

100-001
100-002 C
100-003

Enciclopedia de la **ELECTRONICA** **INGENIERIA Y TECNICA**

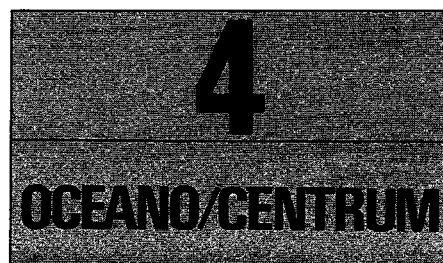
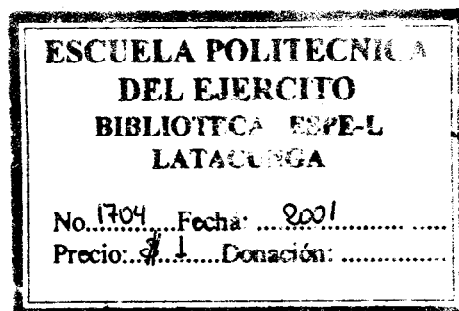
Charles Belove

**Departamento de Ingeniería Eléctrica y Computación
Florida Atlantic University
Boca Raton, Florida**

Director de la versión en español

Francisco Paniagua B., I.M.E.

Universidad Nacional Autónoma de México
Consultor Editorial de Ingeniería Eléctrica
Miembro de la U.S. Metric Association



Es una obra del
GRUPO EDITORIAL OCEANO

Presidente

José Lluís Monreal

Director General

José M.^a Martí

Director General de Publicaciones

Carlos Gispert



Versión española de la edición original de Charles Belove "Handbook of Modern Electronics and Electrical Engineering" publicada por John Wiley & Sons, Nueva York, EE.UU.

VERSIÓN ORIGINAL

Consejo Editorial: Phillip Hopkins

Lockheed Engineering and
Management Services, Co., Inc.
Houston, Texas

Milton Rosenstein

New York Institute of Technology
Old Westbury, Nueva York

Edward Nelson

New York Institute of Technology
Old Westbury, Nueva York

Stanley Shinnars

Jericho, Nueva York

VERSIÓN ESPAÑOLA

Supervisión Editorial: Pedro Basurto Samperio

Edición: Begoña Robles

Dirección Editorial: Marta Bueno

Traducción: Roberto Palacios Martínez

Licenciado en Ciencias
Universidad Autónoma de Baja
California

Juan Carlos Vega Fagoaga

Ingeniería en Sistemas

Hugo Villagómez Velázquez

Licenciado en Física y Matemáticas
Instituto Politécnico Nacional, México
Doctor en Ciencias
Universidad de París, Francia

José Rafael Blengio Pinto

Médico Cirujano
Universidad Nacional Autónoma
de México

M.^a Dolores García Díaz

Traductora Especializada en Ciencias

© MCMLXXXVI Edición Original John Wiley & Sons, Inc.

© MCMXC Edición Española Ediciones Centrum Técnicas y Científicas

Paseo de Gracia, 26 — 08007 Barcelona — España

Tel. (93) 301 01 82 — Télex 51 735 exit e — Fax (93) 317 97 01

Reservados todos los derechos. Quedan rigurosamente prohibidas, sin la autorización escrita de los titulares del copyright, bajo las sanciones establecidas en las leyes, la reproducción total o parcial de esta obra por cualquier medio o procedimiento, comprendidos la reprografía y el tratamiento informático, y la distribución de ejemplares de ella mediante alquiler o préstamo públicos.

ISBN Edición española obra completa: 84-7841-016-3

ISBN Edición española volumen 4: 84-7841-020-1

ISBN Edición original: 0-471-09754-3

Impreso en España — Printed in Spain

Depósito legal B: 2007-91 (En)

Imprime: HUROPÉ, S.A.

Recaredo, 2-4 Barcelona

Índice de capítulos

SEXTA PARTE (CONTINUACIÓN) CIRCUITOS DIGITALES

30. Dispositivos de funciones digitales y aritméticas, 813

Peter Graham

Introducción, 814

Contadores, 814

Cronómetros (temporizadores), 820

Multicanalizadores, 827

Decodificadores, codificadores y convertidores de código, 830

Dispositivos de aritmética binaria, 833

31. Convertidores de digital a analógico (D/A) y de analógico a digital (A/D), 839

Michael Baltrush

Convertidores D/A de resistores ponderados en escalera ponderada, 840

Especificaciones de convertidores D/A, 841

Convertidores A/D en paralelo y de aproximación sucesiva, 844

Convertidores A/D de conteo (rampa), 845

Especificaciones de los convertidores A/D, 848

32. Filtros digitales, 849

Thomas W. Parsons

Descripción, 850

Estructuras, 853

Representación numérica y efectos de cuantización, 857

Técnicas de diseño de filtros de respuesta de pulso infinita (IIR), 861

Técnicas de diseño de filtros de respuesta de pulso finita (FIR), 865

SÉPTIMA PARTE INGENIERÍA DE SISTEMAS, CONTROL AUTOMÁTICO Y MEDICIONES

33. Ingeniería de sistemas, 875

Richard G. Costello

Definición de sistema, 876

Clasificación de sistemas por función, 876

Sistemas de control, 877

Sistemas de cálculo, 877

Sistemas de comunicación, 877

Sistemas administrativos, 878

Sistemas de control con operador humano, 883

Clasificación de sistemas por modelo matemático, 893

Resumen del proceso de diseño de sistemas, 899

34. Control automático, 903

Richard G. Costello

Introducción, 904

Control automático clásico, 904

Representaciones de los sistemas clásicos de control, 910

Análisis y compensación de sistemas
clásicos de control, 918
Control de datos muestreados, 974
Teoría de la transformada z de los
sistemas de control, 975
Diagramas de bloques de la transformada
 z con elementos de retención, 988
Transformada z modificada, $F(z, m)$, 993
Control no lineal, 997
Control moderno, 1025
Técnicas de control óptimo, 1031
Cálculo de variaciones, 1035

Programación dinámica, 1039
Método del multiplicador
de Lagrange, 1044

**35. Aplicaciones de los sistemas
de control, 1049**

Roger D. Fruechte y Thomas E. Marlin

Sistemas de control de automóviles, 1050
Sistemas de control de procesos
industriales, 1065

CAPÍTULO 30

Dispositivos de funciones digitales y aritméticas

Peter Graham

Florida Atlantic University
Boca Raton, Florida

30.1 Introducción

30.2 Contadores

- 30.2.1 Definiciones asociadas con las salidas
- 30.2.2 Definiciones asociadas con la entrada del pulso
- 30.2.3 Entradas y salidas de control
- 30.2.4 Contadores de división entre N
- 30.2.5 Diseño de contadores sincrónicos

30.3 Cronómetros (temporizadores)

- 30.3.1 Cronómetros (temporizadores) de corta duración
- 30.3.2 Cronómetros (temporizadores) digitales

30.4 Multicanalizadores

- 30.4.1 Multicanalizadores en el diseño de lógica combinatoria.

30.5 Decodificadores, codificadores y convertidores de código

- 30.5.1 Aplicaciones del decodificador
- 30.5.2 Aplicaciones del codificador
- 30.5.3 Aplicaciones del convertidor de código

30.6 Dispositivos de aritmética binaria

- 30.6.1 Sumadores
- 30.6.2 Sustractores
- 30.6.3 Multiplicadores
- 30.6.4 División

30.1 INTRODUCCIÓN

En los capítulos 28 y 29 se analizaron algunos dispositivos de lógica, tales como las compuertas y multivibradores biestables, que suelen describirse como circuitos integrados a pequeña escala (SSI). En este capítulo se presentan circuitos que constan de interconexiones de varias compuertas, multivibradores biestables o ambos, que constituyen dispositivos de integración a mediana escala (MSI) comúnmente usados como bloques fundamentales de los sistemas digitales. Entre éstos se incluyen los contadores, cronómetros, codificadores, decodificadores y la unidad lógica y aritmética. Se presentan ejemplos para indicar la diversidad de dispositivos disponibles, dándose algunas aplicaciones que ilustran la forma en que el uso de estos dispositivos reduce el costo total del paquete del sistema.

30.2 CONTADORES

Un contador de módulo N simple es un circuito secuencial que cambia de estado con cada pulso sucesivo en su entrada única, generando una secuencia prescrita de N estados diferentes dentro del circuito y que repite esta secuencia para cada conjunto de N pulsos de entrada¹. Los N estados de la memoria son implementados por M multivibradores biestables ($M \geq \log_2 N$), que se sincronizan en respuesta a los pulsos de entrada del contador. (Véase en el capítulo 29, sección 29.1, una descripción de los multivibradores biestables sincronizados.)

Todas las entradas de control de los multivibradores están conectadas internamente y son funciones lógicas adecuadas de las salidas de los multivibradores, como se ilustra en la figura 30-1. Las salidas del contador también son funciones de los estados de los multivibradores.

La mayor parte de los contadores tienen, además de la línea de entrada del pulso, una o más entradas que controlan la operación del contador de alguna manera. Muchos de los contadores (pero no todos) tienen asimismo un número suficiente ($\geq \log_2 N$) líneas de salida para identificar todos los N estados de la secuencia. Se dispone de contadores de diversas formas en pastillas de circuitos integrados a mediana escala (MSI) en las tres tecnologías MSI más difundidas, a

saber lógica transistor-transistor (TTL), lógica acoplada al emisor (ECL) y lógica de semiconductores de metal y óxido complementarios (CMOS) (cap. 28). La clasificación de estos contadores requiere varias definiciones.

30.2.1 Definiciones asociadas con las salidas

Los contadores con líneas de salida suficientes para codificar los N estados generan una secuencia de salidas de módulo N . El método estándar de caracterización de una secuencia de salida es el ordenamiento de líneas de salida para representar bits de un número binario, del bit menos significativo (LSB) al bit más significativo (MSB). La secuencia de salida puede identificarse entonces con una secuencia de números binarios que define el "código de salida" de ese contador.

Los dos códigos de salida más usados conducen a las siguientes definiciones de contadores:

- **Contador binario de M etapas (o M bits).** Contador de módulo N ($N = 2^M$), cuyas M salidas generan la secuencia de números binarios naturales.
- **Contador de decenas en decimal codificado en binario (BCD, de *binary coded decimal*).** Contador de módulo 10 y 4 etapas, cuyas cuatro salidas generan el equivalente binario de la secuencia de números decimales del 0 al 9.

Cada uno de los contadores anteriores cuenta en la secuencia binaria natural. El contador de decenas es en realidad un contador binario especial de módulo 10. En asociación con cada uno se tienen las siguientes definiciones simples:

- **Contador ascendente.** Contador que produce la secuencia binaria natural de números en orden creciente.
- **Contador descendente.** Contador que recorre los números binarios naturales en orden decreciente.

Si un contador binario o BCD no se identifica como alguno de los anteriores, suele tratarse de un contador ascendente.

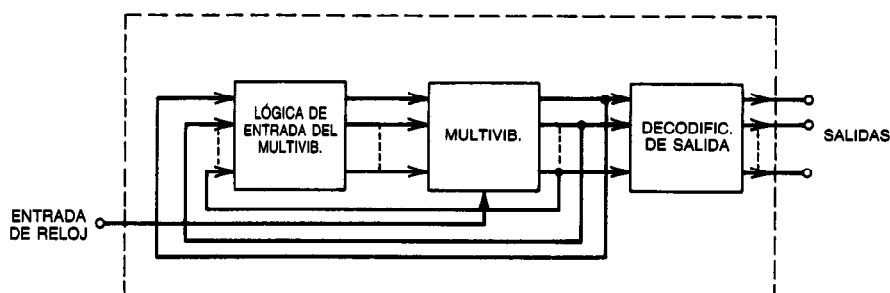
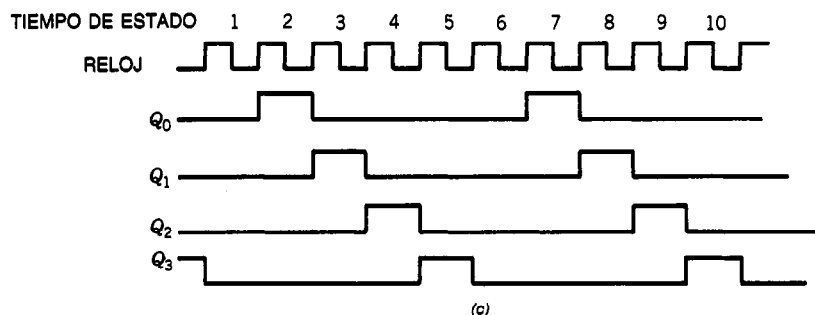


Fig. 30-1. Diagrama de bloques de un contador de modo único.

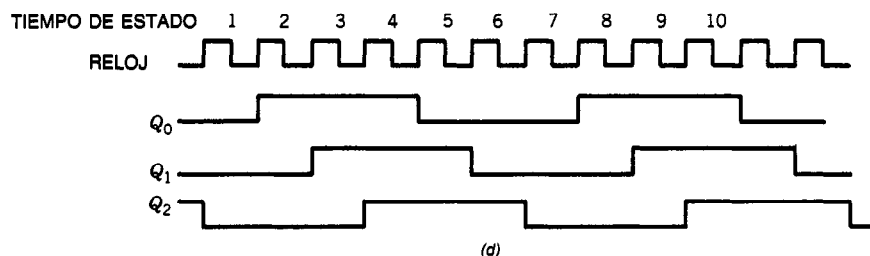
Q_3	Q_2	Q_1	Q_0	Q_3	Q_2	Q_1	Q_0	Q_2	Q_1	Q_0	Q_2	Q_1	Q_0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	1	1	0	0
0	0	1	0	0	1	0	0	0	1	1	1	1	0
0	1	0	0	0	0	1	0	1	1	1	1	1	1
1	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	0	1	1
<hr/>				<hr/>				<hr/>			<hr/>		
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

(a)

(b)



(c)



(d)

Fig. 30-2. a) Dos versiones del conteo en anillo estándar. b) Dos versiones del conteo en anillo torcido. c) Diagrama de relaciones de tiempo del anillo estándar. d) Diagrama de relaciones de tiempo del anillo torcido.

El contador en anillo o anular (o contador de Johnson) es otro tipo de contador que se identifica con una forma de salida particular¹. Se pueden definir dos tipos de contadores en anillo:

- **Contador de módulo N de anillo estándar.** Contador con N líneas de salida, ordenadas de la Q_0 a la Q_{N-1} , que se eligen secuencialmente en el estado HIGH (alto); cada una corresponde a un periodo de pulso de entrada.
- **Contador de módulo N de anillo torcido.** Contador con N líneas de salida, ordenadas de la Q_0 a la Q_{N-1} , donde cada una se sostiene en el estado HIGH (alto) en $N/2$ periodos de pulso de entrada consecutivos. Los cambios de nivel de las salidas ocurren en serie, donde Q_i se desplaza un pulso de reloj antes que Q_{i+1} .

Las dos últimas definiciones se aclaran en la figura 30-2 mediante el uso de contadores de módulo 5 y módulo 6, respectivamente.

30.2.2 Definiciones asociadas con la entrada del pulso

En los libros de datos que incluyen especificaciones de contadores suele hacerse referencia a las líneas de entrada de conteo, como la "entrada del pulso de reloj" o, algunas veces en forma más simple, como la "entrada de reloj". Aquí se usará el segundo término.

La cuenta de algunos contadores avanza cuando la entrada de reloj cambia de LOW a HIGH, mientras que otros avanzan en el cambio de HIGH a LOW. Éstas se denominan, respectivamente, entradas iniciadas por el flanco ascendente y por el flanco descendente. Se dice que algunos contadores tienen ambas opciones (por ejemplo, el 4017B), pero esto se logra mediante la provisión de una entrada aparte que simplemente invierte el pulso que entra antes de aplicarlo al contador. El diseñador debe reconocer esto cuando verifique posibles problemas de sincronización en un sistema que emplee la entrada por el flanco descendente.

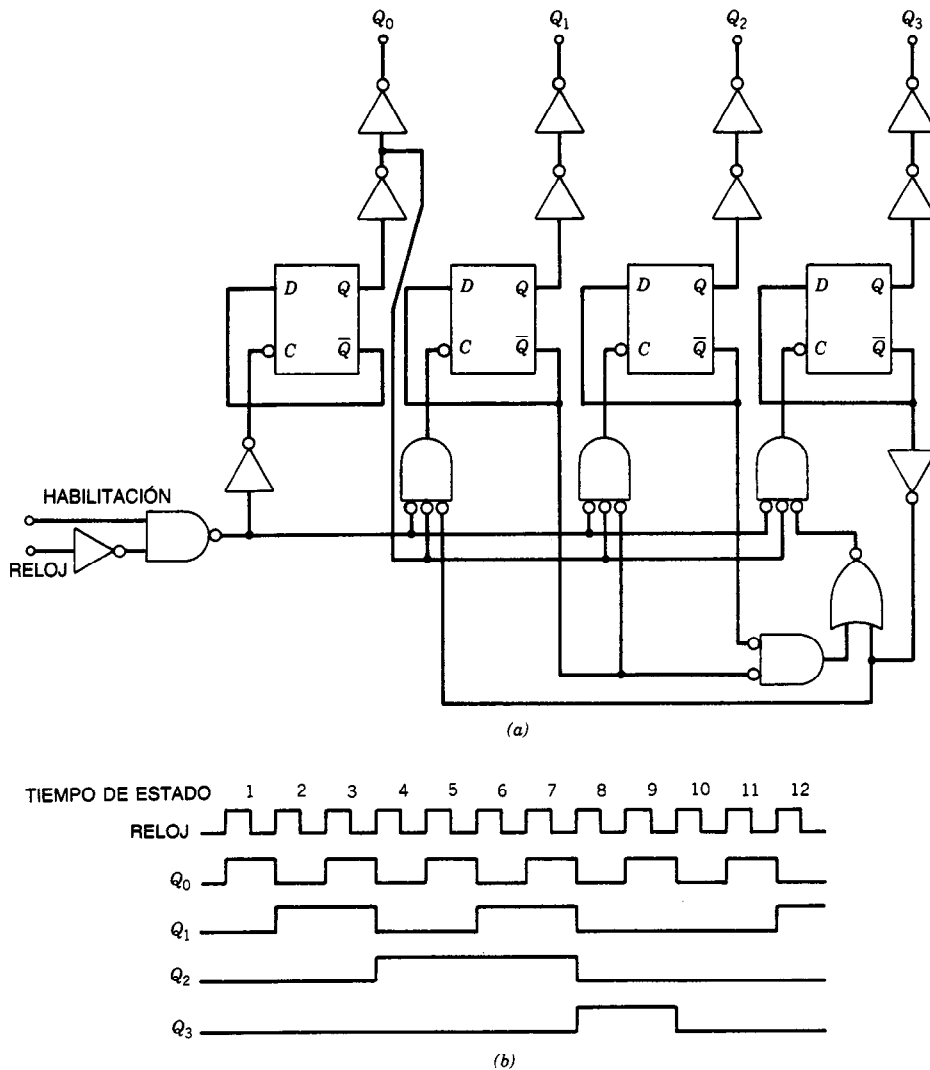


Fig. 30-3. a) Contador de decenas sincrónico 4518B de semiconductores de metal y óxido complementarios (CMOS); no se muestra la recolocación. b) Diagrama de relaciones de tiempo de la secuencia de conteo (entrada de habilitación HIGH).

Se deben establecer dos distinciones importantes respecto a la operación interna de los contadores. Éstas llevan a las dos definiciones siguientes:

- **Contador sincrónico.** Contador cuya entrada de reloj se aplica a todas las entradas de reloj del multivibrador de la memoria de estado, de manera que todos los multivibradores destinados a cambiar de estado en un pulso de entrada determinado lo hagan en forma simultánea. En la figura 30-3 se da un ejemplo.
- **Contador de transporte ondulante.** Contador cuya entrada de reloj se aplica solamente al multivibrador de almacenamiento del bit menos significativo, donde la salida del multivibrador del

LSB activa la entrada de reloj al siguiente multivibrador que está después del LSB, y así sucesivamente, como se muestra en la figura 30-4.

Los contadores de transporte ondulante encapsulados MSI utilizan invariablemente multivibradores amo-esclavo que cambian de estado en el flanco descendente de la entrada de reloj del multivibrador. En consecuencia, estos contadores avanzan en el flanco descendente de la entrada de reloj del contador. Es importante advertir que como los multivibradores de contadores de transporte ondulante no cambian de estado en forma simultánea, tampoco lo hacen las salidas del contador. Por tanto, las funciones de lógica combinatoria de estas salidas están sujetas a interferencias

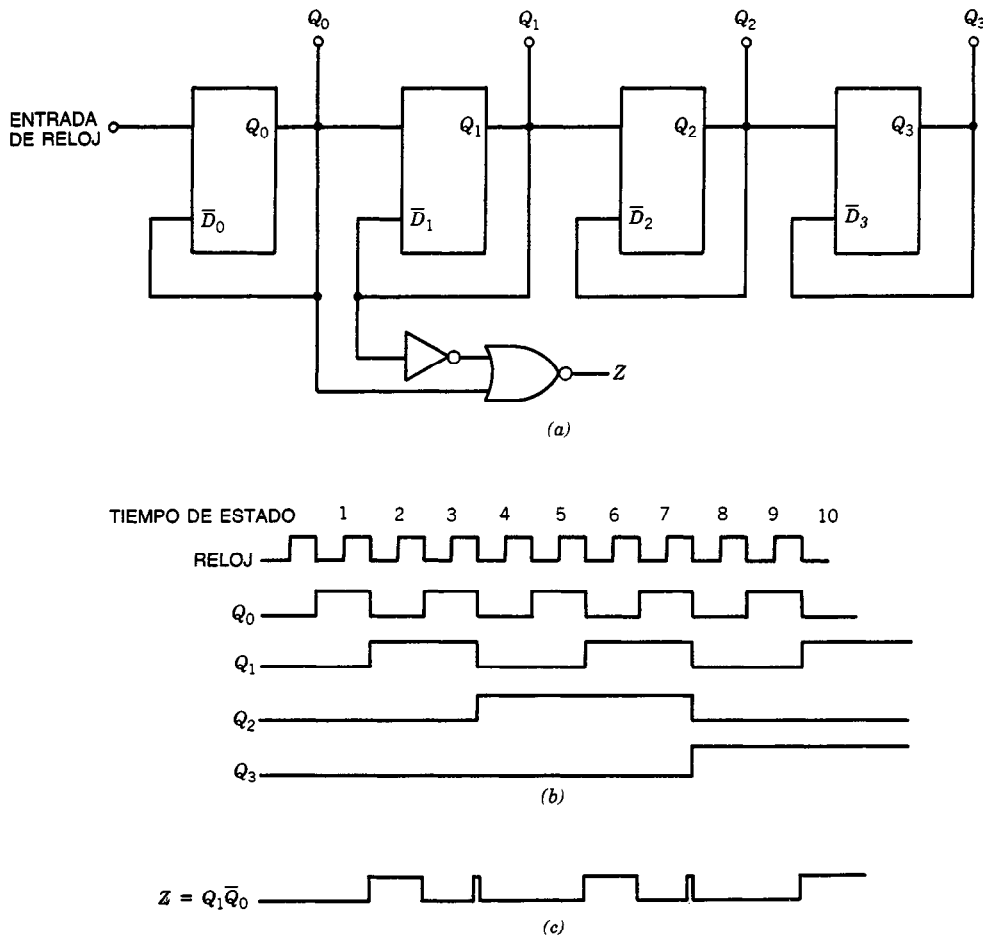


Fig. 30-4. a) Contador de transporte ondulante binario de cuatro fases 74C93 de semiconductores de metal y óxido complementarios (CMOS) con salida $Z = \bar{Q}_0 Q_1$. b) Diagrama de relaciones de tiempo de la secuencia de conteo. c) Diagrama de relaciones de tiempo que muestra una salida falsa.

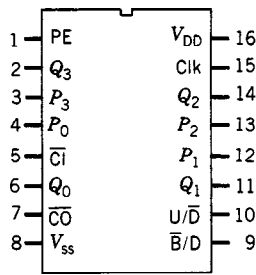
inesperadas de baja frecuencia y no se deben utilizar en aplicaciones asincrónicas, tales como las de recolocación o carga. Por ejemplo, considérese la función de salida $Z = Q_1 \bar{Q}_0$ del contador de transporte ondulante de la figura 30-4. Éste se encuentra legítimamente en el estado HIGH durante el tiempo 2 del estado del reloj. Sin embargo, al término (flanco final) del tiempo 3 del estado del reloj, el desplazamiento de Q_0 de HIGH a LOW conmuta Q_1 de HIGH a LOW. El retardo típico en la propagación para un multivibrador biestable (flip-flop) D CMOS que opera a 5 V es de 220 ns, de manera que el retardo en el desplazamiento descendente de Q_1 hace que Z cambie en forma ilegal al estado HIGH en ese periodo. Dado que el valor típico de la amplitud de pulso mínima para la recolocación asincrónica del mismo multivibrador es de sólo 65 ns^{2,3}, la interferencia de 220 ns podría tener consecuencias de gravedad.

En la mayor parte de los contadores sincrónicos (si no en todos) se utilizan multivibradores biestables dis-

parados por el flanco ascendente como elemento de almacenamiento, de modo que avanzan en el flanco ascendente del pulso de reloj, como se muestra en el diagrama de relaciones de tiempo de la figura 30-3b.

30.2.3 Entradas y salidas de control

Para ilustrar la diversidad de entradas y salidas de control de que se dispone en la tecnología MSI, se presenta el contador 4029B de CMOS (fig. 30-5). Este versátil contador se puede programar por medio de entradas de control para que constituya un contador ascendente o descendente (la entrada U/D), y para contar en módulo 10, en el BCD, o en módulo 16 en el binario natural (entrada B/D). Existen cuatro líneas de entrada de datos (P_0 a P_3 en la fig. 30-5) por medio de las cuales se puede cargar en el contador cualquier número binario de 4 bits. La carga ocurre cuando la entrada preajustable de habilitación (PE) es HIGH, independientemente del estado de la entrada de reloj.



