'écrit :

$$\frac{\partial R}{\partial t} = \frac{\partial \tilde{R}}{\partial t} = R^* . \omega . e^{\omega t + i k z}$$

et le membre de droite, qui n'est autre que \tilde{v}_r , s'écrit :

$$\vec{v} . \vec{n} = \tilde{v}_r = v_r^* . e^{\omega t + i k z}$$

En utilisant l'expression de v_r^* trouvée dans l'équation 3.21, on obtient :

$$A = \frac{R^* . \omega}{I_1(kR_0)}$$

de quoi on peut tirer l'expression de la pression :

$$p^* = \frac{-R^* \cdot \rho \cdot \omega^2}{k} \cdot \frac{I_0(kR_0)}{I_1(kR_0)} \quad (3.23)$$

On va poursuivre en écrivant une deuxième condition aux limites, de nature mécanique. La loi de Laplace donne :

$$\Delta p = \gamma \cdot \left[\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right]$$

où R_1 et R_2 sont les deux rayons de courbure principaux. La géométrie du système étudié permet d'écrire :

$$R_1 = R_0 + R^* \cdot e^{\omega t + i k z}$$

En effectuant un développement limité pour $R^* \ll R_0$, on peut écrire :

$$\frac{1}{R_1} = \frac{1}{R_0} - \frac{R^*}{R_0^2} \cdot e^{\omega t + i k z}$$

Par ailleurs, le second rayon de courbure principal peut se calculer par :

$$R_2 \equiv -\frac{\partial^2 \tilde{R}}{\partial z^2}$$

et donc :

$$\frac{1}{R_2} = R^* \cdot k^2 \cdot e^{\omega t + i k z}$$

On en déduit l'expression de la différence de pression de part et d'autre de l'interface :

$$\Delta p = \frac{\gamma}{R_0} - \gamma \cdot R^* \cdot e^{\omega t + i k z} \cdot \left[\frac{1}{R_0^2} - k^2 \right]$$

Or, comme la pression est considérée comme nulle à l'extérieur du cylindre, on a :

$$\Delta p = (p_0 + \tilde{p}) - 0 \quad \text{avec} \quad p_0 = \frac{\gamma}{R_0}$$

On en déduit l'expression suivante de \tilde{p} :

$$\tilde{p} = \frac{-\gamma \cdot R^*}{R_0^2} \cdot \left[\frac{1}{R_0^2} - k^2 \right] \cdot e^{\omega t + i k z}$$

Par ailleurs, les équations 3.18 et 3.23 permettent d'écrire :

$$\tilde{p} = p^* \cdot e^{\omega t + i k z} \quad \text{avec} \quad p^* = \frac{-R^* \cdot \rho \cdot \omega^2}{k} \cdot \frac{I_0(kR_0)}{I_1(kR_0)}$$

En comparant les deux expressions de \tilde{p} , on tire :

$$\frac{\rho \cdot \omega^2}{k} \cdot \frac{I_0(kR_0)}{I_1(kR_0)} = \frac{\gamma}{R_0^2} \cdot [1 - (kR_0)^2]$$

Cette expression n'est rien d'autre que la **relation de dispersion** $\omega(k)$:

$$\omega_{(k)}^2 = \frac{\gamma}{R_0^2} \cdot \frac{I_0(kR_0)}{I_1(kR_0)} \cdot [1 - (kR_0)^2] \quad (3.24)$$

Cette équation n'admet de solution que si $kR_0 < 1$. Puisque le nombre d'onde k est lié à la longueur d'onde λ par la relation $k = 2\pi/\lambda$, cela revient à dire que le cylindre de liquide est toujours stable si la longueur d'onde de la perturbation est inférieure au périmètre du jet ($2\pi R_0$) ou encore que le cylindre se déstabilise

si et seulement si la longueur d'onde est supérieure au périmètre.