(a)

\overline{CI}	U/\overline{D}	\overline{B}/D	PE	Acción
1	x	x	0	No hay conteo
0	1	0	0	Conteo ascendente en binario
0	1	1	0	Conteo ascendente en decenas
0	0	0	0	Conteo descendente en binario
0	0	1	0	Conteo descendente en decenas
x	x	x	1	Carga en paralelo

(b)

Fig. 30-5. a) Asignación de puntas de contacto del contador de semiconductores de metal y óxido complementarios (CMOS) 4029B. b) Tabla de verdad de las acciones de la entrada de control. x = no importa.

Esto se denomina carga asincrónica (en contraste con la carga sincrónica, que ocurre en el siguiente flanco ascendente de la entrada de reloj después de que se habilita el comando de carga). Cuando la entrada PE es HIGH el reloj se inhibe, de manera que el conteo no avanza hasta que pase a LOW la siguiente entrada ascendente de reloj después de la entrada PE. Cuando la entrada designada como entrada de transporte (\overline{CI}) es HIGH, también inhibe el reloj. El uso principal de esta entrada se da en la conexión en cascada de contadores para aplicaciones, como la que se presenta en la figura 30-6. La salida de transporte (\overline{CO}) pasa a LOW solamente cuando el contador llega a su cuenta máxima (1111 en binario, 1001 en BCD) en el modo de conteo ascendente. En el modo de conteo descendente ($U/\overline{D} = 0$), \overline{CO} se convierte en una salida de transporte negativo o "que pide prestado", que pasa a LOW sólo cuando el contador se encuentra en el estado 0000. Por tanto, el contador 2 de la figura 30-6 tiene su entrada de reloj habilitada sólo cuando el contador 1 contiene 1 000, de manera que el contador 2 disminuye sólo una vez por cada 10 pulsos de entrada. El nombre descriptivo completo del contador tipo 4029B es "contador sincrónico preajustable conectable en cascada, ascendente y descendente, binario y de decenas de cuatro etapas con carga asincrónica".

Se dispone de muchos contadores que poseen alguna o todas estas características, con variaciones. Algunos contadores tienen relojes separados para contar hacia arriba y hacia abajo. Como ya se ha indicado, otros tienen carga sincrónica; éstos, además, pueden tener borrado sincrónico o asincrónico (equivalente a cargar todos los ceros). La mayor parte de los contadores multimodales son binarios o BCD; algunos se pueden programar para que actúen como uno u otro (p. ej., el 4569B de CMOS).

Existen pastillas de integración a gran escala que constan de varios contadores. Un ejemplo es la 4534B de CMOS², pastilla de 24 puntas de conexión que tiene cinco contadores BCD en cascada, los cuales permiten contar en el intervalo decimal equivalente de 0 a 99 999. La pastilla sólo tiene cuatro líneas de salida, pero los multicanalizadores de la pastilla (sección 30.3), completos con el oscilador de barrido necesario, presentan en secuencia las salidas de los contadores a estas líneas en orden del LSB al MSB. Las líneas de

transporte positivo y de transporte negativo permiten la conexión en cascada de pastillas 4534B para obtener contadores de decenas de 10 cifras o más.

30.2.4 Contadores de división entre N

Muchas aplicaciones requieren que la frecuencia de un generador de pulsos de reloj se divida entre algún número entero. Conceptualmente, es fácil reconocer que también se puede hacer que un contador de módulo N divida entre N , puesto que el contador pasará por cualquier estado sólo una vez cada N pulsos de reloj. Por tanto, el diseño de un sistema de división entre N es equivalente a forzar un contador a entrar en el modo de módulo N deseado. Cualquier contador que tenga una recolocación asincrónica y una salida de cada etapa se puede forzar a regresar al estado cero desde cualquier otro estado mediante la activación de la recolocación con la lógica apropiada. Por ejemplo, un contador binario de módulo 16 se puede convertir en otro de módulo 10 activando la entrada de recolocación tan pronto como el MSB y el siguiente al LSB estén de manera simultánea en el estado HIGH. El efecto es que en el décimo pulso de reloj el contador entra momentáneamente en el estado 1010, activando su recolocación y cambiando a 0000 en los pocos nanosegundos que se necesitan para que la recolocación asincrónica sea efectiva. Se debe tener cuidado al aplicar este método para garantizar que la interferencia momentánea en el estado 1010 (fig. 30-7) no ocasione un problema. Además, se debe evitar la conexión en cascada de contadores de diferentes velocidades, por ejemplo, los TTL Schottky de baja potencia y los TTL Schottky, ya que los diferentes tiempos de recolocación pueden producir resultados inesperados.

Los contadores preajustables (también llamados precolocables) pueden conectarse para obtener un sistema de división entre N deseado mediante la conexión de niveles adecuados a las entradas de datos y el uso de salidas de transporte para sostener las entradas preajustables de habilitación (PE). En la figura 30-6 se muestran dos contadores binario/decenas y ascendente/descendente 4029 de CMOS conectados para dividir entre 71. Las entradas de control del modo se conectan para la operación de conteo descendente ($U/\overline{D} = 0$) en decenas ($\overline{B}/D = 0$), de manera que cada salida \overline{CO}

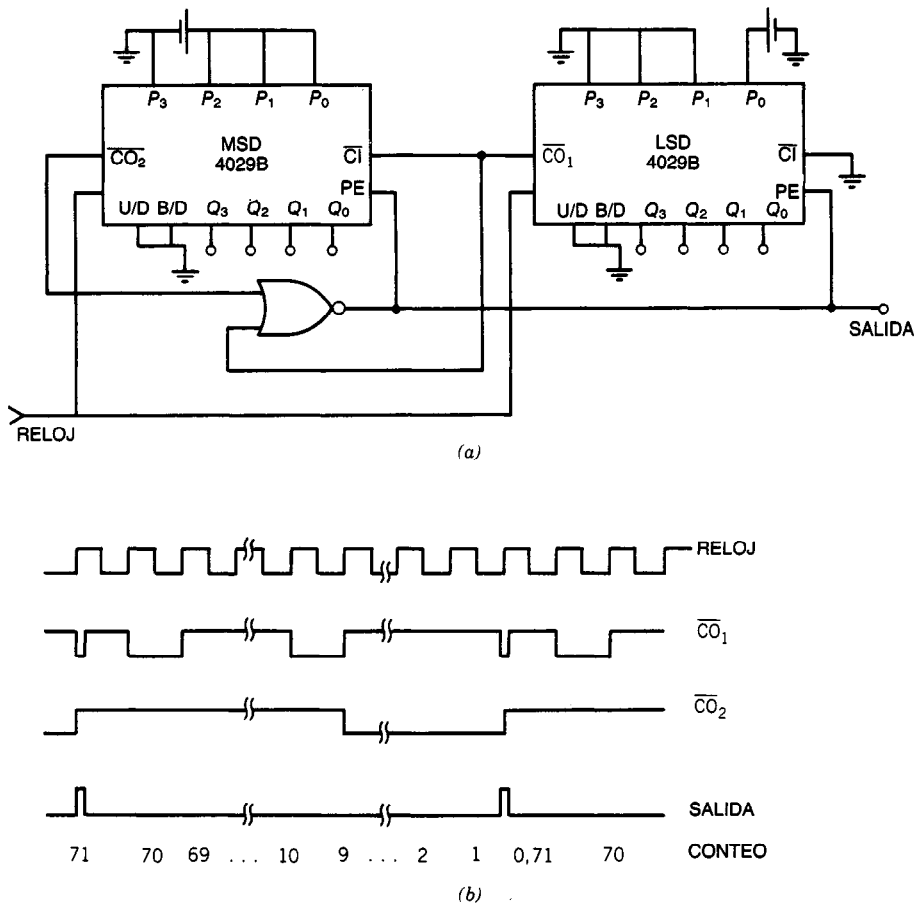


Fig. 30-6. Contadores descendentes en cascada colocados para dividir entre 71: a) diagrama de interconexión; b) diagrama de relaciones de tiempo. MSD = dígito más significativo; LSD = dígito menos significativo.

sea HIGH salvo cuando ese contador almacene 0000. Dado que la entrada \overline{CI} inhibe el conteo cuando está en HIGH, el contador de los dígitos más significativos (MSD) cuenta hacia abajo sólo en los flancos ascendentes del reloj cuando el contador de los dígitos menos significativos (LSD) contiene 0000. La compuerta NOR se conecta de modo que PE sea HIGH sólo cuando ambos contadores contengan 0000. Como la entrada de PE es asincrónica, los dos contadores están en 0 sólo en forma momentánea, por lo que la secuencia sincronizada al reloj es 2, 1, 71, 70, ..., y existe un pulso de salida por cada 71 pulsos de reloj.

30.2.5 Diseño de contadores síncronos

Puede necesitarse un contador especial no disponible en un encapsulado MSI. Si se requiere una secuencia de salida particular, una solución consiste en diseñar un decodificador que convierta las salidas binarias (o BCD) de un contador disponible en la secuencia de salida deseada. Una alternativa más flexible y a menudo más económica consiste en diseñar a la medida el

contador que se requiera en torno a una pastilla de multivibradores biestables *D* cuádruples, como la 74175 de TTL^{4,5}, que contiene cuatro multivibradores biestables disparados por el flanco ascendente con una entrada de reloj común. Esto se hace fácilmente con la ayuda de diagramas de Karnaugh, como se ilustra en la figura 30-8.

El ejemplo de dicha figura es un contador síncrono de módulo 6, cuya secuencia de conteo se define en el diagrama de estado de la figura 30-8a. Los dígitos del 1 al 6 del diagrama de Karnaugh (fig. 30-8b) corresponden a los números de estado de la figura 30-8a. Incluidas en estas celdas numeradas están las combinaciones binarias correspondientes al siguiente estado de la secuencia. Dado que éstos son los estados de los multivibradores que se requieren después del siguiente flanco ascendente del pulso de reloj, las funciones que corresponden a los siguientes diagramas de estado definen la lógica que se necesita para las entradas *D* de los multivibradores. Con este diseño, la secuencia de salida se obtiene directamente de las salidas de los multivibradores¹.

30.3 CRONÓMETROS (TEMPORIZADORES)

Un cronómetro o circuito de sincronización es un dispositivo diseñado principalmente para generar retardos ajustables de tiempo (temporizadores)^{6,7}. El más común es el multivibrador monoestable. En su forma usual, el multivibrador monoestable (o univibrador, de un disparo, como a menudo se llama) produce como respuesta a un cambio en el nivel de voltaje en su entrada, un pulso de voltaje de duración ajustable. El pulso puede ser en sentido positivo o negativo según el circuito, y en un conjunto de condiciones dadas tiene amplitud constante. La duración del pulso se establece típicamente por medio de la elección apropiada de los valores de un resistor y un capacitor. Se dispone de varios tipos de cronómetros (temporizadores) en forma de circuito integrado, y algunos de ellos se analizan a continuación.

Un circuito de sincronización (temporización, fig. 30-9) relativamente simple es conocido con el nombre genérico de "cronómetro (temporizador) 555". Las especificaciones del 555 se encuentran en libros de datos de circuitos integrados lineales^{8,10}. En la figura 30-9a, el circuito de la pastilla del cronómetro se encuentra

dentro de las líneas discontinuas, donde las conexiones externas son las que se requieren en la operación monoestable. En este modo, el circuito funciona como se indica a continuación^{6,7}.

Cuando el cronómetro se encuentra en el estado normal, el enganchador R-S está en el estado 0, y la salida resultante HIGH en \bar{Q} retiene el transistor T_1 en saturación, lo cual impide, a su vez, que el capacitor externo C se cargue. En esta condición la salida del cronómetro en la punta de contacto es LOW, puesto que se conecta a \bar{Q} a través del inversor, que es compatible con TTL cuando la pastilla se polariza con $V_{CC} = 5$ V. Las salidas de ambos comparadores 1 y 2 son LOW porque sus entradas de inversión son más positivas que las de no inversión. Un pulso en sentido negativo en V_{ent} que tenga la amplitud suficiente para activar la punta de contacto 2 desde V_{CC} hasta menos de $V_{CC}/3$ conmutará el comparador 2, colocando el enganchador en el estado 1. Esto lleva \bar{Q} al estado LOW, desactivando el transistor T_1 y conmutando a HIGH la salida de la punta 3. Con T_1 desactivado, el capacitor C empieza a cargarse a través del resistor R de 0 V a V_{CC} , activando la entrada de no inversión del comparador 1. Cuando el voltaje del capacitor llega a

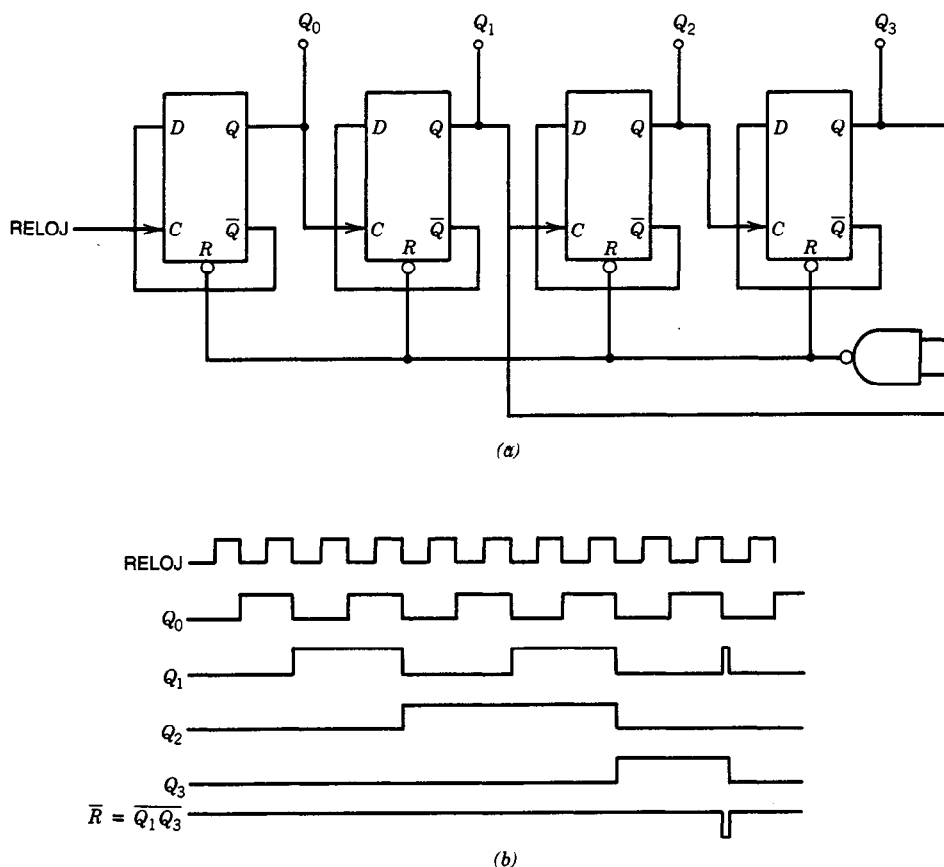


Fig. 30-7. a) Contador de transporte ondulante con recolocación programada para módulo 10.
b) Diagrama de relaciones de tiempo que muestra la existencia momentánea del estado 1010.

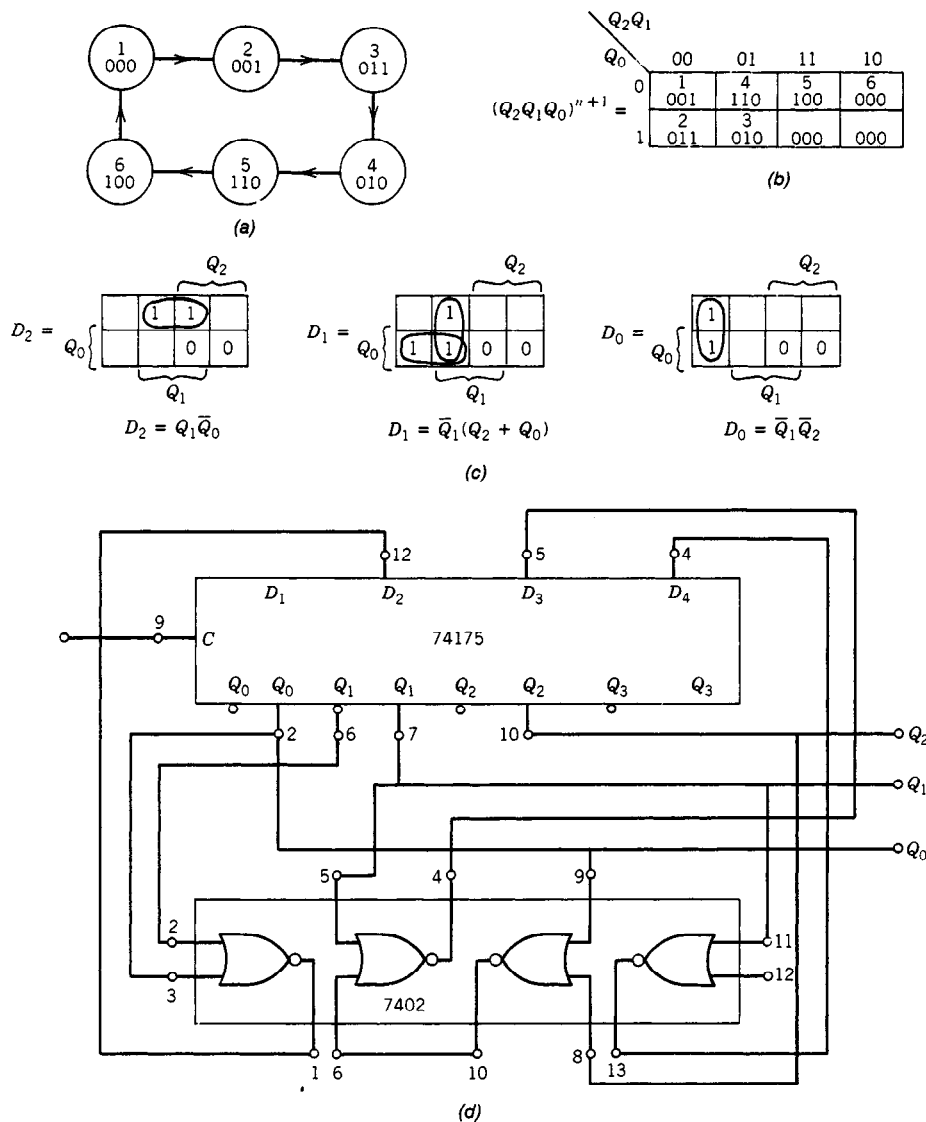


Fig. 30-8. a) Diagrama de estado de un contador de módulo 6. b) Mapa de Karnaugh del diagrama de estado. c) Diagrama de Karnaugh de las entradas de control del multivibrador biestable D. d) Implementación del contador de módulo 6.

alcanzar los $2V_{CC}/3$, el comparador 1 conmuta de LOW a HIGH, recoloca el enganchador, descarga C y desplaza la salida de vuelta a LOW.

El intervalo de tiempo T en que la salida es alta es determinado por el tiempo que necesita el capacitor para cargarse de 0 V a $2V_{CC}/3$; es decir:

$$\frac{2}{3} V_{CC} = V_{CC}(1 - e^{-T/RC})$$

de donde:

$$T = RC \ln 3 \cong 1.1 RC$$

Una observación importante es que T no depende de V_{CC} . Obsérvese asimismo que un pulso de entrada en sentido negativo no tiene efecto mientras la salida sea HIGH. El pulso de salida positivo se puede terminar en forma prematura mediante la aplicación de un pulso negativo a la terminal de recolocación (punta de contacto 4). El pulso de salida también se puede acortar o alargar aplicando un voltaje adecuado V_m a la punta 5, que es la terminal de inversión del comparador 1. Esto hace que el enganchador se recoloca cuando el voltaje del capacitor llega a V_m .

El diseñador debe tener algunas precauciones al utilizar el 555¹¹. Se necesita una regulación adecua-

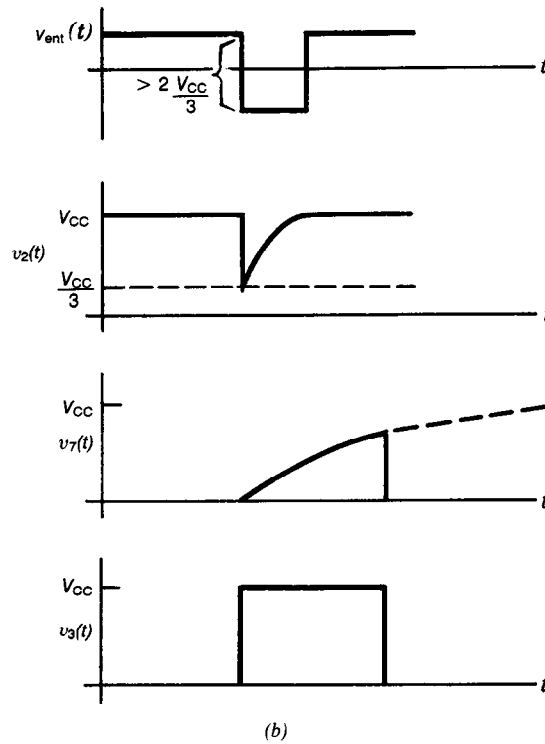
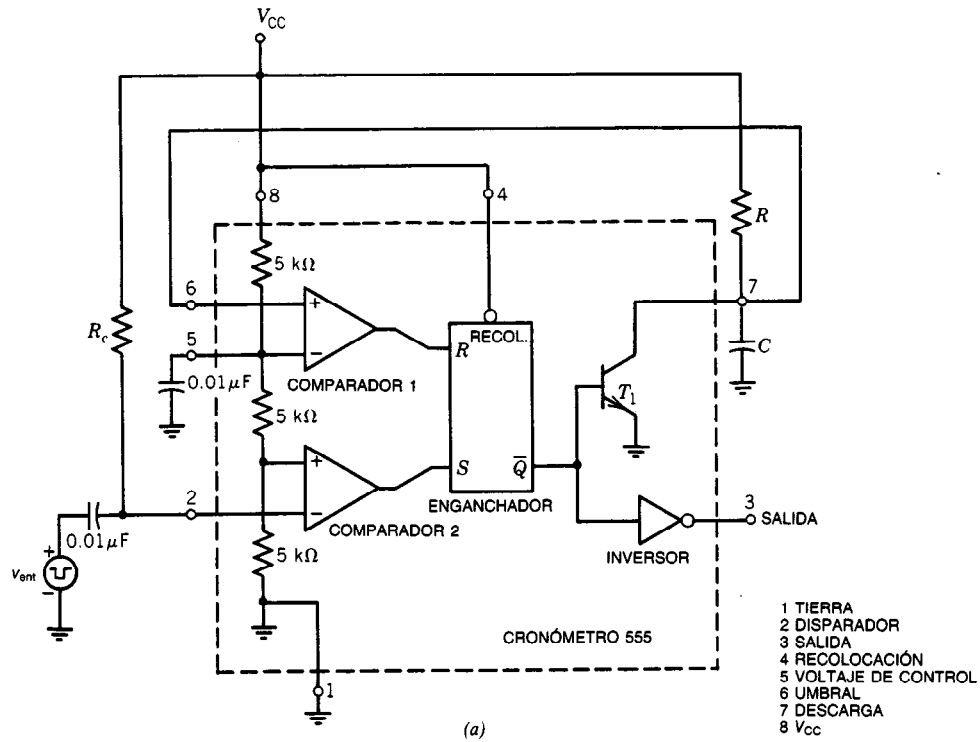


Fig. 30-9. Conexión de multivibrador monoestable con un cronómetro (temporizador) 555: a) diagrama lógico; b) diagrama de relaciones de tiempo. RECOL. = recolocación.