La figure ?? montre que le taux de croissance ω est maximal pour un nombre d'onde k_{max} . Une résolution numérique de la relation de dispersion conduit à la relation :

$$k_{max}.R_0 \approx 0,697 \quad \text{et} \quad \omega_{max} = 0,34.\sqrt{\frac{\gamma}{\rho.R_0^3}}$$

Par conséquent, la longueur d'onde qui va croître le plus vite est :

$$\lambda_{max} \approx 9,02.R_0$$

La déstabilisation du cylindre va conduire à sa fragmentation en gouttelettes dont le volume V_g est égal à la partie de cylindre de rayon R_0 et de longueur λ_{max} . Par conséquent, le diamètre des gouttes formées sera :

$$D_g \approx 1,76.D_0 \quad \text{avec} \quad D_0 \equiv 2.R_0$$

On peut estimer le temps caractéristique de fragmentation :

$$\tau_{frag} \approx \frac{2\pi}{\omega_{max}}$$

Si le jet se déplace parallèlement à lui-même à la vitesse v_0 (situation d'un jet sortant d'un réservoir pressurisé par un orifice circulaire), alors la distance parcourue avant fragmentation (*pinch-off distance* en anglais) est :

$$L_{frag} = \frac{v_0}{\tau_{frag}}$$

Enfin, si l'on veut exciter la bonne longueur d'onde et contrôler ainsi l'instabilité de Rayleigh, on pourra utiliser une vibration mécanique (ex : piezo-électrique) de fréquence :

$$f_{excit} \equiv \frac{v_0}{\lambda_{max}} \quad \text{soit} \quad f_{excit} = \frac{v_0}{4,51.D_0}$$

Numériquement, pour un jet de $80 \mu\text{m}$ de diamètre sortant d'un réservoir à 10 m.s^{-1} , la fréquence d'excitation est de 49 kHz et les gouttes ont un diamètre de $140 \mu\text{m}$.

3.4.1 Complément

The cylindrical jet of water will be subject to perturbations of different wave number components. One component is illustrated in Figure 3, where its crests and troughs are seen. Figure 3 : A simplified diagram showing the opposing effects of surface tension. From equation (4), we see that surface tension depends on the two radii of curvature; in the case of the cylinder, R1 is the radius of the cylinder at that point, while R2 is the radius of curvature of the waves along the z-axis. Thus, $1/R1$ is higher at troughs than at crests, creating a pressure which pushes the fluid from troughs to crests. However, R2 shows the opposite relation : R2 is positive at crests and negative at troughs, which opposes the contribution of R1 in (4). Hence the two contributions oppose each other. The phenomenon depends on which of the two contributions dominates over the other. The components that grow with time and cause the break-up of the jet are those for which the radius of curvature of the cylinder is greater than that of the wave.

3.5 L'oscillateur de Van der Pol

Balthazar Van der Pol a décrit les oscillations d'un circuit électrique doté d'une lampe dont la résistance dépend de l'intensité du courant qui y passe. Deux applications sont accessibles sur internet pour visualiser cet oscillateur : [ici](#) et [ici](#). Les équations sont :

$$m\ddot{x} + 2\mu(x^2 - 1)\dot{x} + kx = 0 \quad \text{soit} \quad \begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = \frac{-1}{m} \cdot [2\mu(x_1^2 - 1) \cdot x_2 + k \cdot x_1] \end{cases} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} x_1 \equiv x \\ x_2 \equiv \dot{x} \end{cases} \quad (3.25)$$

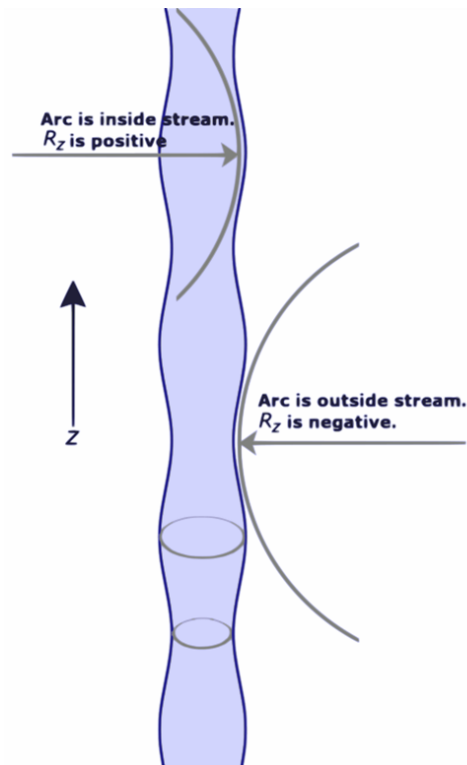


FIGURE 3.5 – Schéma n°1.

3.6 Systèmes proies-prédateurs

Les systèmes proies-prédateurs sont décrits par des modèles démographiques :

- modèle de Lotka-Volterra : développé en 1926 afin d'expliquer les oscillations de la population de poisson dans l'Adriatique. Il repose sur les équations suivantes $\dot{N} = aN - bPN$ et $\dot{P} = -dP + cNP$ où N désigne les proies, P les prédateurs et où les paramètres a, b, c, d sont des coefficients constants.
- modèle de Rosenzweig-MacArthur

Une application sur internet accessible [ici](#) illustre le système de 2 proies et 1 prédateur et sa sensibilité aux conditions initiales.

3.7 Illustrations

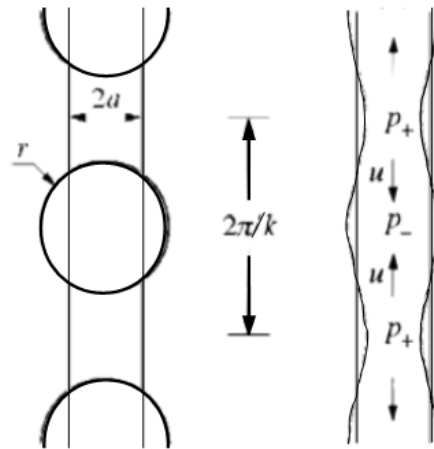


FIGURE 3.6 – Schéma n°2.

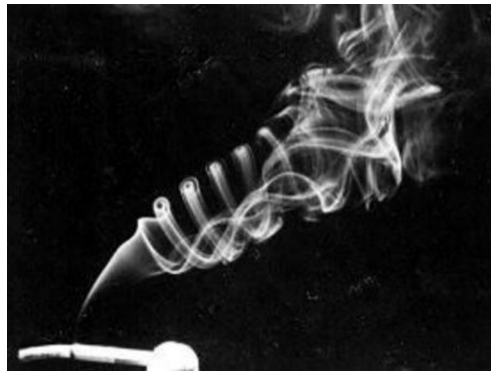


FIGURE 3.7 – Fumée de cigarette. On distingue trois régimes d'écoulement : laminaire, transition, turbulent.



FIGURE 3.8 – Instabilité de Kelvin-Helmholtz : cisaillement de deux fluides de densités différentes.