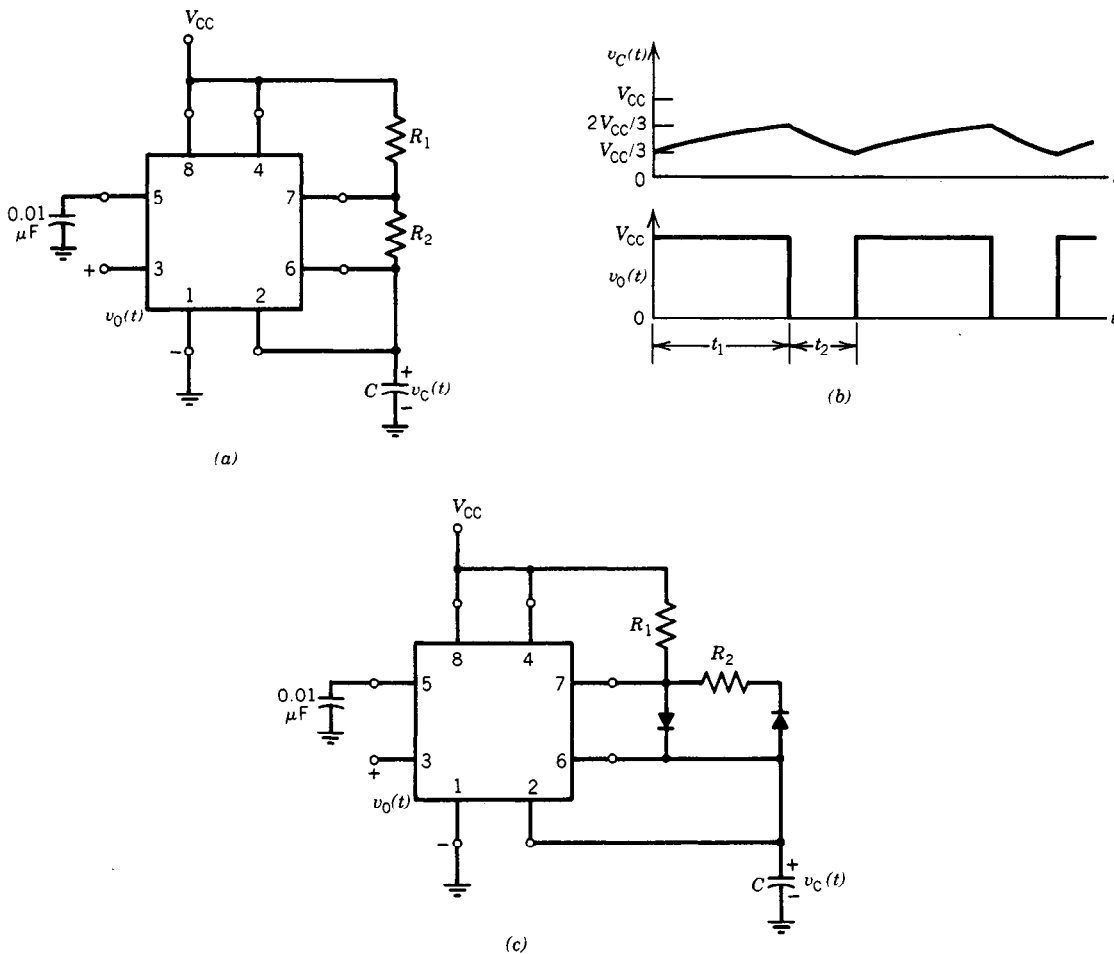
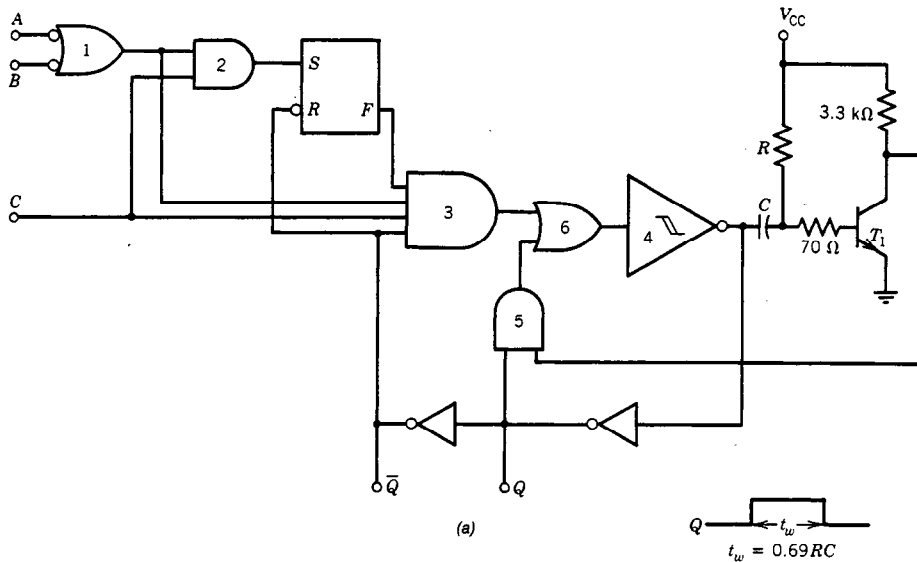


Fig. 30-10. Conexión astable del cronómetro (temporizador) 555: a) circuito típico; b) ondas de forma de voltaje; c) modificación para incrementar el intervalo del régimen de trabajo.

da de la fuente de alimentación, y se aconseja el empleo de un capacitor de desacoplamiento de $0.01 \mu\text{F}$ entre la punta de contacto 8 y tierra. Si no se utiliza la entrada de control (punta 5), el circuito *debe* tener un capacitor de desacoplamiento de $0.01 \mu\text{F}$ (fig. 30-9). El capacitor de sincronización (cronometraje) C debe tener fuga baja y su capacitancia debe ser independiente del voltaje. En particular, hay que evitar el uso de capacitores cerámicos de disco. El valor de la resistencia de R no debe exceder de $\text{M}\Omega$ ($V_{\text{CC}}/175 \mu\text{A}$) ni ser menor de $\text{k}\Omega$ ($V_{\text{CC}}/30 \text{ mA}$). Si R es demasiado grande, no habrá suficiente corriente para conmutar el comparador 1 cuando el voltaje del capacitor llegue a $2V_{\text{CC}}/3$. Si R es demasiado baja, la corriente continua que pase por T_1 excederá el límite especificado de 30 mA . Por último, si C es demasiado grande, la corriente de descarga a través de T_1 será excesiva. El límite de C es determinado por la frecuencia de la entrada. Una constante de tiempo pequeña obtenida con un valor de C grande y uno de R pequeño hará que T_1 se sobrecaliente.

El cronómetro (temporizador) 555 se puede conectar en modo de funcionamiento (operación) libre, que genera una onda de forma rectangular periódica en la salida (fig. 30-10a). Este circuito suele denominarse multivibrador astable. El circuito opera como se indica a continuación.

Cuando T_1 está apagado, el capacitor se carga hasta V_{CC} a través de R_1 y R_2 en serie. Cuando el voltaje del capacitor alcanza $2V_{\text{CC}}/3$, la salida del comparador 1 pasa a HIGH y recoloca el enganchador. Esto satura T_1 y activa la salida que pasa a LOW. Ahora el capacitor se descarga de $2V_{\text{CC}}/3$ a 0 a través de R_2 y del transistor ON (encendido). Cuando el voltaje del capacitor se hace $V_{\text{CC}}/3$, la salida del comparador 2 conmuta a HIGH porque el capacitor está conectado a su entrada de inversión (punta de contacto 2). Esto coloca el enganchador, conmutando la salida a HIGH y apagando T_1 , con lo cual se inicia el siguiente ciclo de la onda de forma de salida, cuyo esquema se muestra en la figura 30-10b.



A	B	C	OPERACIÓN
L	X		DISPARADOR
X	L		DISPARADOR
	H	H	DÍSPARADOR
H		H	DISPARADOR

(b)

Fig. 30-11. Multivibrador monoestable 74121 de lógica transistor-transistor (TTL): a) diagrama lógico; b) tabla de verdad de las entradas de control. X = "no importa"; = transición de alto a bajo; = transición de bajo a alto.

El tiempo de carga t_1 está dado por:

$$t_1 = 0.693(R_1 + R_2)C$$

y el tiempo de descarga t_2 es:

$$t_2 = 0.693 R_2 C$$

Obsérvese que, con esta conexión, el tiempo t_1 durante el cual la salida es HIGH siempre es mayor que t_2 , el tiempo LOW de salida, de modo que es imposible obtener una onda de forma de salida simétrica. Esta limitación se puede vencer conectando un diodo en serie con R_2 (fig. 30-10c) y retirando R_2 de la malla de carga del capacitor. El diodo extra en serie con R_2 coloca un diodo en las dos trayectorias de carga y descarga, haciendo que la razón $t_1:t_2$ sea igual a la razón de resistencia $R_1:R_2$. Este circuito permite una amplia gama de regímenes de trabajo [donde el régimen de trabajo se define como (duración del pulso)/(período)]. Para asegurar oscilaciones en alguno de estos circuitos en operación libre, R_2 debe superar 3.0 kΩ.

30.3.1 Cronómetros (temporizadores) de corta duración

Debido principalmente a las limitaciones de rapidez de exploración de los circuitos comparador y enganchador, la máxima frecuencia que se puede obtener en forma confiable con un cronómetro (temporizador) 555 es de unos 500 kHz, que corresponde a anchos de pulso de alrededor de 1 μs. Se pueden obtener pulsos tan breves como de 30 ns con un multivibrador monoestable TTL (el 74121, por ejemplo)⁴, mientras que el equivalente de ECL (10198)¹² produce duraciones de pulso de 10 ns o menos.

El diagrama lógico del 74121 se da en la figura 30-11a¹³. Para describir la operación, supóngase que la condición inicial es que todas las entradas son HIGH. Después, las salidas de las compuertas 1, 2, 3, 5 y 6 serán LOW, y el transistor T_1 se polarizará en saturación a través de la resistencia de sincronización (temporización) R . (El requisito de saturación limita R a un máximo de 40 kΩ.) La salida del inversor disparador de Schmitt (compuerta 4) será HIGH.

Ahora, sea que la entrada A experimente una transición de HIGH a LOW hasta quedar por debajo del umbral de 0.8 V. Esto desplaza las salidas de las compuertas 1, 2, 3 y 6 a HIGH y la salida de la compuerta 4 a LOW, y desactiva la base de T_1 , con lo que se apaga T_1 . La salida Q pasa a HIGH y la sincronización (temporización) del circuito RC comienza cuando C inicia su carga a través de R a partir de su voltaje inicial de $0.75 - (V_{OH}$ de la compuerta 4) hasta V_{CC} . El pulso de salida termina cuando el voltaje a través de C es lo suficientemente grande para volver a encender T_1 , desplazando las salidas de las compuertas 3, 5 y 6 de regreso a LOW.

Nótese que mientras el pulso de salida es HIGH, \overline{Q} es LOW, de manera que la compuerta AND 3 no responde durante este tiempo a ningún cambio en las entradas A , B o C . Este tipo de operación (que es característico también del cronómetro [temporizador] 555 conectado como monoestable) a menudo se denomina no redispensible. Otros monoestables (el 74122, por ejemplo) se clasifican como redispensables. Esto quiere decir que el periodo de sincronización (temporización) (T) es reiniciado por el desplazamiento de nivel adecuado en la entrada, que sostiene el pulso de salida durante T segundos después del cambio final de la entrada. Este tipo de dispositivo es útil para detectar cuándo deja de ocurrir un suceso de una serie de ellos. Se hace que los sucesos reactiven un monoestable diseñado para un periodo T adecuado, de manera que la salida se mantenga HIGH hasta que falte un suceso. Si no se necesita la operación redispensible, el diseñador prudente utiliza un circuito no redispensible.

Los multivibradores astables de alta frecuencia se pueden construir con circuitos inversores disparadores de Schmitt (fig. 30-12a)¹. La operación se explica con facilidad suponiendo que la salida del inversor 1 apenas ha conmutado de LOW a HIGH. En este instante el voltaje entre las entradas del capacitor C es el umbral LOW V_{LT} (fig. 30-12b) de la función transferencia del inversor. El capacitor comienza a cargarse a través de R desde este valor inicial hacia V_{OH} hasta que su voltaje llega al umbral HIGH V_{HT} . En este momento, la salida del inversor desciende hacia V_{OL} y el capacitor inicia su descarga hacia V_{OL} . El ciclo siguiente se inicia cuando los voltajes del capacitor se vuelven a convertir en V_{LT} . La frecuencia depende de la función transferencia y es particularmente sensible a $V_{HT} - V_{LT}$, de manera que varía un poco de una pastilla a otra. Sin embargo, una estimación razonable para el inversor 7414 de TTL es de alrededor de $1/3RC$ Hz. Con esta pastilla se pueden obtener frecuencias de < 1 kHz a 30 MHz. Los valores de la resistencia R deben ser menores que 1.4 k Ω para garantizar la auto-iniciación. El régimen de trabajo depende de la razón R/C , de manera que no se recomienda este circuito cuando ese régimen sea importante.

Los circuitos inversores disparadores de Schmitt CMOS (47C14) también funcionarán bien en este circuito. Para CMOS, la resistencia R debe exceder de 10 k Ω y, en consecuencia, las frecuencias máximas son muy inferiores a las de la versión TTL. Debido al bajo consumo de energía y a la mejor simetría de los volta-

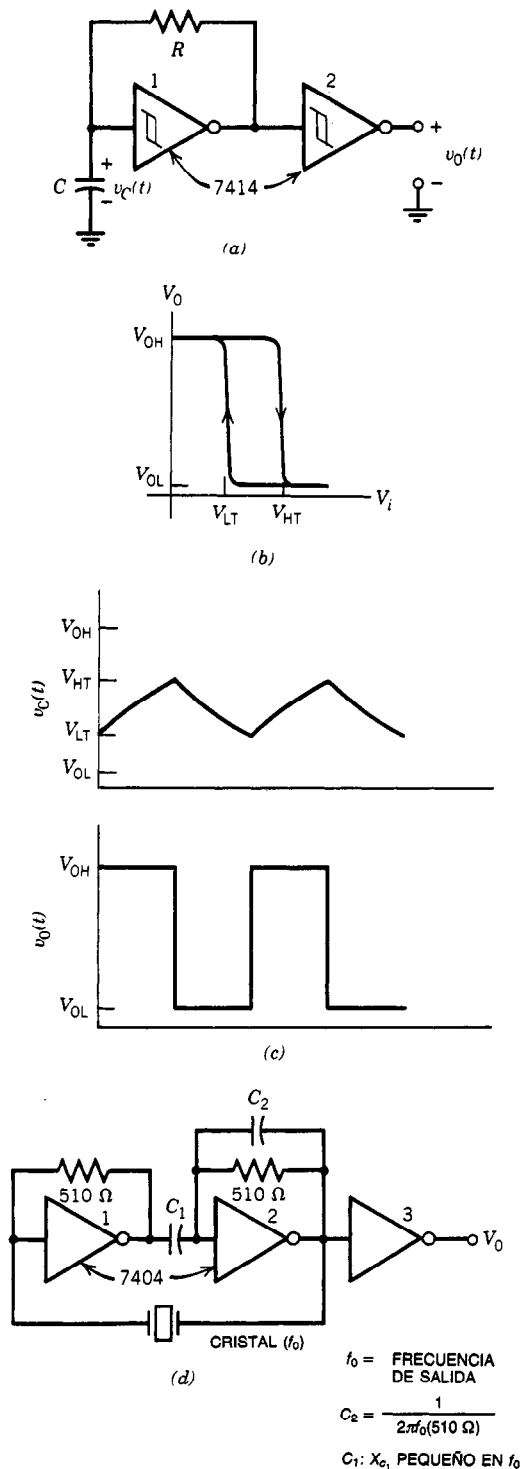


Fig. 30-12. Circuito inversor disparador de Schmitt: a) usado en un multivibrador astable; b) característica de transferencia; c) onda de forma del capacitor y de salida; d) usado en un multivibrador astable controlado por cristal.

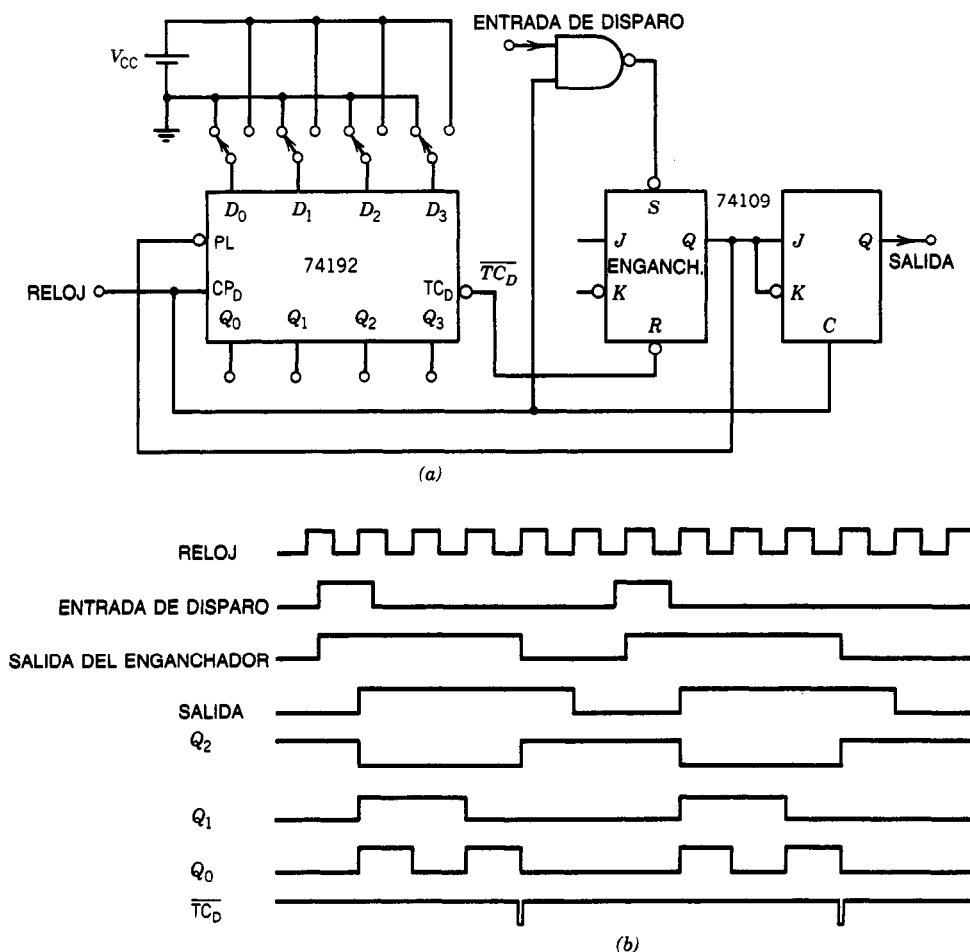


Fig. 30-13. Cronómetro (temporizador) digital: a) circuito; b) diagrama de relaciones de tiempo, con el cronómetro colocado para cuatro periodos de reloj. ENGANCH. = enganchador.

jes de umbral V_{HT} y V_{LT} , los circuitos CMOS son superiores en aplicaciones en que la limitación de frecuencia no es importante.

Los inversores TTL (particularmente el 7404 en las versiones estándares o Schottky) se adaptan bien a las aplicaciones del oscilador controlado por cristales. En el ejemplo de la figura 30-12d, f_0 es la frecuencia específica del cristal, C_1 es un capacitor de acoplamiento y C_2 representa el de la supresión armónicos.

30.3.2 Cronómetros (temporizadores) digitales

Los cronómetros (temporizadores) digitales se parecen a los multivibradores monoestables en que producen un pulso de duración específica en respuesta a una entrada apropiada. El cronómetro (temporizador) digital básico contiene un contador y un generador de pulsos de reloj. La entrada inicia el pulso de salida y al mismo tiempo activa el contador. El pulso de salida termina cuando el contador llega a algún número prefijado. Los cronómetros (temporizadores) digitales tienen dos

ventajas; se pueden sincronizar con un reloj del sistema, y es posible obtener retardos extremadamente largos sin que se requieran constantes de tiempo RC grandes.

En la figura 30-13 se presenta un ejemplo de cronómetro (temporizador) de este tipo. El enganchador está normalmente en el estado 0, que mantiene el contador en la condición LOAD (de carga). El número de periodos de reloj N que se desea para la duración del pulso de salida se selecciona empleando niveles adecuados en las entradas de datos D_0 a D_3 . Cuando la entrada de disparo se habilita con un estado HIGH, el siguiente flanco ascendente del pulso de reloj coloca el enganchador, convirtiendo el contador de LOAD en COUNT (conteo), y activando el multivibrador biestable JK. El siguiente flanco ascendente del pulso de reloj descuenta el conteo del contador a $N - 1$ y cambia el estado del multivibrador JK, desplazando la salida a HIGH. $N - 1$ periodos de reloj después, el flanco ascendente del pulso de reloj descuenta el conteo del contador hasta 0, con lo cual la salida que pide

prestado, $\overline{TC_D}$, pasa a LOW, recolocando el enganchador. El flanco ascendente del siguiente pulso de reloj recoloca el multivibrador JK en 0, con lo que se devuelve la salida a LOW y se completa el pulso de salida, cuya duración es exactamente N periodos de pulso de reloj. Esta secuencia se ilustra en la figura 30-13b para $N = 4$.

Se dispone de cronómetros (temporizadores) digitales en encapsulados de circuitos MSI. Un ejemplo es el 4154B de CMOS², el cual contiene un contador binario de 16 etapas y un reloj generado internamente, cuya frecuencia puede controlarse en un intervalo de 0 a 100 kHz por medio de una resistencia y capacitancia conectadas en forma externa. El contador es de módulo 2^N , donde N se puede seleccionar como 8, 10, 13 o 16. Esto establece el intervalo del pulso de sincronización (temporización) de 2.5 ms a muchas horas. El 4154B de CMOS también se puede operar con un reloj externo en frecuencias hasta de 6 MHz.

30.4 MULTICANALIZADORES

El **multicanalizador digital de n entradas** es un circuito combinatorio de compuertas con n entradas de datos, cada una de las cuales puede seleccionarse para que aparezca en la salida única¹. Un multicanalizador de

8 entradas, por ejemplo, tendrá 8 líneas de datos, una línea de salida y tres líneas de selección de datos que proporcionan las 8 direcciones diferentes que se requieren. Para mantener el diagrama relativamente simple, el multicanalizador de la figura 30-14 tiene solamente cuatro entradas. La ampliación a cualquier número de líneas de datos es clara.

Las líneas de datos se rotulan de D_0 a D_3 en la figura 30-14, donde S_0 y S_1 son las entradas de selección de las líneas de datos. Por ejemplo, cuando S_0 y S_1 son LOW y la entrada habilitada es LOW, los datos de la línea D_0 figuran en la salida Y . La entrada habilitada permite realizar la operación lógica OR con las salidas del multicanalizador para ampliar el número de líneas de datos.

Si el dispositivo de la figura 30-14 se utiliza en una aplicación típica de multicanalización por división de tiempo, tendrá cuatro diferentes conjuntos de datos como entradas. Los datos de una línea cualquiera podrían ser palabras binarias de b bits cada una, presentadas como una secuencia de unos y ceros sincronizados con un reloj maestro. El tiempo entre las palabras de una línea dada debe ser lo suficientemente largo para que las otras tres líneas se muestreen y para que se genere un código de separación entre las palabras de una línea determinada. Si la palabra del código de separación tuviese c bits, cada dirección se aplicaría a las

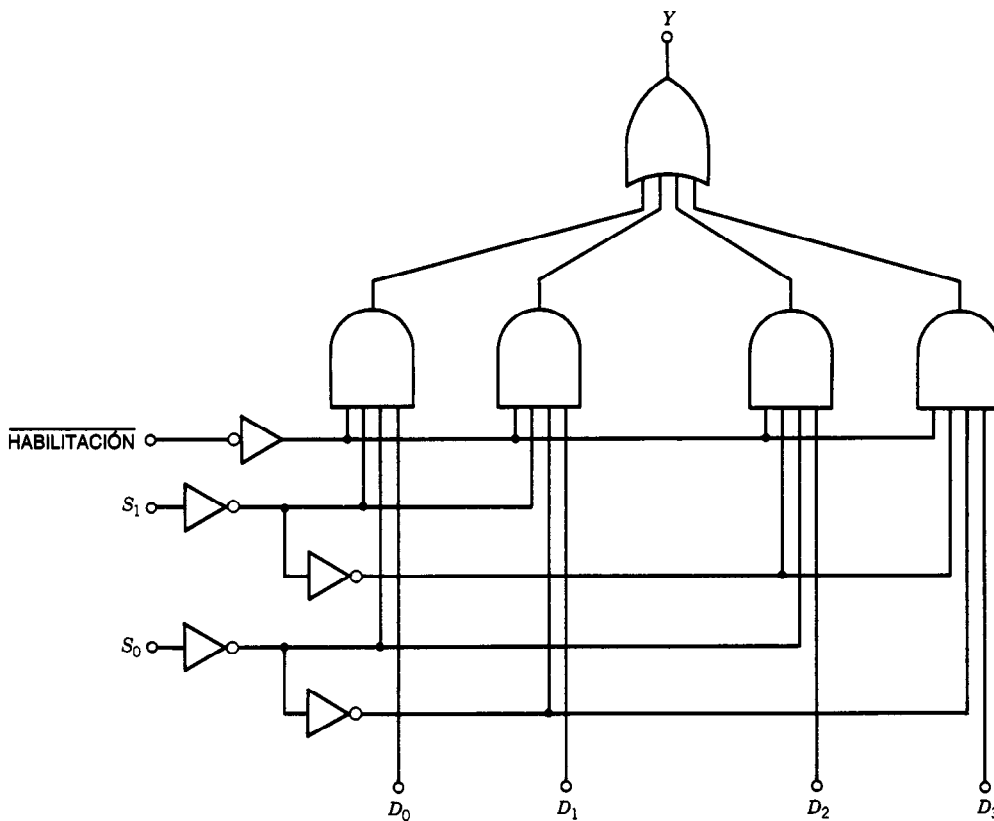


Fig. 30-14. Multicanalizador de cuatro entradas (una mitad de un 74153).

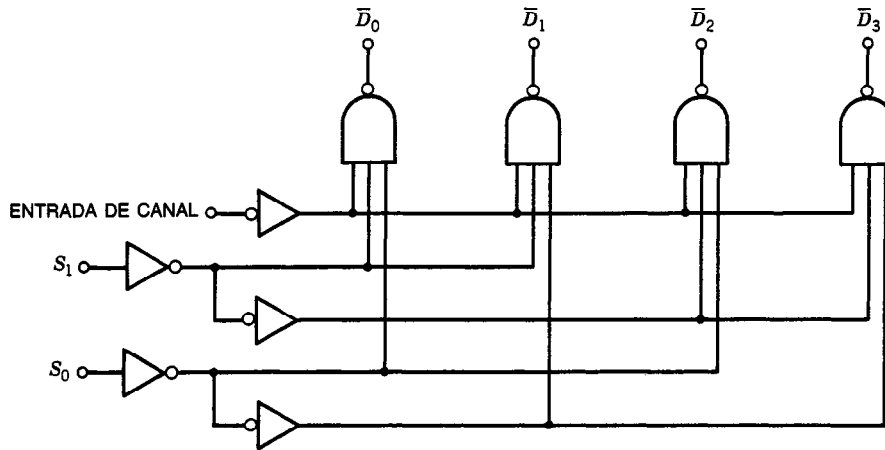


Fig. 30-15. Desmulticanalizador de cuatro canales (una mitad de un 74139).

entradas de selección de datos S_0 y S_1 durante $b + c$ pulsos de reloj. Esto se hace sin dificultad activando un contador binario con un reloj formado por la división del reloj maestro entre $b + c$, y conectando las salidas del contador a las líneas de selección.

En el extremo de recepción, la línea única de la salida Y se conectaría a la entrada de canal de un desmulticanalizador (fig. 30-15). Las líneas de selección de salida S_0 y S_1 del desmulticanalizador deben habilitarse en sincronía con las del multicanalizador, de manera que el contenido de las líneas de datos en el extremo emisor aparezcan inalteradas en la línea de datos correspondiente al receptor. Para esto suele requerirse la transmisión de un pulso de sincronización. La co-

nexión específica que se muestra en la figura 30-15 es la mitad de un 74139⁴. Obsérvese que la entrada de canal se invierte, así como las salidas, y que las dos inversiones se cancelan entre sí.