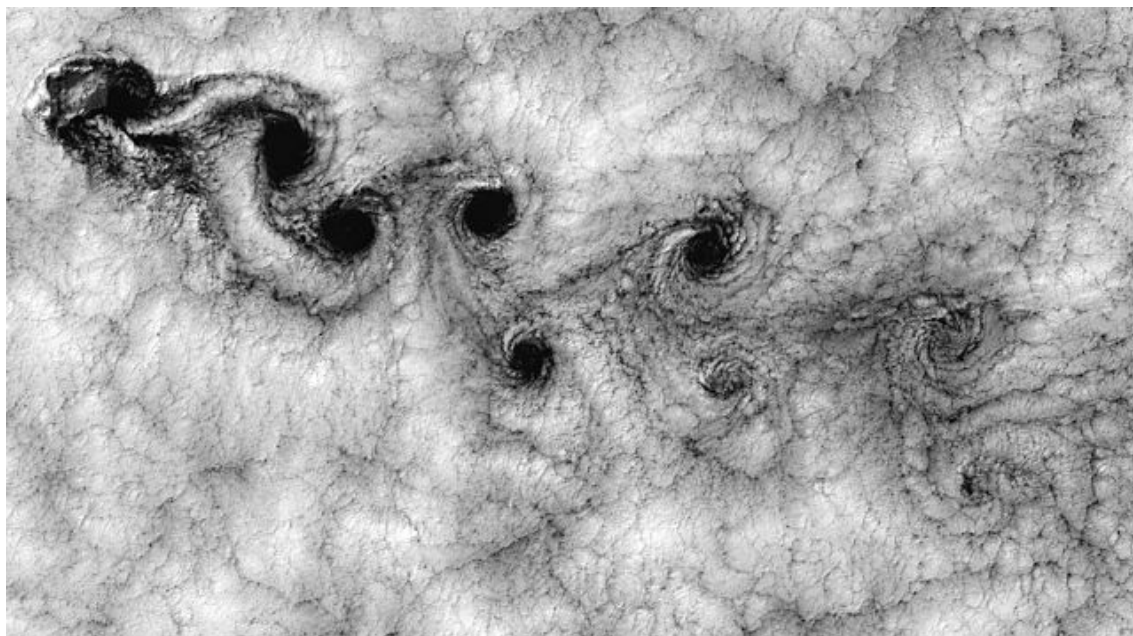


FIGURE 3.9 – Allée de tourbillons de von Karman.

Chapitre 4

Annexe

4.1 Méthode des caractéristiques

Pour transformer une EDP du premier ordre en EDO du premier ordre, on utilise la **méthode des caractéristiques** qui consiste à identifier une courbe (dite caractéristique) le long de laquelle l'EDP se réduit à une EDO du premier ordre.

Par exemple, on considère un système décrit par l'EDP d'ordre 1 suivante :

$$\frac{\partial f}{\partial t} + c \cdot \frac{\partial f}{\partial x} = 0 \quad \text{avec} \quad f(x, t = 0) = f_0(x) \quad (4.1)$$

où c est une constante. On cherche une courbe dans le plan $x-t$ le long de laquelle l'EDP se réduit à une EDO du premier ordre. Si l'on note s l'abscisse curviligne qui repère une position sur cette courbe caractéristique, cela revient à chercher $x(s)$ et $t(s)$ tels que $\frac{df}{ds}$ soit de la forme $a \cdot f + b$. On convient que $t(s = 0) = 0$ et l'on note $x_0 \equiv x(s = 0)$.

La dérivée de f le long de cette courbe est :

$$\frac{df}{ds} = \frac{dt}{ds} \cdot \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{dx}{ds} \cdot \frac{\partial f}{\partial x} \quad (4.2)$$

Par identification des membres de droite des équations 4.1 et 4.2, on voit qu'une courbe caractérisée par :

$$\begin{cases} \frac{dt}{ds} = 1 \\ \frac{dx}{ds} = c \end{cases} \quad (4.3)$$

permet d'écrire :

$$\frac{df}{ds} = \frac{\partial f}{\partial t} + c \cdot \frac{\partial f}{\partial x} \quad (4.4)$$

et donc :

$$\frac{df}{ds} = 0 \quad (4.5)$$

ce qui est bien une EDO du premier ordre. En résumé, l'EDP 4.1 se transforme en EDO du premier ordre 4.5 le long de la courbe caractéristique décrite par le système 4.3. Cette courbe n'est autre que la droite d'équation :

$$x = c \cdot t + x_0 \quad (4.6)$$

La résolution de l'équation 4.5 conduit à :

$$\forall s \quad f(s) = \text{constante} \quad (4.7)$$

On sait que $f = f_0$ pour $t = 0$ et donc pour $s = 0$. Par conséquent, on a :