30.4.1 Multicanalizadores en el diseño de lógica combinatoria

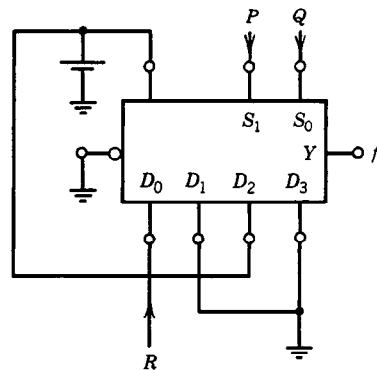
Cuatro compuertas AND que accionan una compuerta OR (fig. 30-14) indican que estos circuitos MSI se pueden utilizar en aplicaciones de lógica combinatoria. El multicanalizador de 4 bits, por ejemplo, se presta directamente para implementar funciones booleanas de tres variables. Para ilustrar esto, considérese la fun-

PQ				
	00	01	11	10
$f = 0$	0	0	1	0
$f = 1$	1	0	1	0

(a)

PQ				
	00	01	11	10
$f =$	R	0	1	0

(b)



(c)

Fig. 30-16. Implementación para multicanalizar $f = PQ + \overline{P}QR$: a) diagrama de Karnaugh de f ; b) diagrama reducido de (a); c) implementación mediante el uso de una mitad de un 74153.

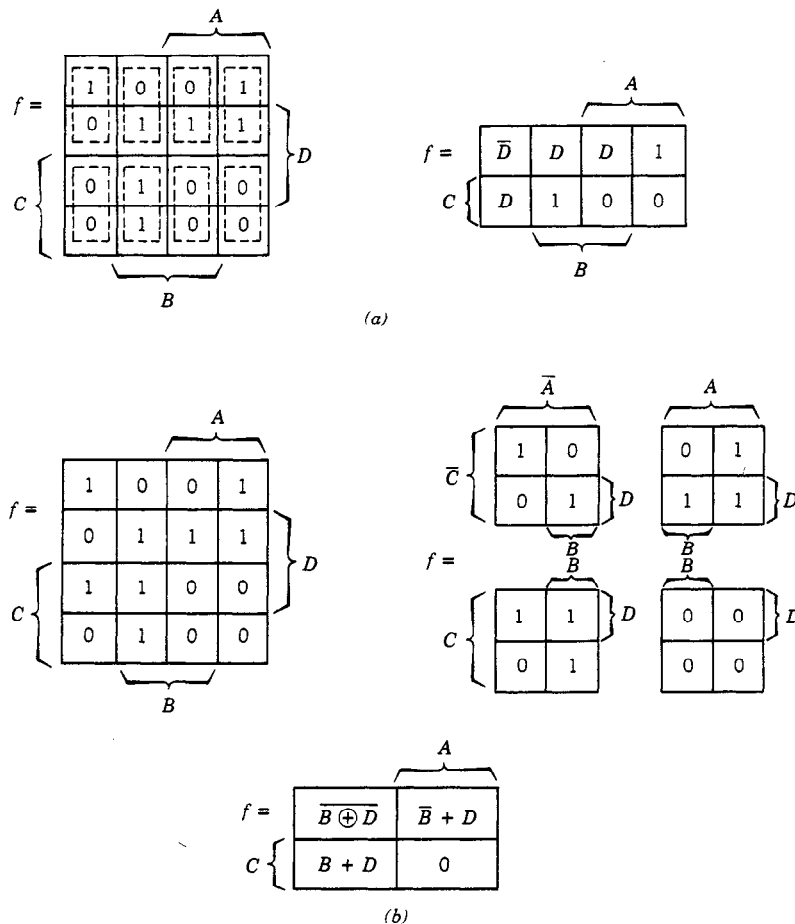


Fig. 30-17. Mapas de entradas variables de $f = \bar{B} \bar{C} \bar{D} + \bar{A} B C + \bar{A} C D + A \bar{C} D + B \bar{C} D$: a) reducción de cuatro a tres variables del diagrama; b) reducción de cuatro a dos variables del diagrama.

ción $f = PQ + \bar{P}QR$ que se muestra en el diagrama (mapa) a de la figura 30-16. El método más simple en términos generales consiste en reducir el tamaño del diagrama (mapa) a la dimensión que corresponde al número de bits de selección mediante el mapeo de entradas variables.

El mapeo de entradas (o ingresos) variables es un medio de reducir las dimensiones de un diagrama (mapa) de Karnaugh mediante la introducción de funciones en las celdas del diagrama en lugar de simplemente unos y ceros¹. En términos generales, una función booleana de n variables se puede mapear sobre un diagrama de Karnaugh de m variables ($m < n$) asociando m de las variables con las coordenadas del diagrama e introduciendo funciones de las $n - m$ variables restantes en las celdas del diagrama. El proceso de reducción es como sigue (fig. 30-17). Luego de seleccionar las m variables que serán las coordenadas (A , B y C en la figura 30-17a y A y C en la figura 30-17b), se traza y rotula el diagrama reducido. Cada celda del diagrama reducido se asocia con un grupo de 2^{n-m} cel-

das que forman un subdiagrama del original. El subdiagrama de una celda dada se identifica en el diagrama original como la intersección de las coordenadas de esa celda. La función que se introducirá en la celda se obtiene simplificando el subdiagrama correspondiente. Para aclarar este concepto, el diagrama original se divide en los cuatro subdiagramas que al combinarse producen el diagrama original (fig. 30-17b). El subdiagrama del extremo superior de la izquierda se extiende a $\bar{B} \oplus \bar{D}$. Análogamente, los subdiagramas restantes se extienden hasta $\bar{B} + D$, $B + D$ y 0 . Todos se muestran en los cuadrados del diagrama reducido.

Según el ejemplo de la figura 30-16, se observa que R se ha eliminado como variable del diagrama y se ha convertido en una variable de entrada o ingreso. Las variables P y Q están conectadas a las entradas de selección de datos S_1 y S_0 , donde Q pasa a S_0 porque es la variable menos significativa del diagrama. Esto hace posible que cada una de las celdas del diagrama reducido se asocie a una entrada de línea de datos, como se muestra en la figura 30-16c. Para completar el circuito,

la función que se introdujo en una celda dada del diagrama reducido se conecta a la línea de datos correspondiente y la función implementada se toma de la salida Y del multicanalizador.

Los multicanalizadores con entradas de habilitación se pueden combinar para implementar funciones de lógica de más variables. Si las líneas de selección de datos de dos multicanalizadores se conectan en paralelo, la combinación de una línea de habilitación y el complemento de la otra forma una tercera línea de selección de datos. Como las líneas de habilitación se mantienen en el estado LOW, las cuatro líneas asociadas con las de habilitación no complementadas son los bits menos significativos. En la figura 30-18, la función de cuatro variables $f(SPQR) = SPQR + SPR + \overline{P}QR + SPQ\overline{R}$ se implementa usando las dos mitades de un multicanalizador 74153. Obsérvese que las dos secciones tienen las líneas de selección en común S_1 y S_0 y las líneas de habilitación separadas \overline{E}_a y \overline{E}_b .

Nótese asimismo que el número de entradas del multicanalizador debe ser igual al número de celdas del diagrama reducido de la función deseada. Por tanto, una función de cinco variables genera un diagrama reducido de cuatro variables que tiene 16 celdas y, como consecuencia, se requieren 16 entradas del multicanalizador. Una alternativa que da por resultado un

arreglo entre multicanalizadores y lógica externa consiste en reducir el diagrama en una variable más. La figura 30-19 ilustra este procedimiento para la misma función f .

30.5 DECODIFICADORES, CODIFICADORES Y CONVERTIDORES DE CÓDIGO

Los decodificadores, codificadores y convertidores de código son unos dispositivos que se agrupan en clasificaciones análogas en virtud de las funciones que desempeñan¹. Se pueden definir de la manera siguiente:

- **Decodificador.** Circuito combinatorio con m entradas y n salidas, donde $n \leq 2^m$, que en un momento dado tiene sólo una línea de salida activa. La línea específica que está activa es determinada por el elemento del conjunto del código de entrada que se presenta en las líneas de entrada.
- **Codificador.** Circuito combinatorio con m entradas y n salidas, donde $m \leq 2^n$, que en un momento dado tiene sólo una línea de entrada activa. El elemento del conjunto del código que se presenta en la salida depende de la línea de entrada específica que está activa.

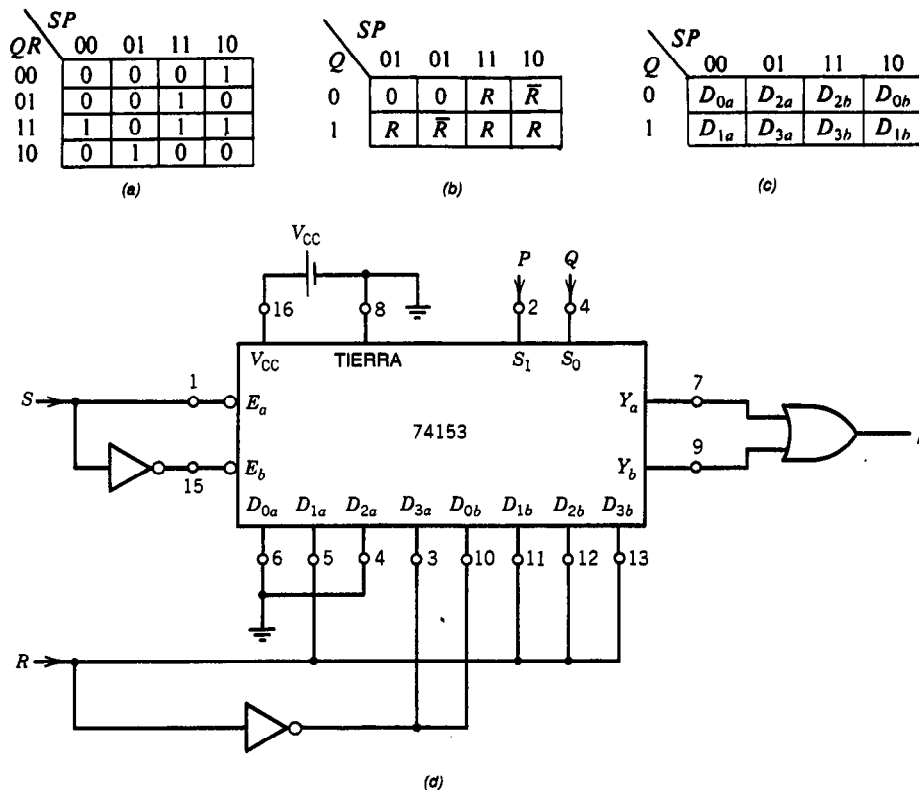


Fig. 30-18. Implementación para multicanalizar $f = SPQR + SPR + \overline{P}QR + SPQ\overline{R}$: a) diagrama de Karnaugh; b) diagrama reducido; c) asociación de líneas de entrada de datos con celdas del diagrama; d) implementación con un 74153.

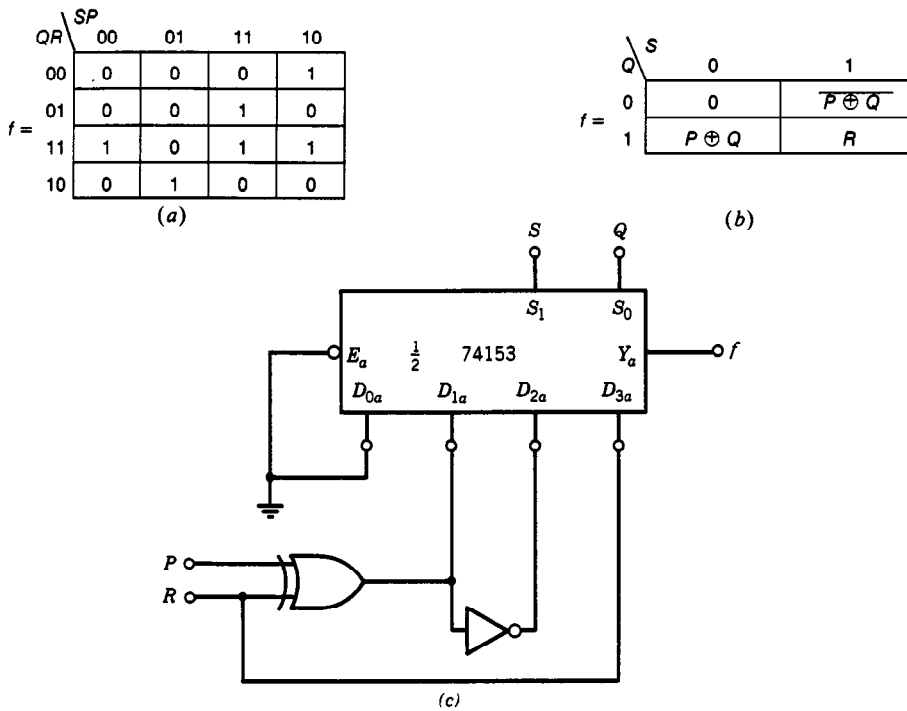


Fig. 30-19. Implementación alternativa para multicanalizar $f = \overline{S} \overline{P} \overline{Q} \overline{R} + \overline{S} P R + \overline{S} P Q \overline{R}$: a) diagrama de Karnaugh; b) diagrama reducido; c) implementación con una mitad de un 74153.

- **Convertidor de código.** Circuito combinatorio con m entradas y n salidas que tiene un conjunto diferente de códigos de entrada y de salida. Para cada elemento del conjunto del código de entrada hay un elemento correspondiente del conjunto del código de salida sobre una base de uno a uno.

30.5.1 Aplicaciones del decodificador

El desmulticanalizador (fig. 30-15) también se clasifica como un decodificador 1 de 4 (o de 2 a 4 líneas), y se deduce que cualquier decodificador con una entrada de habilitación que sirva como línea de datos se puede utilizar como desmulticanalizador.

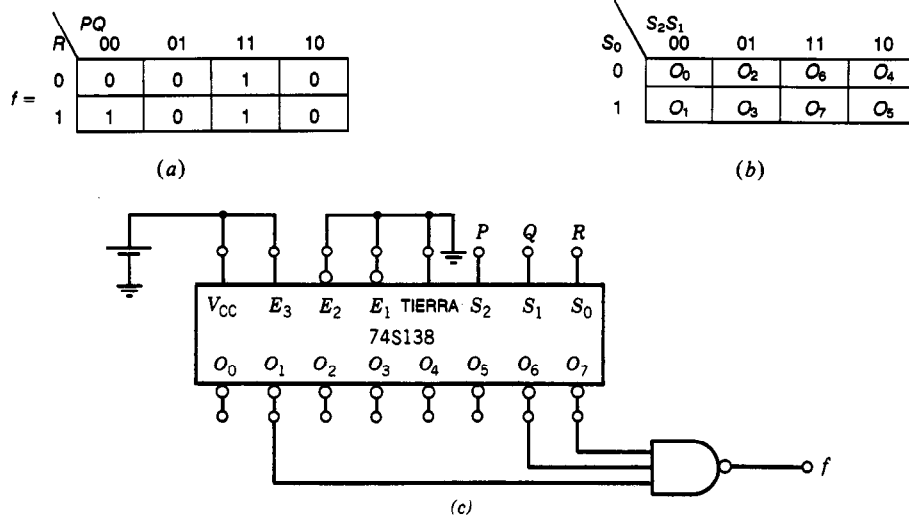
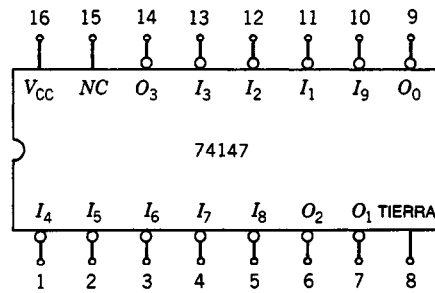


Fig. 30-20. Implementación para decodificar $f = PQ + \overline{P} \overline{Q} R$: a) diagrama de Karnaugh; b) asociación de líneas de salida con celdas del diagrama; c) implementación con un 74S138.



(a)

ENTRADAS									SALIDAS			
I_1	I_2	I_3	I_4	I_5	I_6	I_7	I_8	I_9	O_3	O_2	O_1	O_0
H	H	H	H	H	H	H	H	H	H	H	H	H
X	X	X	X	X	X	X	X	L	L	H	H	L
X	X	X	X	X	X	X	L	H	L	H	H	H
X	X	X	X	X	X	L	H	H	H	L	L	L
X	X	X	X	X	L	H	H	H	H	L	L	H
X	X	X	X	L	H	H	H	H	H	L	H	L
X	X	L	H	H	H	H	H	H	H	H	L	L
X	L	H	H	H	H	H	H	H	H	H	L	H
L	H	H	H	H	H	H	H	H	H	H	H	L

(b)

Fig. 30-21. Codificador de prioridades de 10 a 4 líneas 74147: a) diagrama de puntas de contacto de salida; b) tabla de verdad (X = "no importa").

Un decodificador para el cual $n = 2^m$ se puede emplear para implementar circuitos de lógica combinatoria. El método resulta claro cuando se identifica un decodificador de este tipo como "reconocedor de minterminos", en el sentido de que una línea de salida determinada que se sostiene identifica que su mintermino correspondiente se aplica a las líneas de selección de salida. Esto se ilustra con el ejemplo de la figura 30-20, donde se utiliza un decodificador 1 de 8 (74S138) para implementar una función de tres variables. Las tres variables, P , Q y R , se conectan respectivamente a las líneas de selección S_2 , S_1 y S_0 . Por tanto, cada celda del diagrama de Karnaugh (fig. 30-20b) se asocia con una de las líneas de salida. Como la función va a ser 1 lógico cuando se seleccionen las salidas O_1 , O_6 o O_7 , la función se implementa por medio de la operación lógica OR aplicada a estas salidas. Obsérvese que se usa una compuerta NAND debido a que las salidas son LOW activas. Si bien con este esquema parecen desperdiciarse las facultades del decodificador, se debe reconocer que, dentro de los límites de egresancia, es posible implementar cualquier número de funciones diferentes de las tres variables de selección añadiendo una compuerta NAND por función. Las entradas de

habilitación del 74S138 permiten que estas unidades se interconecten para incrementar el número de variables por función. Por ejemplo, se pueden utilizar cuatro decodificadores para generar un conjunto de funciones de cinco variables¹. Nótese que cada función de cinco variables puede requerir una compuerta NAND de hasta 16 entradas.

30.5.2 Aplicaciones del codificador

Los codificadores se utilizan principalmente para vincular teclados a la lógica accionada por ellos. Un ejemplo de codificador de este tipo es el 74147, que convierte diez entradas en una salida BCD de cuatro líneas. De hecho, sólo hay nueve líneas de entrada de datos, cada una de las cuales es LOW activa. La salida cero BCD se activa cuando las nueve líneas de entrada son HIGH (que corresponden a ninguna activa). El 74147 se designa como un codificador de prioridad. Esto quiere decir que, si más de una línea de entrada está activa (LOW), el código de salida corresponde a la línea de entrada activa de orden superior. Si las líneas 5 y 8 están activas (LOW), por ejemplo, el código de salida (que también es LOW activo) es LHHH,

(1 000 → 8). La característica de la prioridad hace posible programar varias acciones de manera simultánea y que se ejecuten en la secuencia establecida por los órdenes de las líneas. La terminación de cada acción debe desactivar la línea de orden superior antes de que establezca el siguiente código de salida. La tabla de verdad se da en la figura 30-21 (X corresponde a "no importa").

30.5.3 Aplicaciones del convertidor de código

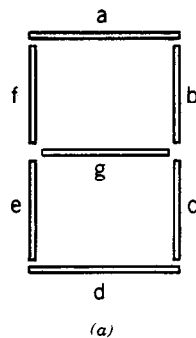
Un ejemplo simple de convertidor de código es el llamado decodificador óptico de BCD a siete segmentos. Éste tiene cuatro entradas que se activan en forma simultánea. Las siete líneas de salida son la combinación HIGH-LOW adecuada para accionar los segmentos de diodos emisores de luz que reproducen el número decimal codificado. En la figura 30-22 se da un ejemplo de esto. Otros ejemplos de convertidores de código son el BCD a decimal codificado en exceso de tres, el de BCD a decimal codificado en exceso de tres de paso unitario, y el de BCD con bit de paridad. Este último es un convertidor de código de cuatro entradas y cinco salidas.

30.6 DISPOSITIVOS DE ARITMÉTICA BINARIA

30.6.1 Sumadores

Un sumador completo (FA, de *full adder*) es un circuito combinatorio de tres entradas y dos salidas que suma dos números binarios de 1 bit. Las tres entradas incluyen los dos bits por sumar y la entrada de acarreo, que se proporciona para hacer posible la conexión de sumadores en cascada para la adición de números binarios de n bits. Una salida es la suma de los dos bits y la entrada de acarreo, y la otra salida es el acarreo generado por esta suma. Un semisumador (HA, de *half adder*) es un sumador sin entrada de acarreo. En la figura 30-23 se presentan tablas de verdad y diagramas lógicos de sumadores completos y semisumadores¹.

Para la adición en paralelo de dos números binarios de n bits se requieren $n - 1$ sumadores completos y un semisumador, como se muestra en la figura 30-24a (para $n = 8$). Los números por sumar normalmente están en registros de almacenamiento y se comunican simultáneamente a las entradas del sumador al inicio



ENTRADAS				SALIDAS (BAJAS ACTIVAS)							VISUALIZACIÓN
I_3	I_2	I_1	I_0	\bar{a}	\bar{b}	\bar{c}	\bar{d}	\bar{e}	\bar{f}	\bar{g}	
L	L	L	L	L	L	L	L	L	L	H	0
L	L	L	H	H	L	L	H	H	H	H	1
L	L	H	L	L	L	H	L	L	H	L	2
L	L	H	H	L	L	L	L	H	H	L	3
L	H	L	L	H	L	L	H	H	L	L	4
L	H	L	H	L	H	L	L	H	L	L	5
L	H	H	L	H	H	L	L	L	L	L	6
L	H	H	H	L	L	L	H	H	H	H	7
H	L	L	L	L	L	L	L	L	L	L	8
H	L	L	H	L	L	L	H	H	L	L	9

(b)

Fig. 30-22. Decodificador óptico de decimal codificado en binario (BCD) a siete segmentos: a) identificación de los segmentos; b) tabla de verdad.

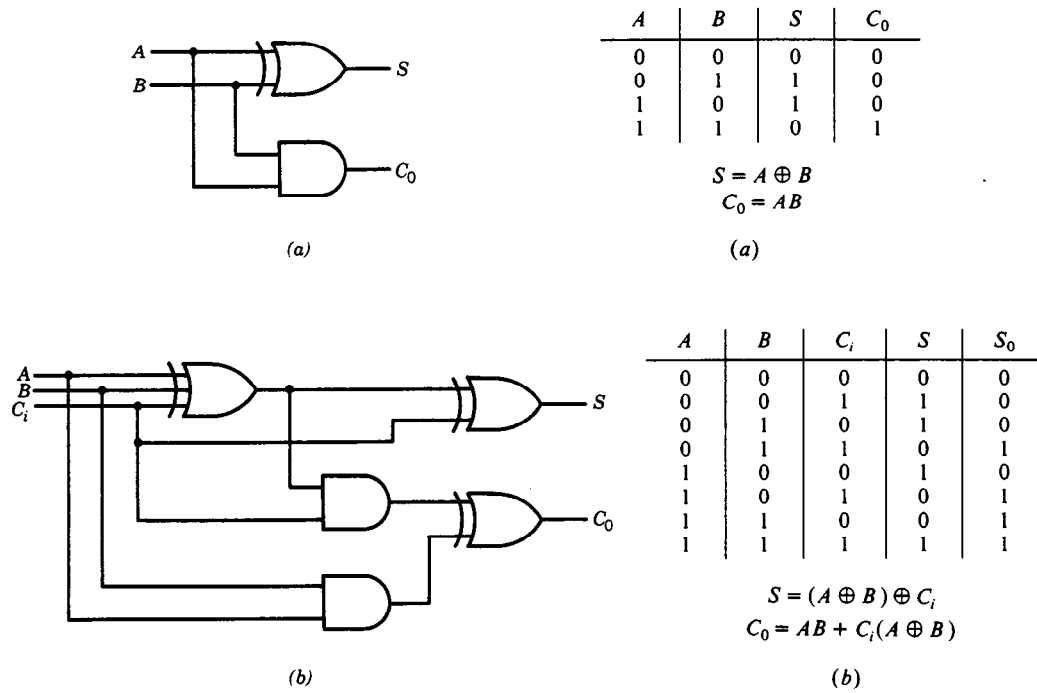


Fig. 30-23. Sumadores: a) circuito y tabla de verdad del semisumador; b) circuito y tabla de verdad del sumador completo.

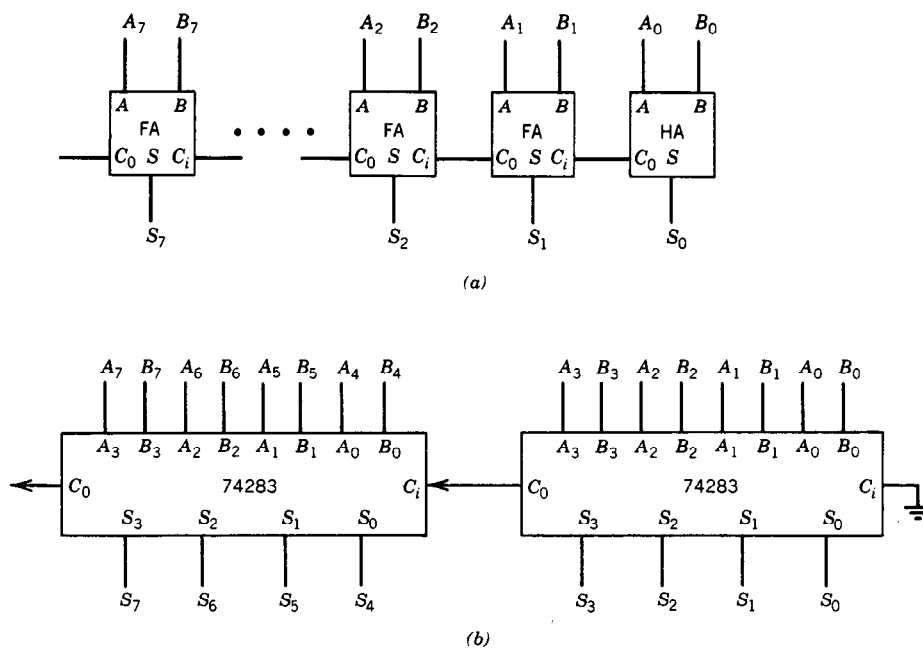
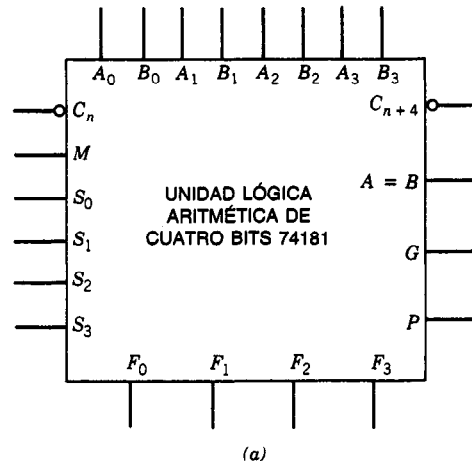


Fig. 30-24. Sumadores de 8 bits: a) sumador de 8 bits en el que se utilizan siete sumadores completos y un semisumador; retardo en la propagación en el peor de los casos = 72 ns; b) sumador de 8 bits en el que se usan dos sumadores de 4 bits con previsión de acarreo; retardo en la propagación en el peor de los casos = 18 ns.



ENTRADAS DE SELECCIÓN DE MODO				SALIDAS DE FUNCIÓN F_i		
				LÓGICA	ARITMÉTICA $M = L$	
S_3	S_2	S_1	S_0	$M = H$	$C_n = H$	$C_n = L$
L	L	L	L	\overline{A}	A	A más 1
L	L	L	H	$A + \overline{B}$	$A + B$	$(A + B)$ más 1
L	L	H	L	$\overline{A} B$	$A + \overline{B}$	$(A + \overline{B})$ más 1
L	L	H	H	0 lógico	Menos 1	0
L	H	L	L	$\overline{A} \overline{B}$	$A + \overline{A} \overline{B}$	A más $\overline{A} \overline{B}$ más 1
L	H	L	H	\overline{B}	$(A + B)$ más $\overline{A} \overline{B}$	$(A + B)$ más $\overline{A} \overline{B}$ más 1
L	H	H	L	$A \oplus B$	A menos B menos 1	A menos B
L	H	H	H	$\overline{A} \overline{B}$	$\overline{A} \overline{B}$ menos 1	$\overline{A} \overline{B}$
H	L	L	L	$\overline{A} + B$	A más $\overline{A} B$	A más $\overline{A} B$ más 1
H	L	L	H	$\overline{A} \oplus \overline{B}$	A más B	A más B más 1
H	L	H	L	B	$(A + \overline{B})$ más $\overline{A} B$	$(A + \overline{B})$ más $\overline{A} B$ más 1
H	L	H	H	AB	AB menos 1	AB
H	H	L	L	1 lógico	A más A	A más A más 1
H	H	L	H	$A + \overline{B}$	$(A + B)$ más A	$(A + B)$ más A más 1
H	H	H	L	$A + B$	$(A + \overline{B})$ más A	$(A + \overline{B})$ más A más 1
H	H	H	H	A	A menos 1	A

(b)

Fig. 30-25. Unidad lógica aritmética 74181 de lógica transistor-transistor (TTL): a) designaciones de entrada y salida; b) funciones de salida. A_i, B_i = entradas del operando; C_n = entrada del acarreo; C_{n+4} = salida del acarreo; M = entrada de lógica/aritmética; S_i = entradas de selección de modo; F_i = salidas de la función; G = salida de generación del acarreo; P = salida de propagación del acarreo.

de la operación de adición. Dado que los sumadores son circuitos combinatorios, la suma se realiza en algunos retardos de compuerta (típicamente de 25 ns en TTL estándar hasta 2 ns en ECL). No obstante, el tiempo necesario para realizar una operación de adición completa es considerablemente mayor debido al efecto de transporte ondulante. El peor caso de este efecto se presenta cuando el equivalente binario de 1 se suma a un número binario que conste todo de unos. En este caso, el acarreo generado por el semisumador debe propagarse etapa por etapa en su recorrido por el

sumador MSB. Con un retardo típico en la propagación del acarreo de 18 ns/etapa, se acumularía un total de 144 ns para un sumador de 8 bits.

Este retardo se puede reducir mediante el uso de sumadores binarios de 4 bits con previsión de acarreo. Estos sumadores son circuitos combinatorios con nueve entradas (una entrada de acarreo y 8 entradas para dos números de 4 bits) y cinco salidas (una salida de acarreo además de la suma de 4 bits). Dado que la salida de acarreo es una función combinatoria de todas las entradas, el efecto de transporte ondulante a través

$$\begin{array}{r}
 110 \\
 101 \\
 \hline
 110 \\
 000 \\
 110 \\
 \hline
 11110 \\
 (a)
 \end{array}$$

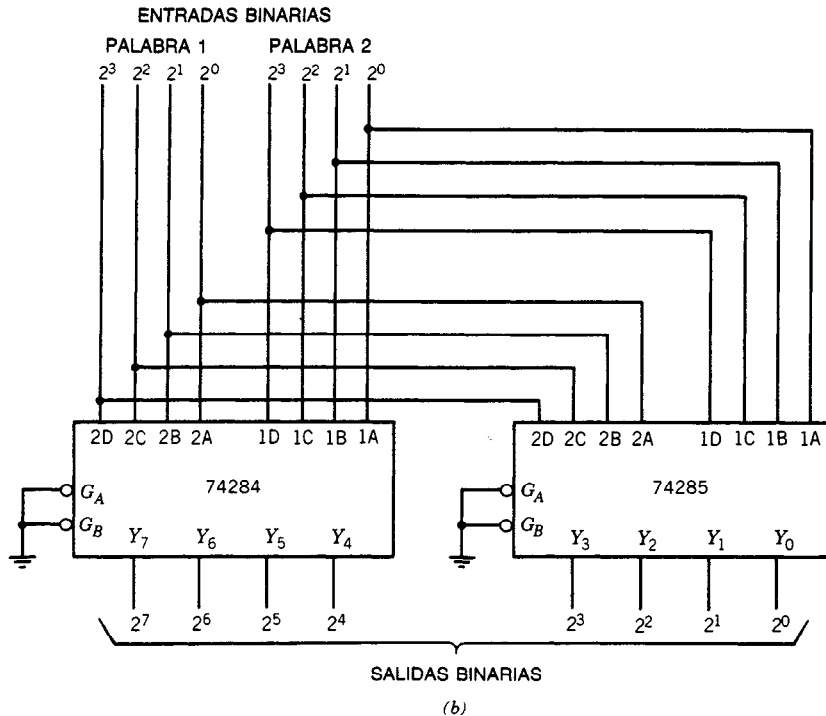


Fig. 30-26. Multiplicación binaria: a) ejemplo de la operación de multiplicación; b) multiplicador binario en paralelo de 4×4 .

de los cuatro bits se elimina, de manera que el retardo máximo en la propagación de C_{ent} a C_{sal} es de 18 ns. Por tanto, la implementación de un sumador de 8 bits mediante el uso de dos sumadores de 4 bits con previsión de acarreo reduce el retardo en la propagación de 144 a 36 ns. En la figura 30-24 se comparan los dos sumadores de 8 bits.

Una alternativa a la inclusión de toda la lógica de previsión de acarreo en el circuito integrado del sumador consiste en proporcionar salidas de generación y propagación de acarreo para emplearlas como entradas de un generador con previsión de acarreo¹⁴. Esto hace posible tener un acarreo previsto con más de 4 bits.

Se pueden efectuar adiciones extremadamente rápidas mediante la aplicación de este método por medio de la lógica acoplada al emisor (ECL). Por ejemplo, ocho unidades de lógica aritmética de cuatro bits (ECL10181) en el modo de adición, junto con dos bloques con previsión de acarreo (ECLC10179), completan la operación de adición de dos números de 32 bits en el tiempo típico de 19 ns¹⁵.

30.6.2 Sustractores

En principio, los sustractores (tanto los completos como los semisustractores) se pueden considerar circuitos combinatorios.

La tabla de verdad se construye para la resta y los acarreos se convierten en operaciones de "pedir prestado". Dado que generalmente la sustracción se efectúa sumando el complemento a uno o a dos (según el sistema) del sustraendo y el minuendo, en los encapsulados MSI no se dispone de este tipo de sustractores. La operación de resta se incluye entre las facultades de la unidad lógica aritmética (ALU, de *arithmetic logic unit*) de 4 bits encapsulada como el TTL74181 en una DIP de 24 puntas de contacto. Aun en esta unidad, la sustracción se realiza complementando a uno (generando $A - B - 1$) y, por tanto, requiere un acarreo al final en la posición del LSB que complete la operación $A - B$.

Como se indica en la figura 30-25, esta ALU realiza 14 operaciones aritméticas en la adición y sustracción ($M = L$), y 16 funciones de lógica ($M = H$).

30.6.3 Multiplicadores

El esquema más simple para la multiplicación de números binarios se ilustra mejor con un ejemplo. En la figura 30-26a se presenta la multiplicación del equivalente binario de 6 (el multiplicando) por el equivalente binario de 5 (el multiplicador). La operación incluye la formación del producto de cada bit del multiplicador y el multiplicando completo. Estos productos —llamados parciales— se desplazan a la izquierda m etapas, donde m depende de la significancia de los bits del multiplicador. Los productos parciales desplazados se suman después para formar el producto final.

Para implementar este algoritmo se requieren registros de desplazamiento que contendrán el multiplicando y el multiplicador; un registro acumulador, que es de las longitudes combinadas de los registros del multiplicador y el multiplicando; y un sumador con tantos bits como el acumulador. La única modificación del procedimiento de la figura 30-26a es que la adición se realiza sumando cada nuevo producto parcial al total de los productos parciales previamente formados en el acumulador. Obsérvese que cada 1 del multiplicador requiere una operación de desplazamiento y adición, mientras que cada 0 requiere simplemente una operación de desplazamiento. En un sistema sincrónico esto significa que el tiempo requerido para completar la multiplicación de dos números es N veces la duración de cada operación de desplazamiento y suma, donde N es el número de bits del multiplicador.

Este proceso se acelera empleando un circuito de lógica combinatoria más complejo para formar productos parciales en que intervenga más de un solo bit del multiplicador a la vez. Por ejemplo, los multiplicadores en paralelo de 4 bits 74284 y 74285 de TTL, que se conectan como se muestra en la figura 30-26b, forman el producto de 8 bits de los dos números binarios de 4 bits en unos 20 ns. Cuatro de estas unidades de producto de 8 bits se pueden interconectar con ocho sumadores y cuatro unidades aritméticas lógicas (ALU) en una configuración que se denomina árbol de Wallace¹⁹ para producir un multiplicador de 8×8 bits con 16 salidas.

30.6.4 División

La división en binario se realiza restando el divisor del dividendo hasta que el residuo sea menor que el divisor y contando el número de restas que se necesitan

(p. ej., N). Entonces el MSB del cociente es $N - 1$. Después, el residuo se desplaza a la izquierda y se repite el proceso a fin de obtener la siguiente cifra significativa del cociente. La operación llega a su fin cuando el residuo es cero o bien cuando se ha obtenido la precisión deseada. No se dispone de divisores de este tipo en forma de circuitos integrados. La división en calculadoras y computadoras es realizada por el software adecuado con los circuitos que efectúan las otras operaciones aritméticas.

En el capítulo 59 de este libro se estudia un algoritmo de división de enteros binarios de punto fijo (figs. 59-18 y 59-19).

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

1. W. I. Fletcher, *An Engineering Approach to Digital Design*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ.
2. *CMOS Integrated Circuits*, Motorola, Inc., Arizona.
3. *CMOS Data Book*, Fairchild Camera and Instrument Corp., California.
4. *TTL Data Book*, Fairchild Camera and Instrument Corp., California.
5. *The TTL Data Book for Design Engineers*, Texas Instrument, Inc., Texas.
6. D. Schilling y C. Belove, *Electronic Circuits, Discrete and Integrated*, 2.^a ed., McGraw-Hill, Nueva York.
7. H. Taub y D. Schilling, *Digital Integrated Electronics*, McGraw-Hill, Nueva York.
8. *Signetics Analog Data Manual*, Signetics Corp., California.
9. *Linear Integrated Circuits Data Book*, Fairchild Camera and Instrument Corp., California.
10. *Linear Databook*, National Semiconductor Corp., California.
11. *Signetics Analog Applications Manual*, Signetics Corp., California.
12. *MECL High Speed Integrated Circuits*, Motorola, Inc., Arizona.
13. *Fairchild TTL Applications Handbook*, Fairchild Camera and Instrument Corp., California.
14. S. C. Lee, *Digital Circuits and Logic Design*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ.
15. *Motorola MECL System Design Handbook*, Motorola Semiconductor Products, Inc., Arizona.
16. J. S. Base, *Computer System Architecture*, Computer Science Press, Potomac, MD.

CAPÍTULO 31

Convertidores de digital a analógico (D/A) y de analógico a digital (A/D)

Michael Baltrush

New Jersey Institute of Technology,
Newark, New Jersey

INTRODUCCIÓN

**31.1 Convertidores D/A de resistores ponderados
en escalera ponderada**

31.2 Especificaciones de convertidores D/A

**31.3 Convertidores A/D en paralelo
y de aproximación sucesiva**

31.4 Convertidores A/D de conteo (rampa)

31.5 Especificaciones de los convertidores A/D

INTRODUCCIÓN

En la computadora digital se utilizan unos y ceros (1 y 0) para representar valores internos, y éstos se manejan con técnicas digitales. Sin embargo, el "mundo" exterior de la computadora es analógico por naturaleza; es decir, los valores producidos varían en un amplio continuo.

Para transformar datos de un campo a otro, de discreto a continuo o de continuo a discreto, se emplean convertidores de digital a analógico (D/A) o de analógico a digital (A/D). Los fabricantes que se citan en la tabla 31-1 producen diversos equipos de conversión. Este equipo abarca desde circuitos integrados individuales, que son convertidores completos por sí mismos, hasta subsistemas completos que se pueden utilizar en la adquisición de datos.

31.1 CONVERTIDORES D/A DE RESISTORES PONDERADOS EN ESCALERA PONDERADA

El convertidor D/A es un dispositivo que acepta una palabra digital y un voltaje o una corriente analógicos de referencia (fig. 31-1) y produce un voltaje o una corriente analógicos.

La palabra digital puede estar codificada en binario, binario con valor de compensación, decimal codificado en binario (BCD) o ser una magnitud con signo o la representación invertida de uno de los anteriores. El código representa una fracción con el punto a la izquierda del bit más significativo (MSB), llamado A_0 . El bit menos significativo (LSB) se denomina A_{n-1} , donde n es el número de bits de la palabra digital. El valor de escala real del valor analógico de referencia se multiplica por la fracción para producir la salida de valor analógico.

Uno de los circuitos convertidores D/A más simples es el convertidor D/A de resistores ponderados^{1,2} que se muestra en la figura 31-2. La palabra digital controla los conmutadores, donde un 1 lógico indica una conmutación al V_{ref} , y un 0 lógico, una conmutación a tierra. Los resistores sucesivos están ponderados por

Tabla 31-1. Lista de proveedores de convertidores

Analog Devices, Inc.
PO Box 280
Norwood, MA 02062

Burr-Brown Research Corp.
6730 S. Tucson Blvd.
Tucson, AZ 85706

Datel Intersil, Inc.
11 Cabot Blvd.
Mansfield, MA 02048

Fairchild Semiconductor
464 Ellis
Mountain View, CA 94042

Motorola Semiconductor Products, Inc.
PO Box 20912
Phoenix, AZ 85036

RCA
Route 202
Somerville, NJ 08876

Signetics
811 E. Arques Ave.
Sunnyvale, CA 94086

Texas Instruments, Inc.
PO Box 20219
Dallas, TX 75220

un factor de 2, lo cual produce las contribuciones ponderadas binarias a la salida analógica, que se muestran en la ecuación 31-1:

$$V_{sal} = V_{ref} * (A_{n-1} * 2^{-(n-1)} + A_{n-2} * 2^{-(n-2)} + \dots + A_1 * 2^{-1} + A_0) \quad (31-1)$$

Sin embargo, la conservación de razones de resistor exactas en un intervalo grande, de 4 096 a 1 para un convertidor de 12 bits, hace difícil de fabricar el convertidor D/A.

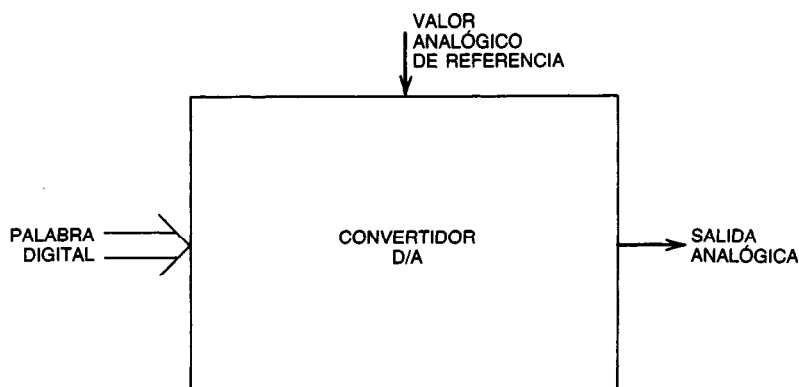


Fig. 31-1. Diagrama de bloques de un convertidor de digital a analógico (D/A).

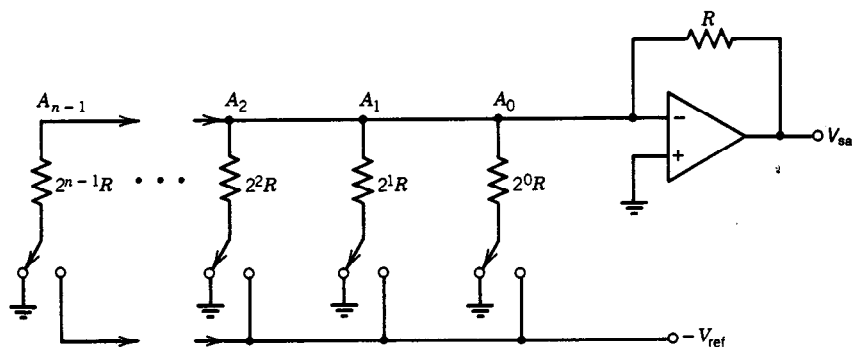


Fig. 31-2. Convertidor de digital a analógico (D/A) de resistores ponderados, que consta de un amplificador sumador y una red de resistores ponderados.

Una forma de reducir el número de resistores consiste en utilizar un número limitado de valores con atenuación adecuada (fig. 31-3)².

Dentro de cada banco de cuatro resistores, los valores asignados son factores 2. Entre los bancos están los resistores de atenuación, que pueden configurarse para producir una ponderación binaria (si $r = 8R$) o ponderación BCD (si $r = 4.8R$) de diferentes códigos de entrada.

Reduciendo lo más posible el número de resistores, los valores de éstos pueden reducirse a la pareja de valores R y $2R$ (fig. 31-4). Este convertidor es un diseño popular adecuado para circuitos integrados. Cada bit de la palabra digital, que representa un cierre del conmutador, contribuye a la salida en la forma siguiente. La resistencia equivalente de Thévenin en la línea discontinua de la figura 31-4 es R y la fuente de voltaje equivalente es:

$$V_{ref} * \frac{A_{n-1}}{2}$$

Al repetir en A_{n-2} se obtiene una resistencia equivalente de R y una fuente de voltaje equivalente de:

$$V_{ref} * \frac{(A_{n-1}/2 + A_{n-2})}{2} = V_{ref} * \left(\frac{A_{n-1}}{2^2} + \frac{A_{n-2}}{2} \right)$$

Continuando con A_0 , se obtiene una resistencia equivalente de R y un voltaje equivalente (por medio de inducción) igual a:

$$V_{ref} * \left(\frac{A_{n-1}}{2^n} + \frac{A_{n-2}}{2^{n-1}} + \dots + \frac{A_1}{2^2} + \frac{A_0}{2^1} \right)$$

Por tanto, el voltaje de salida está dado por:

$$V_{sal} = \left(\frac{-V_{ref}}{2} \right) * (A_{n-1} * 2^{-(n-1)} + A_{n-2} * 2^{-(n-2)} + \dots + A_1 * 2^{-1} + A_0) \quad (31-2)$$

31.2 ESPECIFICACIONES DE CONVERTIDORES D/A

Para elegir un convertidor D/A es necesario entender las especificaciones del fabricante. Los fabricantes utilizan los términos que se detallan seguidamente al especificar sus convertidores. Cada concepto se define o explica. Al exponer cada término se supone que es el único que influye en la operación del convertidor. El usuario determina los valores y tolerancias de cada especificación basándose en el uso que vaya a darle al dispositivo.

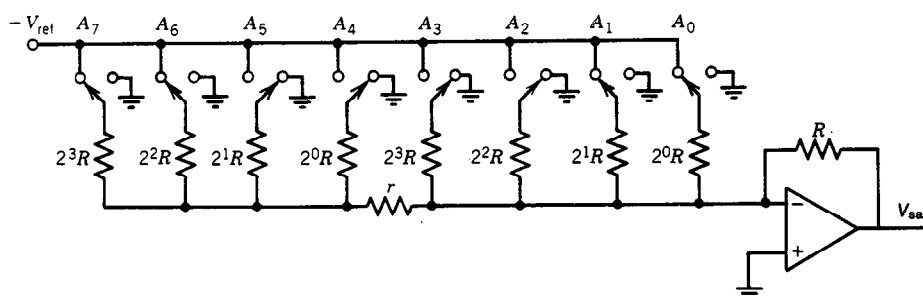


Fig. 31-3. Convertidor de digital a analógico (D/A) de resistores ponderados de 8 bits. $r = 8R$ para el convertidor binario recto de 8 bits; $r = 4.8R$ para el convertidor decimal codificado en binario (BCD) de dos dígitos decimales.

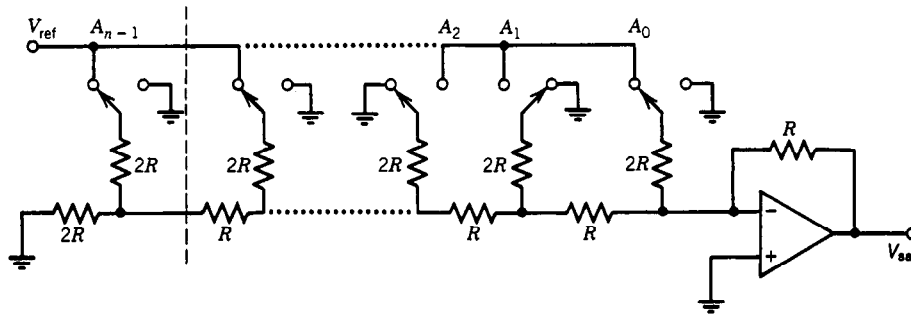


Fig. 31-4. Convertidor de digital a analógico (D/A) en escalera $R - 2R$.

- **Salida de escala real.** El voltaje de salida de escala real V_0 de un convertidor D/A es el valor "máximo" de la salida analógica que se puede producir. Por lo general se especifica como un número redondo: 2.500 V, 5.000 V, 10.000 V o 10.240 V. Estos valores son estándares en estos intervalos en el mercado para las unidades que se ofrecen, no obstante, se pueden diseñar con cualquier valor que se especifique. La figura 31-5 es una gráfica de la palabra binaria de entrada en función de la fracción de salida de escala real, V_0 . En el convertidor de 3 bits que se muestra sólo pueden introducirse ocho valores diferentes, que van de 000 a 111 en binario. Cada uno de estos valores de entrada se trata como el numerador de una fracción cuyo denominador es 2^n , donde n es el número de bits del convertidor. Para determinar el valor de salida analógica, la salida analógica máxima especificada se multipli-

ca por esta fracción. Como la fracción resultante siempre es menor que 1, el convertidor no puede producir el valor máximo de la salida analógica. Un convertidor D/A de 12 bits especificado con una salida de escala real de 5.000 V produce 4.9987 V $[(2^{12} - 1)/2^{12}] * V_0$ o bien $(4095/4096) * V_0$.

- **Resolución.** La resolución de un convertidor D/A es el menor cambio analógico que se produce en la salida. La resolución del convertidor D/A es determinada por el número de bits de la palabra de entrada digital. Para un convertidor de voltaje D/A codificado en binario, la resolución en volts es $V_0/2^n$. Para el convertidor de 3 bits de la figura 31-5, el menor cambio que se podría producir en la salida es $1/8$ de V_0 ($V_0/2^3$). Para un convertidor D/A de 12 bits con salida de escala real de 5.000 V, la resolución es 1.221 mV ($5/2^{12}$) o una parte en 4 096.

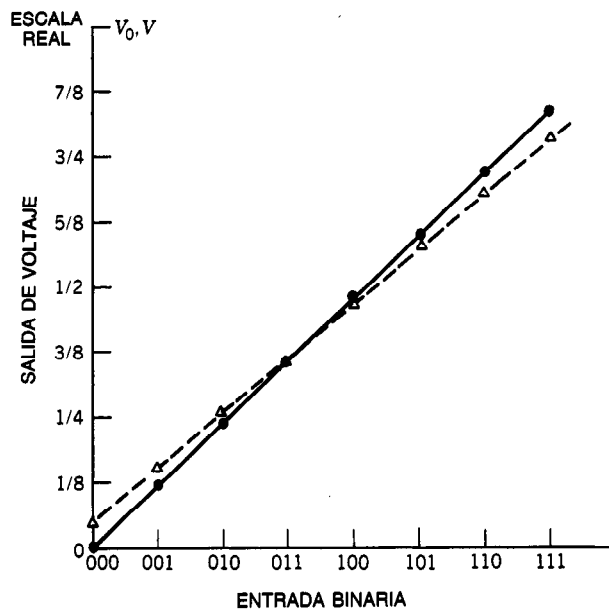


Fig. 31-5. Función de transferencia ideal de un convertidor de digital a analógico (D/A) de 3 bits (línea continua) y una función de transferencia con errores de compensación y ganancia (línea discontinua).