$$\forall s \quad f(s) = f_0 \quad (4.8)$$

Si l'on cherche la valeur de f pour un couple (x, t) donné, on identifie la courbe caractéristique qui passe par ce point et la valeur de l'abscisse curviligne s en ce point. Ici, il s'agit de la droite d'équation 4.6 et l'abscisse s est égale à t . L'équation 4.8 permet de trouver la valeur de f en ce point. Ici, $f(s)$ est égal à $f(s = 0)$ soit $f(x = x_0, t = 0)$ c'est-à-dire $f_0(x_0)$. Compte-tenu de l'équation 4.6, cela permet d'écrire :

$$\forall (x, t) \quad f(x, t) = f_0(x - c.t) \quad (4.9)$$

4.2 Loi de Laplace

4.2.1 Considérations géométriques

4.2.1.1 Dimension 2

Considérons une courbe dans un plan 2D. Cette courbe sépare localement un milieu (a) d'un milieu (b). En chaque point de la courbe, on peut définir un unique cercle tangent de rayon $R > 0$. Ce cercle tangent est appelé **cercle osculateur**. On définit la **courbure locale** κ_{ab} par la relation :

$$\kappa_{ab} \equiv \frac{1}{R} \cdot \delta \quad \text{avec} \quad \delta \equiv \begin{cases} +1 & \text{si le centre du cercle osculateur est dans le milieu (a)} \\ -1 & \text{si le centre du cercle osculateur est dans le milieu (b)} \end{cases}$$

Contrairement au rayon d'un cercle (toujours positif), une courbure est une grandeur algébrique (positive ou négative).

4.2.1.2 Dimension 3

Considérons une surface dans un espace de dimension 3. Cette surface sépare localement un milieu (a) d'un milieu (b). La **courbure moyenne** H_{ab} est une grandeur algébrique définie par :

$$H_{ab} \equiv \frac{1}{2\pi} \cdot \int_0^{2\pi} \kappa_{ab}(\theta) \cdot d\theta \quad (4.10)$$

où κ_{ab} est la courbure locale de la courbe obtenue en prenant l'intersection entre la surface et un plan contenant l'axe normal à la surface. Evidemment, la courbure locale dépend de la position angulaire θ du plan. Une illustration est donnée sur [ce site web](#).

Il y a deux formules classiquement utilisées pour éviter le calcul de l'intégrale.

Variante n°1. En utilisant le théorème d'Euler ([Wikipedia](#)), on peut montrer que la courbure moyenne est la moyenne arithmétique des valeurs minimale et maximale de $\kappa_{ab}(\theta)$:

$$H_{ab} = \frac{\min(\kappa_{ab}) + \max(\kappa_{ab})}{2}$$

Ces deux courbures sont appelées **courbures principales**. Elles sont liées aux **rayons de courbure principaux** :

$$\begin{cases} R_{ab,1} & \equiv \frac{1}{\min(\kappa_{ab})} \\ R_{ab,2} & \equiv \frac{1}{\max(\kappa_{ab})} \end{cases}$$

Il s'ensuit que la courbure moyenne s'écrit :

$$H_{ab} = \frac{1}{R_{ab,1}} + \frac{1}{R_{ab,2}}$$

Variante n°2. On peut également montrer que la courbure moyenne est liée à la divergence du vecteur normal unitaire par la relation :

$$2 \cdot H_{ab} = \nabla \cdot \vec{n}_{a \rightarrow b}$$

où $\vec{n}_{a \rightarrow b}$ est dirigée du milieu (a) vers le milieu (b). Lorsque la surface est donnée par une relation de la forme $f(x, y, z) = 0$, le vecteur unitaire est lié au gradient de f par :

$$\vec{n} = \frac{\nabla f}{\|\nabla f\|}$$

A titre d'exemple, lorsque la surface étudiée est la demi-sphère supérieure centrée à l'origine, l'équation de la surface s'énonce $f(x, y, z) = 0$ avec $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - R^2$. Si l'on désigne par (a) le milieu au creux de la demi-sphère, alors $\vec{n}_{a \rightarrow b} = \frac{1}{R} \cdot (x, y, z)$ et $\nabla \cdot \vec{n}_{a \rightarrow b} = 3/R$. Le caractère positif de la divergence est cohérent avec le fait que le milieu (a) est au creux de la surface.