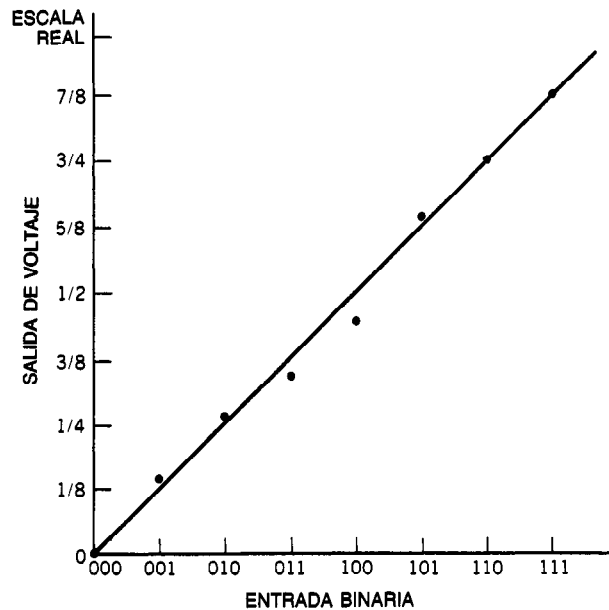


Fig. 31-6. Función de transferencia no lineal con una recta ajustada a los puntos extremos.

- **Error de compensación.** El error de compensación es la salida analógica medida del convertidor D/A cuando su código de entrada digital es cero. En la figura 31-5, la línea discontinua que conecta los triángulos corta el eje de salida de voltaje en un punto distinto de 0. Esta diferencia es el error de compensación. Debido a las desigualdades de los componentes, la entrada de un valor digital para producir una salida 0 analógica es rara vez exacta; por tanto, suele disponerse de ajustes para eliminar o minimizar este error.
- **Ganancia.** La ganancia de un convertidor D/A suele colocarse en 1. Para el convertidor de 3 bits (fig. 31-5), una ganancia de 1 produciría un valor analógico de escala real de $7/8$ a un valor de entrada digital de 111. Esto lo demuestra la línea continua que conecta los puntos de la figura 31-5, que tiene una ganancia de 1. Cada voltaje producido es igual a su valor predicho. Si la ganancia es distinta de 1, los valores digitales de entrada no producen la salida analógica deseada. En la figura 31-5, la ganancia es menor que 1 para la línea que conecta los triángulos. Para un valor de entrada de 111 (valor de entrada máximo), el convertidor produce un valor menor que el especificado, $7/8$ de V_0 . Suele disponerse de ajustes para minimizar este error.
- **Error de linealidad.** El error de linealidad de un convertidor D/A mide la desviación de la salida real del convertidor respecto de una línea ajustada a los puntos extremos medidos. En la figura 31-6, los puntos que no están sobre la recta que conecta los puntos extremos medidos (los asociados con las entradas 000 y 111) tienen

errores de linealidad individuales. La magnitud del error de linealidad es la distancia que hay de los puntos a la recta. Este error se especifica por medio de una fracción del LSB o el porcentaje de salida de escala real. El valor más grande del error de linealidad es el que se especifica.

- **Error de linealidad diferencial.** Esta es la diferencia máxima entre cada etapa (incremento) de la salida analógica y el tamaño de etapa (incremento) ideal de un LSB.
- **Monotonía.** Un convertidor D/A es monótono si los códigos digitales crecientes producen salidas analógicas crecientes.
- **Error de exactitud absoluta.** El error de exactitud absoluta de un convertidor D/A es la diferencia entre el punto de colocación de escala real y un estándar de voltaje absoluto que suele ser atribuible a la National Bureau of Standards.
- **Exactitud relativa.** La exactitud relativa es la diferencia entre el valor especificado y el valor real medio para una determinada palabra de entrada digital. Para esto se supone que se han minimizado los errores de compensación y de ganancia.
- **Estabilidad.** El rendimiento de un convertidor D/A varía con el tiempo, la temperatura y las variaciones de voltaje de alimentación. La resistencia del convertidor a estos factores es su estabilidad. Por ejemplo, un coeficiente de ganancia típico informado en una hoja de datos de un fabricante es de 20 ppm / °C. Muchas de las otras especificaciones tienen coeficientes de temperatura y constantes de envejecimiento asociadas.
- **Tiempo de asentamiento.** En un convertidor D/A ideal, un cambio del código de entrada di-

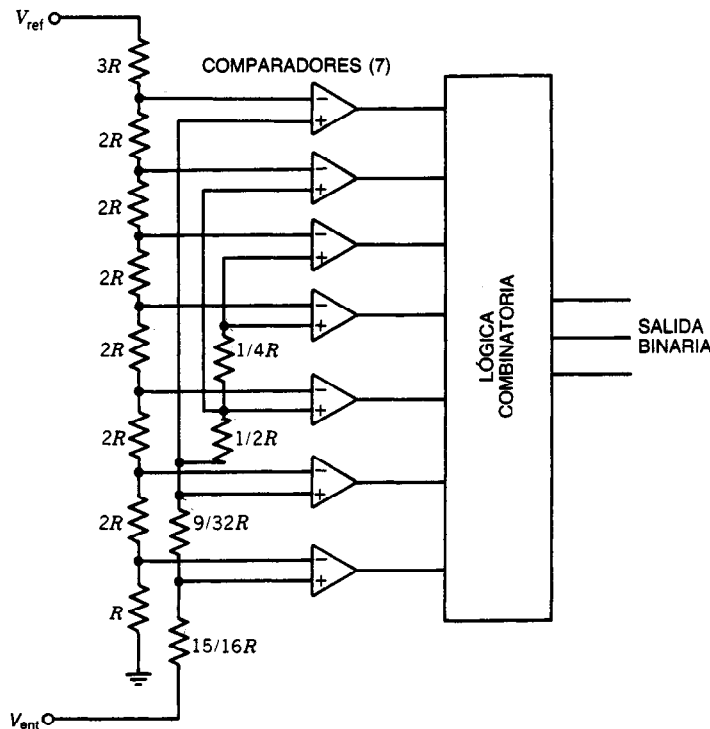


Fig. 31-7. Diagrama de bloques de un convertidor de analógico a digital (A/D) en paralelo de 3 bits.

gital de un valor a otro produce una variación instantánea en la salida analógica. En un convertidor real los diversos componentes introducen retardos, y la salida requiere cierto tiempo para llegar al nuevo valor. Éste es el tiempo de asentamiento del convertidor.

En los convertidores D/A puede ocurrir un efecto transitorio (interferencia) grande en la salida analógica para un cambio pequeño en la entrada digital. Dicho efecto es más pronunciado en transiciones de bits importantes. Por ejemplo, una transición del binario 1000 al binario 0111 puede pasar por el 0000 binario si los dispositivos de conmutación digital se apagan más rápido de lo que se encienden. Este valor binario transitorio de 0000 produce la interferencia o falta de salida. Las fallas se pueden minimizar con el diseño adecuado o la colocación de otros circuitos.

31.3 CONVERTIDORES A/D EN PARALELO Y DE APROXIMACIÓN SUCESIVA

Un convertidor A/D toma una señal analógica y la convierte en un número binario que consta de n bits, para ser manipulado por una computadora digital.

El convertidor A/D en paralelo (fig. 31-7) es el más veloz de los convertidores A/D^{1,3}. Emplea hardware para realizar la conversión en paralelo. También se

denomina convertidor relámpago. En un convertidor de 3 bits, el valor analógico desconocido se compara simultáneamente con siete valores distintos. Las salidas del comparador alimentan la lógica combinatoria, que produce el valor digital de 3 bits. El convertidor A/D de n bits en paralelo se utiliza cuando se necesita alta velocidad pero es aceptable una baja resolución, ya que el número de comparadores es $2n - 1$.

Un convertidor A/D rápido sin los aditamentos generales de hardware del convertidor A/D en paralelo es el convertidor A/D de aproximación sucesiva de la figura 31-8^{1,3,4}. Este convertidor utiliza un procedimiento de búsqueda binaria para efectuar la conversión en n periodos del reloj, donde n es el número de bits en el código digital. La lógica de aproximación sucesiva (SAL, de *successive approximation logic*) coloca sucesivamente cada bit y compara la salida resultante del convertidor D/A con el voltaje incógnito. Si la salida del convertidor D/A con el bit encendido es mayor que el voltaje desconocido, el bit se apaga; de lo contrario, el bit se mantiene encendido. El siguiente bit se trata de la misma manera hasta ensayarlos todos. Para un convertidor A/D de 3 bits, la figura 31-8b es una gráfica del contenido de la salida del convertidor D/A (V_{sal}) en función del tiempo cuando la entrada $V_{ent} = 7/16 V^1$. Al inicio de la conversión sólo está colocado el MSB del convertidor D/A. Éste tiene el valor de 1/2 escala. La salida del comparador indica que el valor del voltaje generado es demasiado alto.

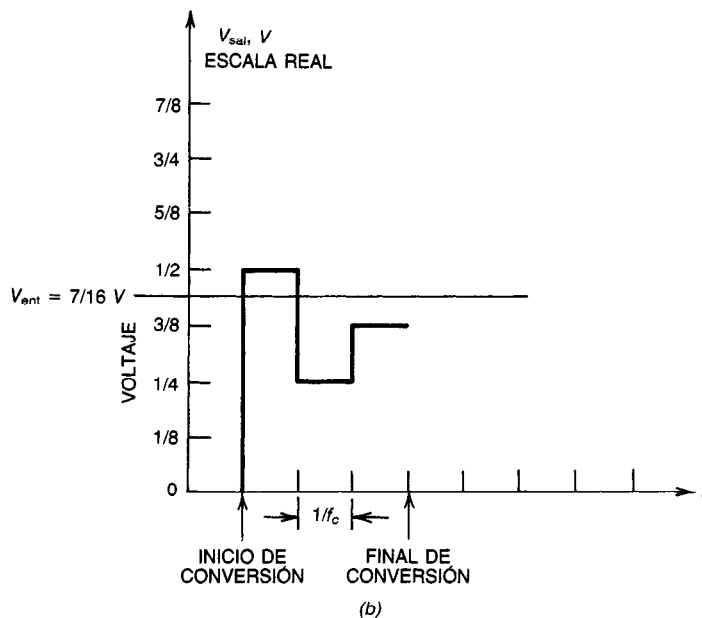
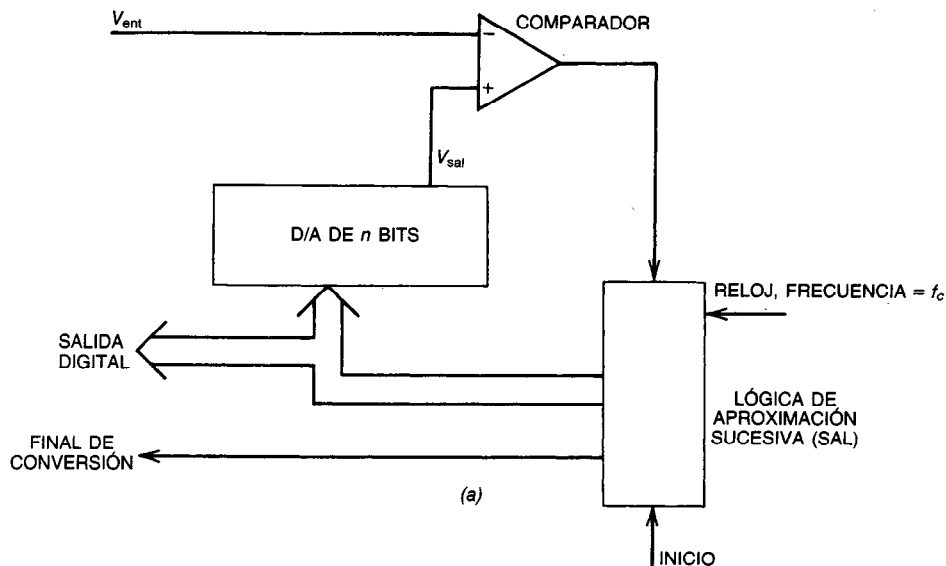


Fig. 31-8. a) Diagrama de bloques de un convertidor de analógico a digital (A/D) de aproximación sucesiva. b) Onda de forma de salida V_{sal} con convertidor de digital a analógico (D/A) de 3 bits para $V_{ent} = 7/16 V$.

Durante el siguiente periodo, este bit se apaga y se coloca el bit siguiente; éste tiene el valor de 1/4 de escala. La salida del comparador indica que el voltaje generado es demasiado bajo y, por tanto, ese bit debe permanecer colocado. Durante el periodo siguiente, el bit queda colocado y el siguiente bit se coloca. La salida del comparador indica que este bit debe permanecer colocado. Ahora está completa la conversión y el valor digital es 011. Este convertidor tiene una lógica más compleja que el convertidor en paralelo.

31.4 CONVERTIDORES A/D DE CONTEO (RAMPA)

En el convertidor A/D simple de conteo de la figura 31-9^{1,3} la conversión comienza cuando el contador se coloca en 0. El contador se incrementa hasta que el comparador cambia de estado, lo que indica que el valor digital que alimenta al convertidor D/A representa la entrada analógica incógnita. Para un convertidor A/D de 3 bits, la salida V_{sal} del convertidor D/A

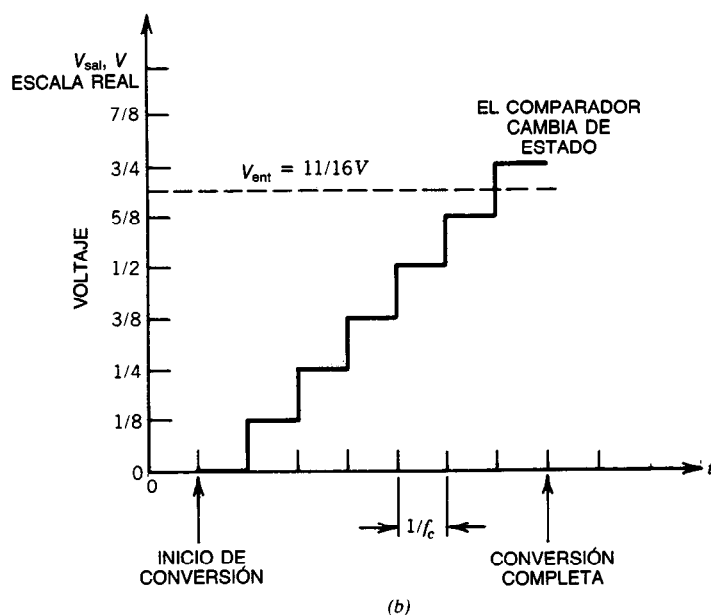
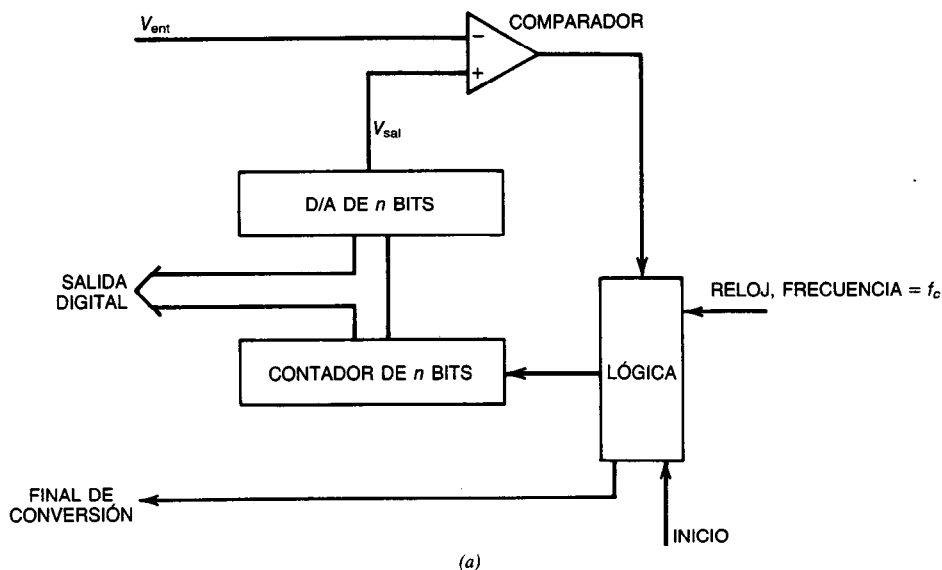


Fig. 31-9. a) Diagrama de bloques de un convertidor de analógico a digital (A/D) de conteo.
b) Onda de forma de salida V_{sal} con convertidor de digital a analógico (D/A) de 3 bits para $V_{ent} = 11/16 V$.

contenido se grafica contra un eje de tiempo (fig. 31-9b) cuando la entrada $V_{ent} = 11/16 V$. Al inicio de la conversión, la salida de D/A es 0. Dado que la señal analógica generada no es igual ni mayor que el voltaje desconocido, el contador se incrementa y el D/A produce un voltaje más alto. La salida del comparador se vuelve a verificar y el contador se vuelve a incrementar hasta que la salida del comparador cambia a 1, lo cual indica que la señal analógica generada es igual o mayor

que el voltaje incógnito. Una característica de este convertidor es que el tiempo de conversión es proporcional a la señal analógica incógnita. El tiempo de conversión de un cambio de escala real es igual a la frecuencia del reloj dividida entre el número máximo de conteos. Por ejemplo, si la frecuencia del reloj es 10 MHz, la tasa de rendimiento máximo de un convertidor con resolución de 10 bits es un poco menor de 10 KHz [100 μs por conversión ($10 \text{ MHz}/2^{10}$)].

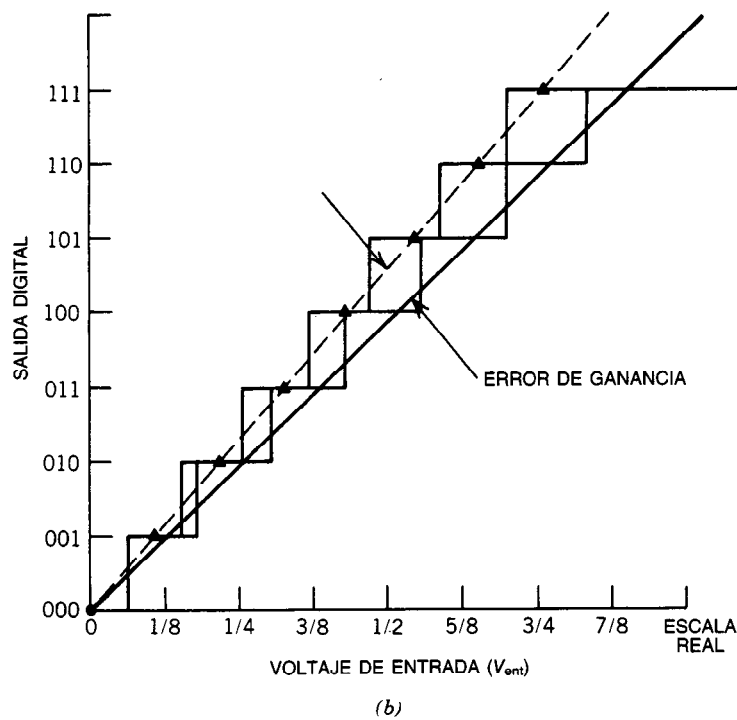
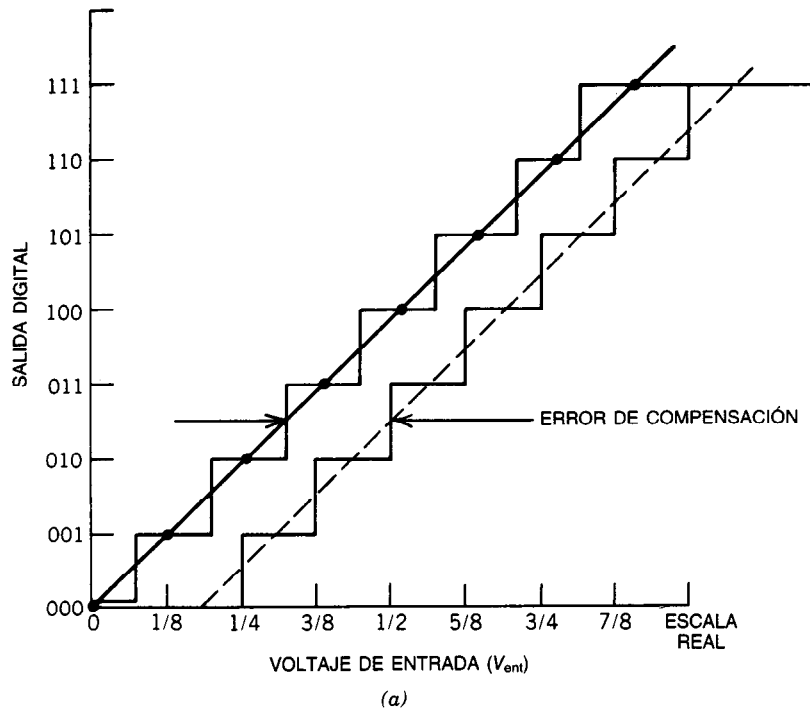


Fig. 31-10. Funciones de transferencia de un convertidor A/D de 3 bits: a) función de transferencia ideal (línea continua) y función de transferencia con un error de compensación (línea discontinua); b) función de transferencia con un error de ganancia (línea discontinua).

31.5 ESPECIFICACIONES DE LOS CONVERTIDORES A/D

Los términos que siguen son utilizados por muchos fabricantes en la especificación de sus convertidores. Cada término se define o explica. En la exposición de cada concepto se supone que es el único que influye en la operación del convertidor. El usuario determina los valores y tolerancias de cada especificación basándose en el uso que vaya a darse al dispositivo:

- **Función de transferencia ideal.** En la figura 30-10a se presenta la función de transferencia de un convertidor A/D de 3 bits ideal. Cuando la entrada analógica aumenta de 0 a la escala real, el valor de la salida digital cambia de 000 a 111 en binario. El tamaño de la etapa (incremento) ideal es 1 LSB, y la etapa (incremento) tiene un valor de escala real dividido entre 2^n . (Para la figura 31-10 $n = 3$, que produce un tamaño de etapa de $1/8$.)
- **Error de cuantización.** El código digital de salida es constante para un intervalo de entradas analógicas igual a 1 LSB. La salida digital primero es mayor y después es menor que el valor analógico de entrada. Este error se denomina error de cuantización. Para un convertidor de 3 bits con escala real de 5.000 V, se produce el valor digital de 001 para voltajes de entrada en el intervalo de 0.3175 a 0.9425 V, o la incertidumbre es 0.625 V o $1/8$ de la escala real.
- **Error de compensación.** Si la primera transición no ocurre en 0.5 LSB, el convertidor A/D tiene un error de compensación. Por ejemplo, un convertidor con un error de compensación tendría su primera transición en otro valor que no fuera $1/16$ de la escala real, como se indica en la figura 31-10a. Este error de compensación se exagera mucho para mayor claridad.
- **Error de ganancia.** Si la pendiente de la recta ajustada a los centros de las etapas (incrementos) no es igual a 1, entonces hay un error de ganancia. Este es igual a la diferencia entre la pendiente real y la pendiente ideal. En la figura 31-10b, la línea discontinua tiene una pendiente mayor que 1, y la diferencia entre la pendiente de la línea discontinua y la pendiente de la línea ideal es el error de ganancia.
- **Error de linealidad diferencial.** Los convertidores A/D tienen errores de linealidad similares a los propios de los convertidores D/A. El error de linealidad diferencial es la diferencia entre la pendiente del código real y el tamaño de la etapa (incremento) ideal de 1 LSB.

- **Error de código faltante.** Un error específico de los convertidores A/D es el error de código faltante. El código de salida salta del valor a al valor $a + 2$, pasando por alto el valor de código $a + 1$.
- **Monotonía.** Un convertidor A/D puede ser no monótono. Si el código de salida disminuye cuando el valor de entrada analógica aumenta, el convertidor presenta un comportamiento no monótono. Si el voltaje de entrada analógico cambia de $1/2$ escala real a $5/8$ de la escala real, la salida digital debe cambiar de 100 a 101. Sin embargo, el comportamiento de un convertidor no monótono podría producir una salida de 100 a 011. El valor de la salida digital ha disminuido (de $1/2$ a $3/8$ de la escala real), mientras que la entrada analógica ha aumentado (de $1/2$ a $5/8$ de la escala real).
- **Estabilidad.** La estabilidad de un convertidor A/D se ve afectada por el tiempo, la temperatura y las variaciones del voltaje de alimentación. Entre las especificaciones del convertidor se incluyen los coeficientes de temperatura y parámetros de envejecimiento. Un valor típico de los fabricantes para el coeficiente térmico de ganancia es 15 ppm/°C.

BIBLIOGRAFÍA

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

1. D. H. Sheingold, ed., *Analog-Digital Conversion Handbook*, Analog Devices, Inc., Norwood, MA.
2. R. C. Jaeger, "Tutorial: Analog Data Acquisition Technology—Part 1—Digital-to-Analog Conversion", *IEEE Micro*, 2(2):20-37.
3. R. C. Jaeger, "Tutorial: Analog Data Acquisition Technology—Part II—Analog-to-Digital Conversion", *IEEE Micro*, 2(3):46-57.
4. H. Taub y D. Schilling, *Digital Integrated Electronics*, McGraw-Hill, Nueva York.

LIBROS Y REVISTAS

- D. B. Bruck, *Data Conversion Handbook*, Hybrid Systems, Corp.
- D. J. Dooley, ed., *Data Conversion Integrated Circuits*, IEEE Press, Nueva York.
- D. F. Hoeschele, *Analog-Digital and Digital-Analog Conversion Techniques*, Wiley, Nueva York.
- H. Schmid, *Electronic Analog/Digital Conversion*, Van Nostrand, Nueva York.

CAPÍTULO 32

Filtros digitales

Thomas W. Parsons

Hofstra University,
Hempstead, Nueva York

- 32.1 Descripción**
 - 32.1.1 Sistemas lineales
 - 32.1.2 Sistemas de datos muestreados
 - 32.1.3 Análisis en el dominio del tiempo
 - 32.1.4 Análisis en el dominio de la frecuencia
 - 32.1.5 Sistemas de fase lineal
 - 32.1.6 Estabilidad
 - 32.1.7 Respuestas de pulso finita e infinita
- 32.2 Estructuras**
 - 32.2.1 Estructuras IIR
 - 32.2.2 Estructuras FIR
- 32.3 Representación numérica y efectos de cuantización**
 - 32.3.1 Errores de desbordamiento y redondeo
 - 32.3.2 Errores de redondeo en filtros digitales
 - 32.3.3 Ciclos y oscilaciones límite
 - 32.3.4 Efectos de cuantización de coeficientes
- 32.4 Técnicas de diseño de filtros de respuesta de pulso infinita (IIR)**
 - 32.4.1 Invariancia a los pulsos
 - 32.4.2 Transformación lineal
 - 32.4.3 Técnicas de diseño directo
- 32.5 Técnicas de diseño de filtros de respuesta de pulso finita (FIR)**
 - 32.5.1 Técnicas de la transformada de Fourier: aplicación de ventanas
 - 32.5.2 Diseño de muestreo en frecuencia
 - 32.5.3 Diseño óptimo de filtros

32.1 DESCRIPCIÓN

Un **filtro digital** es un sistema para filtrar señales muestreadas cuyas muestras se representan en forma numérica (típicamente como números binarios). La operación de filtrado se realiza por medio de cálculos directos con las señales muestreadas. Cuando se emplean ecuaciones para analizar o caracterizar la operación de los filtros analógicos, las ecuaciones que se utilizan en el filtrado digital son el filtro (es decir, el filtro realiza las operaciones aritméticas reales especificadas por las ecuaciones).

Los filtros digitales presentan varias ventajas sobre sus contrapartes analógicas:

1. **Intervalo dinámico.** El límite superior es fijado por el tamaño del número que el hardware digital puede representar, y el límite inferior es fijado por el ruido de cuantización y errores de redondeo. El intervalo entre estos límites depende únicamente de las longitudes de palabras utilizadas (o sea, el número de bits usados en la representación binaria de la señal). Si las longitudes de palabra se pueden hacer lo suficientemente grandes, en principio el intervalo dinámico no tiene límite. Los límites son impuestos en la práctica, adaptándose de manera conveniente a los requisitos de velocidad, rendimiento y costo.
2. **Ausencia de problemas de componentes.** Los parámetros de los filtros se representan por medio de números binarios y no derivan con el tiempo. Al aumentar la longitud de la palabra se hace posible la obtención de cualquier grado de exactitud deseado. Dentro de los límites de esa exactitud, el filtro funciona tal y como se diseñó. No hay problemas de tolerancias o deriva de componentes, y ninguno asociado con un comportamiento no ideal de resistores, capacitores, inductores o amplificadores. Tampoco existen problemas de impedancia de entrada o salida ni efectos de carga entre etapas.
3. **Conmutabilidad.** Si los parámetros del filtro se conservan en registros (lo contrario de conectarse físicamente), el contenido de estos registros se puede cambiar a voluntad y en forma instantánea (es decir, entre tiempos de muestreo consecutivos). Por tanto, los filtros se pueden hacer perfectamente conmutables. Un solo filtro conmutable también se puede multicanalizar en el tiempo para procesar entradas múltiples.
4. **Adaptabilidad.** Un filtro digital puede implementarse en hardware o bien como un programa de computadora. Los filtros digitales de hardware también se adaptan sin dificultad para el control por computadora de sus parámetros.

Los filtros digitales son miembros de una clase de sistemas conocidos como sistemas de datos muestreados. Un sistema recibe una o más señales de entrada y produce una o más salidas. (Aquí sólo se considerarán sistemas con una entrada y una salida.) La

complejidad de los sistemas reales se aborda buscando sistemas simples cuyo comportamiento se asemeje al del sistema en consideración. Las dos simplificaciones principales de interés aquí son la suposición de linealidad y el uso del muestreo.

32.1.1 Sistemas lineales

Si $H[\]$ representa lo que el sistema hace (la función del sistema), entonces la linealidad se define de la manera siguiente:

Dadas $x_1(t)$ y $x_2(t)$, con a y b como factores constantes, se tiene que:

$$y(t) = H[ax_1(t) + bx_2(t)] \quad (32-1a)$$

$$= aH[x_1(t)] + bH[x_2(t)] \quad (32-1b)$$

$$= ay_1(t) + by_2(t) \quad (32-1c)$$

La prueba de linealidad consiste en determinar si puede pasarse de la ecuación 32-1b a la 32-1c.

Otras dos simplificaciones comunes con los sistemas lineales son las siguientes:

1. **Invariancia en el tiempo.** $H[\]$ no cambia con el tiempo. Si $y(t) = H[x(t)]$, entonces $H[x(t - \tau)] = y(t - \tau)$, donde τ es un retardo positivo o negativo.
2. **Causalidad.** La salida no puede preceder a la entrada. Con mayor precisión, para sistemas lineales invariantes en el tiempo, dadas dos posibles entradas al sistema $x_1(t)$ y $x_2(t)$, si $x_1(t) = x_2(t)$ para $t \leq t_0$, entonces $H[x_1(t)] = H[x_2(t)]$ para $t \leq t_0$.

Todas estas suposiciones normalmente son aplicables a los filtros digitales. Las únicas excepciones son las siguientes:

1. Los sistemas no causales pueden modelarse en computadora hasta cierto límite.
2. El hecho de que los parámetros de los filtros digitales se puedan conmutar arbitrariamente a voluntad significa que los filtros pueden variar en el tiempo si así se desea. La conmutación suele implicar la selección de valores de parámetros de un repertorio limitado; en este caso, cada conjunto de parámetros se puede analizar por separado como un sistema invariante en el tiempo, aunque el comportamiento transitorio después de la conmutación de parámetros suele requerir estudio especial.
3. Las limitaciones en precisión e intervalo dinámico inherentes a la representación digital de números puede restringir la posibilidad de aplicar la suposición de linealidad.

En el material que sigue no se consideran sistemas no causales ni variantes en el tiempo. Se supondrá la linealidad y se confrontarán sus límites en la sección sobre los efectos de la cuantización.

32.1.2 Sistemas de datos muestreados

Un sistema de datos muestreados puede visualizarse como un sistema de tiempo continuo que se observa sólo en tiempos discretos t_i y, por tanto, se debe tratar como un sistema de tiempo discreto. Los tiempos t_i suelen ser equiespaciados. En este caso $t_i = iT$, donde T es el intervalo entre muestras. En lugar de expresar x como $x(t_i)$, se escribe $x(i)$ o x_i . La frecuencia de muestreo, f_s , es igual a $1/T$.

La elección de la frecuencia de muestreo es un problema fundamental en el diseño de sistemas de datos muestreados. Conviene muestrear los datos a la menor frecuencia posible; sin embargo, si la frecuencia es demasiado baja, quizá sea imposible reconstruir la función continua correspondiente a partir de las muestras. El teorema del muestreo establece que cualquier señal de tiempo continuo se puede caracterizar por completo y reconstruir de manera perfecta a partir de muestras equiespaciadas siempre que $f_s \geq 2f_m$, donde f_m es la componente de frecuencia más alta presente en la señal original. Esta frecuencia mínima se conoce comúnmente como frecuencia de Nyquist¹⁻⁴.

Se dice que una función continua muestreada a una frecuencia menor que la de Nyquist está submuestreada. En una señal submuestreada, cualquier componente con frecuencia $f > f_s/2$ parecerá estar a una frecuencia más baja $f' = f_s - f$. Este fenómeno se conoce como *aliasing*¹⁻³. Cuando se muestrean datos para su análisis en computadora o para procesamiento digital, es una práctica común proporcionar protección por medio de un *filtro antialiasing*. Éste es un filtro analógico, colocado ante el hardware de muestreo, que rechaza cualquier componente con frecuencia mayor de $f_s/2$. El ingeniero de sistemas debe vigilar que la frecuencia de muestreo sea lo suficientemente alta, de modo que ninguna información esencial sea eliminada por el filtro antialiasing.

32.1.3 Análisis en el dominio del tiempo

Los sistemas de datos muestreados pueden caracterizarse en el dominio del tiempo por medio de una ecuación lineal en diferencias con coeficientes constantes:

$$y(n) + a_1y(n-1) + a_2y(n-2) + \cdots + a_py(n-p) = b_0x(n) + b_1x(n-1) + b_2x(n-2) + \cdots + b_qx(n-q) \quad (32-2)$$

Si sólo se tiene acceso a la entrada y la salida del sistema, éste puede caracterizarse por su respuesta a una entrada estándar. La "función de pulso unitario" $\delta(n)$ puede definirse de la manera siguiente:

$$\delta(n) = \begin{cases} 1 & n = 0 \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases} \quad (32-3)$$

Por tanto, la "respuesta de pulso" $h(n)$ es la respuesta del sistema a una entrada $\delta(n)$ ¹⁻³. Si $x(n)$ es cualquier otra señal de entrada, entonces la respuesta a $x(n)$ se obtiene con la ayuda de $h(n)$:

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)h(n-k) = x(n) * h(n) \quad (32-4)$$

La operación $x(n) * h(n)$ se conoce como la convolución de $x(n)$ y $h(n)$. El resultado es que si se conoce la respuesta de pulso de un sistema lineal, es posible determinar su respuesta a cualquier otra entrada. Así, el comportamiento de entrada/salida del sistema se caracteriza por completo por su respuesta de pulso.

El concepto de respuesta de pulso también ofrece una extensión útil a la definición de un sistema causal: un sistema lineal invariante en el tiempo es causal si $h(n)$ es 0 para $n < 0$.

32.1.4 Análisis en el dominio de la frecuencia

Para analizar sistemas de datos muestreados en el dominio de la frecuencia, conviene utilizar la representación de la transformada z . Defínase las transformadas z de las señales de entrada y salida en la forma usual. Después, empleando las propiedades de desplazamiento y linealidad de la transformada z (cap. 4), la transformada z de la ecuación 32-2 puede expresarse de la manera siguiente:

$$Y(z) \sum_{i=0}^p a_i z^{-i} = X(z) \sum_{j=0}^q b_j z^{-j} \quad (32-5)$$

Si la función de transferencia del sistema se define como:

$$H(z) = Y(z)/X(z) \quad (32-6)$$

entonces $H(z)$ es un cociente de polinomios en z :

$$H(z) = N(z)/D(z) \quad (32-7a)$$

donde:

$$N(z) = \sum_{j=0}^q b_j z^{-j} \quad (32-7b)$$

y

$$D(z) = \sum_{i=0}^p a_i z^{-i} \quad (32-7c)$$

$N(z)$ tiene q raíces, para cada una de las cuales $H(z) = 0$; estas raíces se llaman los ceros de H . De modo similar, $D(z)$ tiene p raíces para las cuales $H(z) = \infty$; éstas se denominan los polos de H . Dado que un polinomio está definido (dentro de una constante multiplicativa) por sus raíces, H se caracteriza (salvo por un factor de ganancia) por sus polos y ceros.

Expresando de nuevo la ecuación 32-6 como:

$$Y(z) = X(z)H(z) \quad (32-8)$$

se obtiene la ecuación 32-4 en virtud de la propiedad de convolución de la transformada z . Se reconoce a $h(n)$ como la respuesta de pulso del sistema; por tanto, $H(z)$ es la transformada z de la respuesta de pulso.

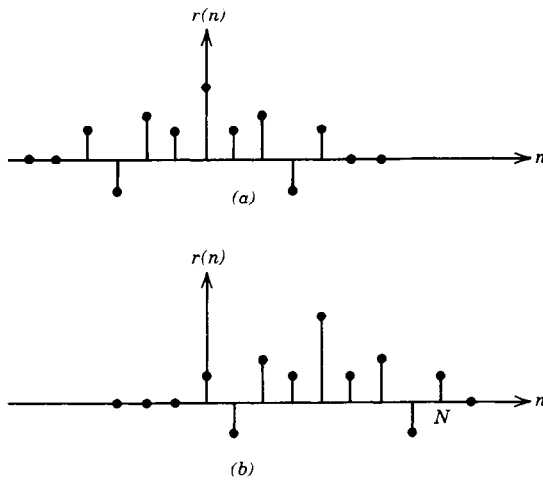


Fig. 32-1. Respuesta de pulso par: a) correspondiente a la respuesta de frecuencia par real; b) desplazada para hacer causal el filtro.

El objetivo del diseño de filtros suele ser visualizar alguna respuesta de frecuencia especificada. La respuesta de frecuencia de un sistema puede encontrarse evaluando $H(z)$ en el círculo unitario:

$$H(e^{j\omega}) = H(z)|_{z=e^{j\omega}} \quad (32-9)$$

donde:

$$\omega = 2\pi f/f_s \quad (32-10)$$

Debe observarse que las distancias angulares alrededor del círculo unitario se mapean linealmente en la frecuencia. El término CD corresponde al punto $(1 + j0)$ y el punto $(-1 + j0)$ corresponde a $f_s/2$.

Obsérvese asimismo que como resultado de esta definición la respuesta de frecuencia es periódica, con periodo 2π , que corresponde a una periodicidad en f de f_s .

En este capítulo, ω se considera limitada al intervalo $[-\pi, \pi]$ a menos que se exprese otra cosa.

La ecuación 32-9 puede volver a expresarse como:

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n)e^{-j\omega n} \quad (32-11)$$

y entonces es posible considerar $h(n)$ como el desarrollo en serie de Fourier de la función periódica $H(e^{j\omega})$. Así:

$$h(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega \quad (32-12)$$

Sería concebible utilizar la ecuación 32-12 como punto de partida del diseño de un filtro digital; esta posibilidad se considera en la sección 32-5.

$H(e^{j\omega})$ es una función continua de la frecuencia. En muchos casos prácticos basta una aproximación discreta a $H(e^{j\omega})$. La transformada discreta de Fourier (DFT, de *discrete Fourier transform*) de $h(n)$ constituye tal aproximación.

La DFT de una serie de N puntos se define de la manera siguiente:

$$H(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)W^{-nk} \quad (32-13a)$$

donde $W = e^{j2\pi/N}$. La DFT inversa está dada por:

$$h(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} H(k)W^{nk} \quad (32-13b)$$

En el capítulo 4 se explica la DFT.

32.1.5 Sistemas de fase lineal

Existen muchas aplicaciones del procesamiento de señales en las cuales las relaciones de fases son importantes y no deben ser perturbadas por el filtrado. Para estos fines sería ideal un filtro con desfaseamiento cero; en la práctica se debe buscar un filtro cuyo desfaseamiento sea proporcional a la frecuencia. Este filtro se denomina de fase lineal. Resulta fácil demostrar cómo debe ser un filtro de este tipo.

Si la fase de la respuesta de frecuencia es proporcional a la frecuencia, entonces debe ser posible factorizar $H(e^{j\omega})$ en una función real pura $R(\omega)$ y un factor de fase lineal $e^{ja\omega}$:

$$H(e^{j\omega}) = R(\omega)e^{ja\omega} \quad (32-14)$$

En base a la teoría elemental de la transformada de Fourier, si la respuesta de frecuencia de un filtro es $R(\omega)$, entonces su respuesta de pulso $r(n)$ será una función *par* del tiempo, como se muestra en la figura 32-1a. Este filtro no es causal. Sin embargo, si $r(n)$ tiene duración finita, el filtro se puede hacer causal desplazando $r(n)$ a la derecha, como se observa en la figura 32-1b. No obstante, el factor de fase lineal corresponde a un desplazamiento de $r(n)$ en el tiempo; por tanto, el filtro de fase lineal se puede concebir como el filtro de fase cero ideal desplazado para hacerlo causal. $h(n)$, el $r(n)$ desplazado, ya no es una función par, pero sigue siendo simétrica en el sentido siguiente: si la respuesta de pulso tiene N muestras de longitud, entonces:

$$h(n) = h(N - 1 - n) \quad (32-15)$$

Esta simetría es la condición necesaria y suficiente para la linealidad de fase.

32.1.6 Estabilidad

Un sistema es estable si una entrada acotada (es decir, de amplitud finita) produce siempre una salida acotada. Es decir, un sistema de tiempo discreto es estable si:

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |h(k)| < \infty \quad (32-16)$$

o si todos los polos de $H(z)$ están dentro del círculo unitario en el plano z (complejo).

32.1.7 Respuestas de pulso finita e infinita

Una distinción fundamental en los sistemas de datos muestreados, y particularmente en los filtros digitales, es la duración de la respuesta de pulso. Se habla de sistemas de respuesta de pulso finita (FIR, de *finite impulse response*) y de sistemas de respuesta de pulso infinita (IIR, de *infinite IR*).

Si en la ecuación en diferencias 32-2 los coeficientes a_i son todos 0 para $i > 0$, entonces la ecuación se reduce a:

$$y(n) = b_0x(n) + b_1x(n-1) + \dots + b_qx(n-q) \quad (32-17)$$

Posiblemente un sistema de este tipo no pueda tener una respuesta de pulso con más de q muestras de longitud, debido a que si el impulso ocurrió hace más de q muestras, todo el lado derecho de la ecuación 32-17 es cero. Por tanto, un sistema de este tipo es FIR. Si la ecuación 32-17 se expresa de nuevo empleando transformadas z , de inmediato se hará evidente que un filtro FIR es también un sistema con sólo ceros; es decir, $H(z)$ no tiene polos salvo en $z = 0$.

Sin embargo, si alguno de los mayores coeficientes a de la ecuación 32-2 no es cero, entonces la respuesta de pulso puede durar por siempre, debido a que aun si el pulso ocurrió hace más de q muestras, se "recuerda" en las muestras de salida $y(n-1)$, $y(n-2)$, Por tanto, el sistema será IIR y $H(z)$ tendrá polos de frecuencia finita.

32.2 ESTRUCTURAS

Se acostumbra a representar el flujo de datos dentro de filtros digitales por medio de un diagrama de flujo. Estos diagramas se aplican ya sea que el filtro se vaya a ejecutar en hardware o en software. Para un filtro de hardware, el diagrama representa la interconexión real de los componentes del filtro; para un filtro de software, el diagrama constituye un modelo conceptual de la operación del filtro y puede utilizarse como punto de partida de la programación.

Dado que el filtro FIR es un caso especial del IIR, los dos tipos tienen algunas estructuras en común. Cada uno tiene, no obstante, formas especiales propias. Se empezará con el caso del IIR.

32.2.1 Estructuras IIR^{1, 2}

Forma directa. Partiendo de la ecuación 32-7 y haciendo:

$$P(z) = 1 / D(z) \quad (32-18)$$

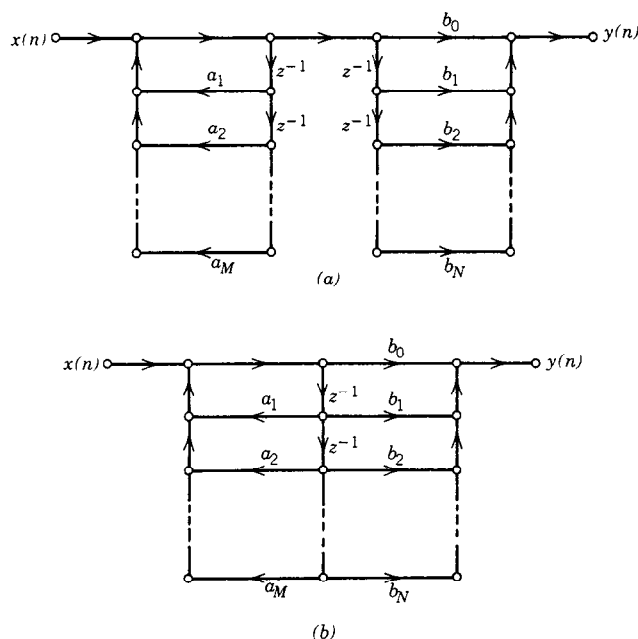


Fig. 32-2. Estructura del filtro de respuesta de pulso infinita (IIR) de forma directa: a) la parte del lado izquierdo ejecuta los polos, la parte del lado derecho los ceros; b) estructura resultante de la consolidación de las dos trayectorias de retardo de (a).

se tiene la siguiente expresión:

$$Y(z) = P(z)N(z) \quad (32-19)$$

Esta ecuación corresponde a dos secciones de filtros en cascada, donde el primero materializa todos los polos de $H(z)$ y el segundo todos los ceros de $H(z)$. La sección donde todos son polos, que corresponde a la ecuación 32-18, cumple la ecuación en diferencias:

$$p(n) = x(n) - \prod_{i=1}^N b_i p(n-i) \quad (32-20)$$

y la sección donde todos son ceros, que corresponde a la ecuación 32-19, satisface la ecuación en diferencias:

$$y(n) = \sum_{j=1}^M a_j p(n-j) \quad (32-21)$$

En estas ecuaciones M es el número de ceros en $H(z)$ y N es el número de polos. Estas ecuaciones llevan a la estructura de "forma directa" (que también se conoce como forma canónica) de la figura 32-2a, donde la estructura de la izquierda corresponde a la ecuación 32-20, y la estructura de la derecha a la ecuación 32-21.

En la figura 32-2b se presenta una versión más simple de esta estructura.

Forma en cascada. En esta forma (también conocida como "en serie"), si los polinomios de numerador y denominador de la ecuación 32-7 se factorizan se tiene:

$$H(z) = g \prod_{i=1}^P H_i(z) \quad (32-22)$$

Aquí, g es un factor de ganancia y P es un número que depende de cómo se efectúe la factorización. Dado que debe trabajarse con coeficientes reales, las raíces complejas se factorizan como pares conjugados. Si hay M_1 ceros reales, M_2 pares de ceros conjugados, N_1

polos reales y N_2 pares de polos conjugados, entonces P es el máximo de $(M_1 + M_2)$ y $(N_1 + N_2)$. Cada término $H_i(z)$ se forma a partir de un factor de $N(z)$ y un factor de $D(z)$ y es, en general, una forma bicuadrática:

$$H_i(z) = \frac{1 + a_i z^{-1} + b_i z^{-2}}{1 + c_i z^{-1} + d_i z^{-2}} \quad (32-23)$$

Para ceros reales $b_i = 0$ y para polos reales $d_i = 0$, y si M y N no son iguales, algunos numeradores (o denominadores) serán unitarios. La ecuación 32-22 conduce a la forma en cascada que se ilustra en la figura 32-3a. En esta figura cada caja contiene una sección de segundo orden de la forma de la ecuación 32-23. Las secciones individuales por sí solas se ejecutan en forma directa; por tanto, la estructura completa es como se presenta en la figura 32-3b.

Forma en paralelo. La ecuación 32-7 también puede desarrollarse como una suma de K fracciones parciales:

$$H(z) = A + \sum_{i=1}^K H_i(z) \quad (32-24)$$

donde para los polos reales, H_i es de la forma:

$$H_i(z) = \frac{a_i}{1 + c_i z^{-1}} \quad (32-25a)$$

y para los pares de polos complejos, H_i tiene la siguiente forma:

$$H_i(z) = \frac{a_i + b_i z^{-1}}{1 + c_i z^{-1} + d_i z^{-2}} \quad (32-25b)$$

El número de secciones K es la suma $N_1 + N_2$. La estructura correspondiente es la forma en paralelo que se puede observar en la figura 32-4. Como sucede con la forma en cascada, cada sección se ejecuta en forma directa.

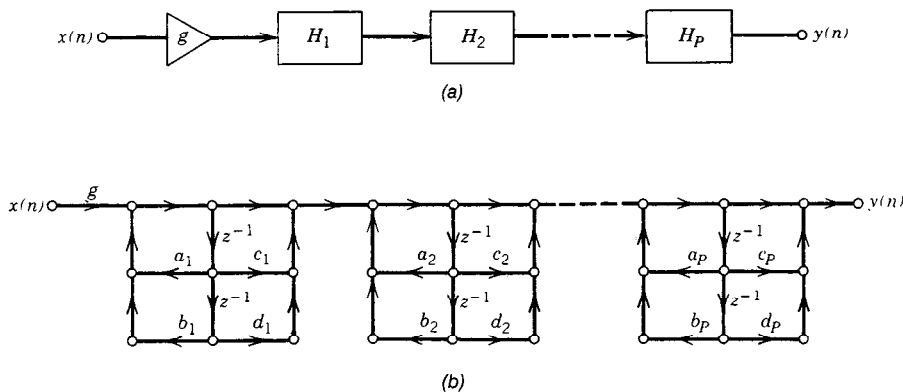


Fig. 32-3. Estructura del filtro de respuesta de pulso infinita (IIR) de forma en cascada: a) el término de la ganancia va seguido de las secciones de forma directa de orden 2 u orden 1 en cascada; b) forma en cascada en detalle, que muestra la constitución de las secciones individuales.

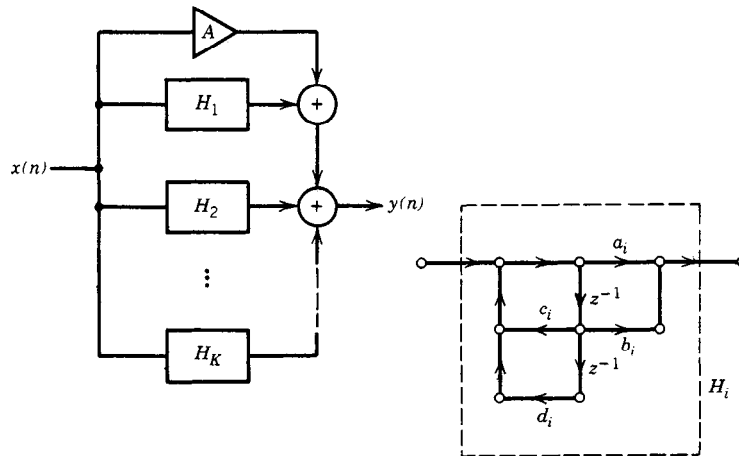


Fig. 32-4. Estructura de respuesta de pulso infinita (IIR) de forma en paralelo que se dedujo del desarrollo en fracciones parciales de $H(z)$. A la derecha se muestra una sección $H_i(z)$ típica.