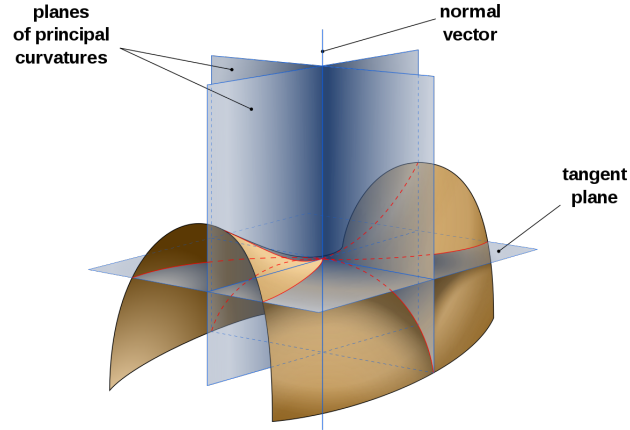


FIGURE 4.1 – Rayons de courbure principaux (source Wikipedia).

4.2.2 Exemple des surfaces de révolution

En dimension 3, considérons une surface de révolution autour de l'axe (Oz). La surface est alors décrite par l'équation :

$$z(x, y) = z(r) \quad \text{avec} \quad r \equiv \sqrt{x^2 + y^2}$$

Désignons par (a) le milieu à l'intérieur de la surface (par exemple en $r = 0$) et par (b) le milieu à l'extérieur de la surface. Dans ce cas, on peut montrer (voir [ce site web](#)) que les rayons de courbure principaux sont :

$$\begin{cases} \frac{1}{R_{ab,1}} = \frac{-z''}{(1+z'^2)^{3/2}} \\ \frac{1}{R_{ab,2}} = \frac{-z'}{r \cdot (1+z'^2)^{1/2}} \end{cases} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} z' \equiv \frac{dz}{dr} \\ z'' \equiv \frac{d^2z}{dr^2} \end{cases}$$

et en déduire la courbure principale :

$$H_{ab} = \frac{-z''}{(1+z'^2)^{3/2}} + \frac{-z'}{r \cdot (1+z'^2)^{1/2}}$$

Étudions quelques cas particuliers :

- sphère $z(r) = \sqrt{R^2 - r^2}$. On trouve $H_{ab} = 2/R$
- cône devenant cylindre $z(r) = a \cdot [\sqrt{r} - R]$ avec $a \rightarrow \infty$. On trouve $H_{ab} = 1/R$
- plan. On trouve $H_{ab} = 0$

4.2.3 Loi de Laplace

A cause des forces intermoléculaires, la pression est plus élevée du côté concave (à l'intérieur) que du côté convexe (à l'extérieur). Ce constat expérimental est valide que l'intérieur soit gazeux (bulle) ou bien liquide (goutte).

La loi de Laplace (parfois appelée loi de Young-Laplace) établit un lien entre la différence de pression et la tension de surface γ :

$$p_a - p_b = 2\gamma \cdot H_{ab} \quad (4.11)$$

4.3 Fonctions de Bessel modifiées

Soit l'équation différentielle faisant intervenir la fonction $y(x)$:

$$x^2 \cdot \frac{d^2 y}{dx^2} + x \cdot \frac{dy}{dx} - (\alpha^2 + x^2) \cdot y = 0 \quad (4.12)$$

Les solutions de cette équation sont les combinaisons linéaires des fonctions de Bessel modifiées d'ordre α : I_α et K_α . Parmi les différentes propriétés, retenons que I_α est exponentiellement croissante depuis $x = 0$ où elle s'annule et que K_α est exponentiellement décroissante depuis $x = 0$ où elle diverge vers $+\infty$. Les définitions sont :

$$I_\alpha(z) = \frac{1}{\pi} \cdot \int_0^\pi e^{z \cdot \cos \theta} \cdot \cos(\alpha \theta) \cdot d\theta$$

On notera également que :

$$I'_0(z) = I_1(z)$$