Comparación de estructuras. Aunque la estructura de forma directa es la más atractiva por su sencillez y su relación directa con la ecuación en diferencias original, no se recomienda para filtros de orden mayor de 2, pues es extremadamente sensible a los errores de los coeficientes. Dado que los coeficientes siempre se representan con precisión finita, es inevitable algún error en su valor. Estos errores afectan el funcionamiento del filtro, y en ocasiones su estabilidad. Por tanto, es importante el uso de formas con la menor sensibilidad posible a estos errores. Se debe usar la forma directa para el orden 2 o menor, pero en todos los demás casos ha de analizarse con cuidado el funcionamiento empleando la simulación por computadora.

La forma en cascada tiene la ventaja de que las ubicaciones de polos y ceros se relacionan directamente con los coeficientes de cada sección, como indica la ecuación 32-24. Las raíces complejas de $1 + az^{-1} + bz^{-2}$ se pueden localizar por inspección; la distancia radial a partir del origen es igual a \sqrt{b} y la parte real de la raíz es $-a/2$.

En el caso de filtros cuyos parámetros se vayan a calcular y modificar en tiempo real, esta implementación puede ser por tanto especialmente útil. Por otro lado, la ganancia de cada sección depende de sus coeficientes, y el nivel de señal en cada fase debe ser controlado por otros elementos de ganancia para evitar un desbordamiento o insuficiencia.

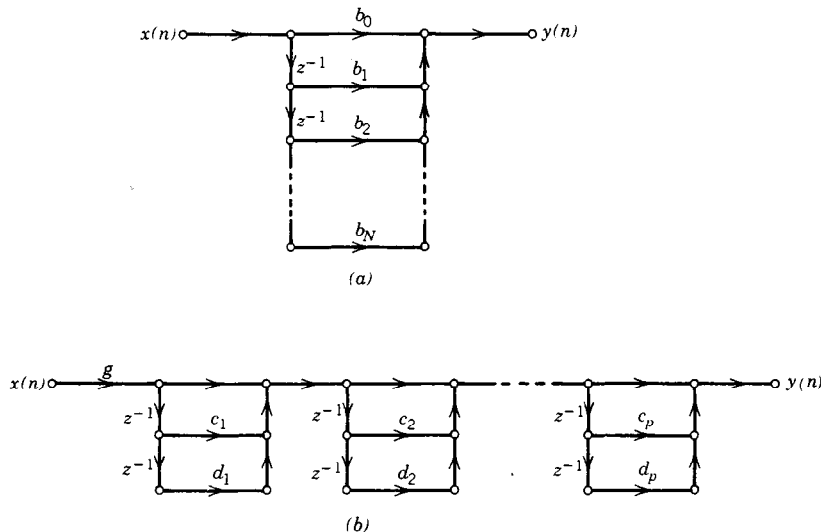


Fig. 32-5. Estructuras de filtros de respuesta de pulso finita (FIR): a) forma directa; b) forma en cascada.

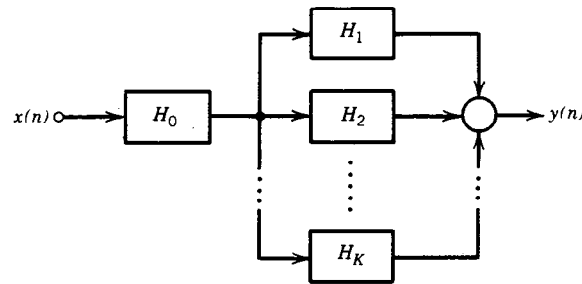


Fig. 32-6. Estructura del filtro de respuesta de pulso finita (FIR) con muestreo en frecuencia. (Véase la estructura detallada en la figura 32-23.)

La forma en paralelo está libre de la mayor parte de los problemas mencionados. Las ubicaciones de los polos pueden encontrarse como en la forma en cascada, aunque no así la de los ceros.

32.2.2 Estructuras FIR^{1,2}

Forma directa. Las formas directa y en cascada que se describieron antes se adaptan fácilmente a filtros FIR. Dado que las porciones de producción de polos y de ceros de estas estructuras son diferentes, las formas FIR se deducen simplemente omitiendo las porciones de producción de polos de las formas IIR. La forma directa FIR se muestra en la figura 32-5a.

Forma en cascada. En la forma en cascada, cada sección es asimismo una sección cuadrática (o lineal) con sólo ceros y, por tanto, la estructura se simplifica del mismo modo que la forma directa. En la figura 32-5b se ilustra una estructura FIR de forma en cascada.

Forma de muestreo en frecuencia. La forma IIR en paralelo se dedujo a partir de un desarrollo en fracciones parciales de $H(z)$. Dado que estos desarrollos se basan en polos, este método es claramente inaceptable para filtros FIR. Sin embargo, es posible una forma en paralelo, pero ésta se deduce de una manera por completo distinta. En la sección 32.5 se hace una explicación detallada; aquí sólo se observa que esta forma se basa en un procedimiento de diseño específico que toma como punto de partida la transformada de Fourier de la respuesta de pulso. La forma de muestreo en frecuencia se presenta en la figura 32-6.

Forma de fase lineal. Muchas aplicaciones requieren filtros cuya respuesta de fase sea lineal con la frecuencia. En la sección 32.1 se mostró que los filtros FIR de fase lineal tienen una respuesta simétrica de pulso. Es decir, para un filtro de orden N :

$$h(n) = h(N - 1 - n) \quad (32-26)$$

Esta simetría produce cierta economía en la implementación. En un filtro FIR, las h corresponden en forma biunívoca a las b de la ecuación 32-17. Debido a la simetría en $h(n)$, esta ecuación se convierte en:

$$y(n) = b_0x(n) + b_1x(n-1) + \dots + b_1x(n-N+1) + b_0x(n-N) \quad (32-27a)$$

Esto se puede expresar, para N par, como:

$$y(n) = \sum_{i=0}^{N/2-1} b_n[x(n-1) + x(n-N+i)] \quad (32-27b)$$

o bien, para N impar, como:

$$y(n) = b_{N/2}x(n-N/2) + \sum_{i=0}^{(N-1)/2-1} b_n[x(n-1) + x(n-N+i)] \quad (32-27c)$$

Dado que cada término de la suma requiere un multiplicador y puesto que el número de términos se reduce en aproximadamente la mitad, se logra una economía importante en operaciones de cálculo y hardware. Las estructuras de forma directa que corresponden a estas formas vueltas a expresar se presentan en las figuras 32-7a y 32-7b.

Comparación de estructuras. Las ventajas y desventajas de las formas directa y en cascada son sustancialmente las mismas en los filtros FIR y en los IIR. Es obvio que la forma directa no presenta problemas de estabilidad, pero los errores de cuantización de coeficientes aún pueden degradar el funcionamiento. La estructura en cascada sigue permitiendo el control más directo sobre las ubicaciones de los ceros.

Los filtros de fase lineal son un caso especial. Debido a la simetría del filtro, los errores en la cuantización de coeficientes no perturban la linealidad de fase, pero aún pueden degradar el funcionamiento de otras formas.

Si los filtros de fase lineal se materializan en forma de cascada, la sensibilidad a la cuantización de coeficientes será menor, pero los errores pueden destruir la característica de fase lineal.

Estos aspectos se consideran con mayor detalle en la sección 32.5.

Obsérvese que en todas las estructuras de filtros mostradas, las únicas operaciones aritméticas que se requieren son multiplicación y adición.

32.3 REPRESENTACIÓN NUMÉRICA Y EFECTOS DE CUANTIZACIÓN

Todas las señales que pasan a través de filtros digitales tienen la forma de muestras que se representan como números binarios. Para la representación digital de estas muestras, y de valores intermedios contenidos en el filtro, debe utilizarse necesariamente una longitud de palabra finita. Las multiplicaciones y probablemente las adiciones que se realizan durante el filtrado en general producen resultados intermedios que son más largos que la longitud de palabra disponibles, y por tanto deben redondearse. De modo similar, los coeficientes del filtro también se representan por medio de números binarios de longitud finita. Debido a estas limitaciones, los valores de muestra que se hacen pasar por el filtro contienen pequeñas inexactitudes que se manifiestan como ruido, y los coeficientes del filtro (tal y como están guardados en el filtro) diferirán de los valores de diseño. Los efectos de estos errores dependen en parte del sistema numérico que se utilice.

32.3.1 Errores de desbordamiento y redondeo

Las operaciones aritméticas con números binarios de n bits pueden tener resultados con más de n bits en dos formas. Cuando se multipliquen números, el producto tendrá, en general, $2n$ bits de longitud. Si se suman números de n bits, la suma puede ser de $n + 1$ bits de longitud. En un caso u otro, normalmente el resultado debe acortarse a n bits una vez más antes de que pueda continuar el cálculo. Acortar el número es desechar información y agregar inexactitud al cálculo.

Por ejemplo, considérese el filtro de un cero de la figura 32-8, el cual utiliza números binarios de 6 bits. La muestra de entrada retrasada, $x(n-1)$, se multiplica por el coeficiente a y se suma a la muestra que llega, $x(n)$. Supóngase que coeficiente y muestras tienen los valores binarios que se muestran en la figura. Así, mul-

tiplicando 0.101001 por 0.110111 se obtiene un producto de 0.100011001111. Este producto se debe acortar a 6 bits para utilizarlo en el filtro; por tanto, existe un error de redondeo resultante de -0.000000001111 (cerca del -0.65%). En forma análoga, el valor acortado, 0.100011, que se suma a 0.100110 (la muestra que entra), da por resultado una suma de 1.001001. Esto vuelve a exceder el límite de 6 bits y representa un desbordamiento, que no se puede resolver simplemente desechando el bit de orden inferior.

Truncado y redondeo. Si simplemente se descartan los bits extra de un producto, se dice que el resultado se trunca. Si el resultado se fija en el número de n bits más próximo al valor original, se dice que el resultado se redondea. El truncado es más simple en términos de cálculo, pero sus inconvenientes son que: la diferencia de costo es trivial, los errores de truncado pueden tener sesgo, no así los de redondeo, y los errores introducidos por truncado tienden a ser mayores que los que se introducen por redondeo. Aquí sólo se considerarán los del segundo tipo.

El redondeo se efectúa de la manera siguiente: cuando se descartan bits en exceso, se prueba el bit más significativo de la parte que se desprecia. Si este bit es un 1, se incrementa el resultado de n bits; si el bit es un 0, el resultado se deja como está. Por ejemplo, la fracción binaria 0.011001101011, redondeada a 6 bits, es 0.011010, puesto que la parte descartada, 101011, comienza con un 1. Esta regla introduce un sesgo pequeño, ya que si el número se encuentra entre los dos valores más próximos, siempre se redondea al mayor de ellos: 0.011000100000 se redondea a 0.011001, con un error de 0.0000001. Estos valores suelen ser tan poco frecuentes que el sesgo es insignificante.

Si la fracción binaria se redondea a n bits, el error resultante es a lo más $2^{-(n+1)}$; esto es:

$$-2^{-(n+1)} \leq e \leq 2^{-(n+1)} \quad (32-28)$$

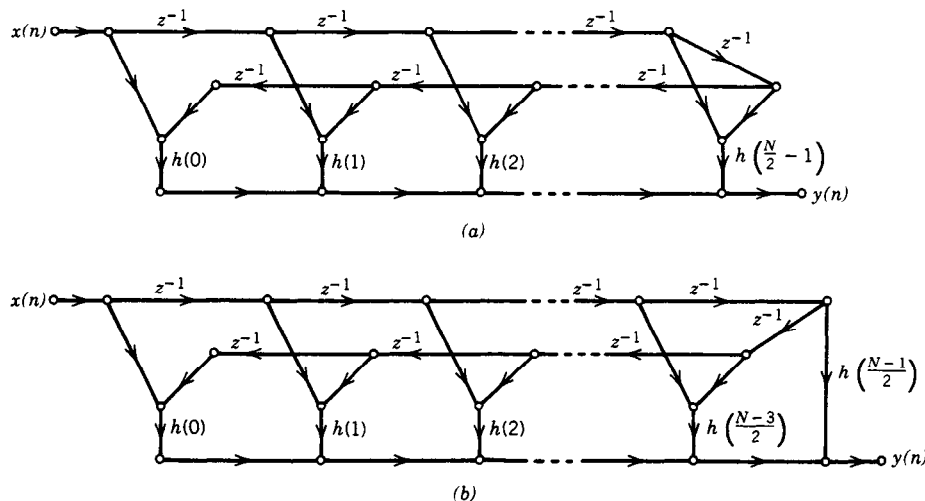


Fig. 32-7. Estructuras de respuesta de pulso finita (FIR) de forma directa y fase lineal: a) orden par; b) orden impar.

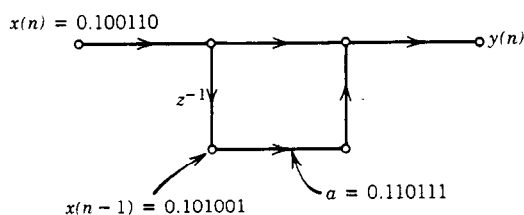


Fig. 32-8. Filtro de un solo cero, con datos y coeficientes representados por fracciones de seis bits.

El efecto del error de redondeo se analiza en forma estadística. Se supone que todos los errores dentro de este intervalo tienen la misma probabilidad de ocurrir; por tanto, el error de redondeo es una variable aleatoria con media cero y varianza $\sigma_n^2 = 2^{-2n}/12^4$.

Desbordamiento. Si la adición de dos fracciones de n bits produce una suma de 1 o mayor, ocurre desbordamiento. En la aritmética de punto flotante, el resultado se puede renormalizar con un desplazamiento a la derecha e incrementando el exponente. En el desplazamiento se pierde el LSB y se produce un error de redondeo. En la aritmética de punto fijo, el desbordamiento causa tres problemas:

1. El número se tiene que dividir entre 2 para reducir su magnitud a menos de 1.
2. La pérdida del LSB genera error de redondeo.
3. Se necesita alguna normalización o escalación en cualquier parte del filtro para compensar el hecho de que el número sea la mitad de su valor verdadero.

Los efectos laterales de estos problemas son tan graves, que la práctica común consiste en escalar de antemano los niveles de señal para evitar la posibilidad del desbordamiento.

32.3.2 Errores de redondeo en filtros digitales

Aritmética de punto fijo. Si se evita el desbordamiento de punto fijo mediante la escalación de los niveles de señal, entonces sólo en la multiplicación ocurren errores de redondeo. En cada nueva multiplicación el producto es en general diferente y se introduce un error de redondeo distinto. Por tanto, los errores aparecen como una serie de variables aleatorias pequeñas que se agregan al sistema; el resultado final es un incremento en el nivel de ruido en el sistema. Este "ruido de redondeo" se puede reducir a cualquier nivel deseado incrementando la longitud de palabra. El objetivo del análisis del ruido de redondeo consiste en determinar la longitud de palabra más corta compatible con requisitos de intervalo dinámico dados. En las referencias bibliográficas 1 y 2 se presentan los detalles.

Estos análisis dependen del supuesto de que las fuentes de ruido no se correlacionan entre sí ni con la señal. Esto es cierto en esencia si la señal misma es ruido de banda ancha, pero no lo es si se trata de señales determinísticas simples, como constantes o si-

nusoides. En estos casos es necesario respaldar el análisis por medio de una simulación en computadora. Por suerte, muchas señales comunes como el habla o la música pueden considerarse aproximadamente aleatorias.

Debe tenerse presente que no se requiere exactitud absoluta en estos análisis. La meta del análisis es decidir una longitud de palabra; esta longitud debe ser un número entero de bits; cada bit extra incrementa el intervalo dinámico en un factor de 2; por tanto, a menudo resultan adecuadas exactitudes del 50%.

Aritmética de punto flotante. El análisis de errores de la aritmética de punto flotante se complica por dos consideraciones. Primero, la necesidad de normalizar la operación después de hacer adiciones significa que pueden generarse errores de redondeo en la suma y también en la multiplicación. Segundo, la estructura del número de punto flotante significa que un error de redondeo no es una cantidad absoluta, sino el producto del error en la fracción y 2^e . Por ejemplo, si los números $V_1 = 0.578125 \times 2^1$ y $V_2 = 0.578125 \times 2^3$ tienen ambos un error de $1/128 = 0.0078125$ en sus fracciones, el error absoluto en V_1 es $0.0078125 \times 2^1 = 0.015625$, mientras que el error en V_2 es $0.0078125 \times 2^3 = 0.0625$. El efecto de escalación del exponente debe tenerse presente en cualquier análisis de ruido de filtros de punto flotante^{5,6}.

Como consejo práctico, el usuario debe resistir la tentación del análisis excesivo. El cálculo de punto flotante es a menudo una opción en implementaciones de software. Aquí, la elección de longitudes de palabra suele restringirse a "precisión sencilla" (p. ej., fracciones de 24 bits) y "doble precisión" (p. ej., fracciones de 56 bits). La utilidad del análisis para elegir entre alternativas tan separadas entre sí es dudosa en el mejor de los casos.

32.3.3 Ciclos y oscilaciones límite

Una consecuencia más de la longitud de palabra finita es la posibilidad de oscilación en un filtro teóricamente estable. Esto se ilustra mejor con un ejemplo. Supóngase que se implementa un filtro de un polo con la función de transferencia:

$$y(n) = -0.6y(n-1) + x(n)$$

empleando fracciones de 4 bits para los datos. Si la entrada es un pulso (ec. 32-3) escalado a una amplitud de 0.5 en $n = 0$, entonces y toma los valores que se muestran en la tabla 32-1. (Los valores se dan como fracciones binarias de magnitud con signo para mostrar los efectos del redondeo.) Después de que $n = 5$, el filtro está en un ciclo límite y las oscilaciones resultantes de y se denominan oscilaciones de ciclo límite.

Las oscilaciones de ciclo límite han sido estudiadas en relación con sistemas de primer y segundo orden por Jackson⁷. Para sistemas de primer orden de la forma:

$$y(n) = x(n) - ay(n-1) \quad (32-29)$$

Tabla 32-1. Oscilaciones de ciclo límite en el filtro $y(n) = -0.6y(n-1) + x(n)$ empleando muestras de 4 bits y sin bits de guarda

n	$y(n)$	$y(n)$ (redondeado)
0	0.10000000	0.1000
1	-0.01001101	-0.0101
2	0.00110000	0.0011
3	-0.00011101	-0.0010
4	0.00010011	0.0001
5	-0.00001001	-0.0001
6	0.00001001	0.0001
7	-0.00001001	-0.0001
8	0.00001001	0.0001

con fracciones de n bits utilizadas con redondeo, pueden ocurrir oscilaciones de ciclo límite para y en la región $(-k, k)$, donde k es la fracción de b bits más grande que satisface:

$$k \leq \frac{0.5 \times 2^{-b}}{1 - |a|} \quad (32-30)$$

Para $|a| < 0.5$ no pueden ocurrir oscilaciones. Para sistemas de segundo orden de la forma:

$$y(n) = x(n) - py(n-1) - qy(n-2) \quad (32-31)$$

una vez más con fracciones de b bits utilizadas con redondeo, pueden ocurrir oscilaciones de ciclo límite en la región $(-k, k)$, donde k es la fracción de b bits más grande que cumple:

$$k \leq \frac{0.5 \times 2^{-b}}{1 - |q|} \quad (32-32)$$

De nuevo, las oscilaciones de ciclo límite pueden evitarse haciendo $|q| < 0.5$.

Sin embargo, en la práctica los coeficientes son determinados por requisitos de diseño y no se pueden modificar con facilidad para evitar la oscilación de ciclo límite. En cambio se utilizan las ecuaciones 32-30 y 32-32 para establecer la máxima amplitud de estas oscilaciones y anexar los bits de guarda suficientes (es decir, bits de orden extrabajo que se encuentran más allá del requisito de longitud de palabra de diseño), de manera que las oscilaciones ocurran solamente en los bits de guarda. Así, si en el ejemplo anterior se utilizaran fracciones de 6 bits para las variables internas del filtro, la oscilación sólo afectaría el sexto bit y nunca figuraría en la salida de 4 bits, como se muestra en la tabla 32-2. Aquí, el filtro entra en un ciclo límite en $n = 7$, pero como sólo es afectado el sexto bit, la salida de 4 bits se redondea a 0.

Puede presentarse un problema de oscilación diferente debido a desbordamientos en la adición. Se supone que el filtro ha sido diseñado para evitar estos desbordamientos; sin embargo, en la práctica cualquier sistema puede sobrecargarse en ocasiones. Si se utiliza la aritmética del "complemento a dos", el des-

bordamiento de un número positivo puede "dar la vuelta" para producir un valor negativo espurio, y de modo similar para el desbordamiento de un número negativo. Por ejemplo, las fracciones binarias de 6 bits 0.111011 y 0.101110 suman 1.101001. La suma pasa de 1 y la salida del bit de alto orden coloca el bit del signo en 1, lo que indica un número negativo. (En el capítulo 55 de este libro se cubre con mayor detalle la adición binaria.) Por tanto, esta característica de transferencia de un sumador se ve como en la figura 32-9a. Estos cambios inesperados de signo pueden provocar inestabilidad y oscilaciones de gran amplitud. La solución consiste en utilizar un sumador de saturación. En un sumador de saturación, un desbordamiento en una dirección u otra da por resultado un valor de salida igual a la magnitud más grande posible, como se muestra en la figura 32-9b.

32.3.4 Efectos de cuantización de coeficientes

Los valores de los coeficientes de los filtros, al igual que las muestras de señales, se representan por medio de números de precisión finita, por lo que también tienen errores de cuantización^{1,2}. Estos errores producen errores en las posiciones de los polos y ceros de los filtros, y éstos no tienen exactamente el funcionamiento previsto. El grado de desplazamiento de los polos y ceros respecto a sus valores de diseño depende de la longitud de palabra usada para los coeficientes y la estructura del filtro. Aquí se analizará la cuantización de coeficientes en filtros de segundo orden y se demostrará que en este caso tiene el efecto de limitar la elección de ubicaciones de polos y ceros.

Filtros IIR. En la figura 32-10 se presenta una concepción de forma directa de un par de polos complejos. Los polos de esta estructura están dados por las raíces del polinomio denominador. Este polinomio puede expresarse nuevamente en términos de las coordenadas polares de las raíces:

$$1 + 2\rho \cos \theta z^{-1} + \rho^2 z^{-2} \quad (32-33)$$

Tabla 32-2. Oscilaciones de ciclo límite en el filtro $y(n) = -0.6y(n-1) + x(n)$ con dos bits de guarda

n	$y(n)$		
	Producto	6 bits	Salida
0	0.10000000	0.100000	0.1000
1	-0.01001101	-0.010011	-0.0101
2	0.00101101	0.001011	0.0011
3	-0.00011010	-0.000111	-0.0010
4	0.00010001	0.000100	0.0001
5	-0.00001001	-0.000010	-0.0001
6	0.00000101	0.000001	0.0000
7	-0.00000010	-0.000001	-0.0000
8	0.00000010	0.000001	0.0000
9	-0.00000010	-0.000001	-0.0000

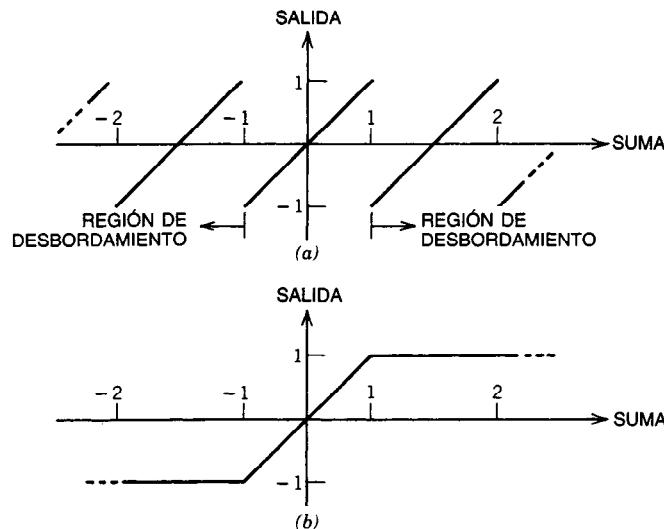


Fig. 32-9. Característica de transferencia de a) sumador binario de complemento a dos ordinario y b) sumador de saturación.

Si los coeficientes se representan, por ejemplo, por medio de números de complemento a dos de 4 bits,

Si los coeficientes se representan, por ejemplo, por medio de números de complemento a dos de 4 bits, entonces ρ sólo puede tomar siete valores, que van de $\sqrt{0.001}_2$ a $\sqrt{0.111}_2$. Con la misma cuantización, $\rho \cos \theta$ puede tomar sólo 15 valores, de -0.111_2 a $+0.111_2$.

Por tanto, con esta cuantización las únicas ubicaciones de raíces posibles se encuentran en las intersecciones entre una familia de 7 círculos con una familia de 15 rectas. Estas intersecciones se ilustran para el primer cuadrante del círculo unitario en la figura 32-11. Esta cuantización pone de relieve dos características importantes:

1. El espaciamiento de los círculos no es uniforme (están más próximos entre sí a medida que se aproximan al círculo unitario). Esto quiere decir que la densidad de posibles ubicaciones de los polos aumenta a medida que se acercan al círculo unitario, lo cual es deseable.
2. Existen relativamente pocas intersecciones en la región importante de baja frecuencia en la vecindad de $(1 + j0)$.

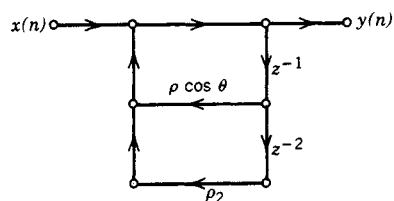


Fig. 32-10. Ejecución de forma directa de un par único de polos complejos. Los coeficientes están en términos de coordenadas polares de los polos.

Una forma alternativa de ejecutar polos de segundo orden, debida a Gold y Rader⁴, permite una elección diferente de ubicaciones de los polos. En esta estructura se emplean secciones de primer orden interacopladas (fig. 32-12). Su función de transferencia es:

$$H(z) = \frac{\rho z^{-1} (\sin \theta + \sin 2\theta)}{1 + 2\rho \cos \theta z^{-1} + \rho^2 z^{-2}} \quad (32-34)$$

Ésta tiene los mismos polos que la estructura de la figura 32-10. Sin embargo, aquí los coeficientes del filtro son $\rho \cos \theta$ y $\rho \sin \theta$, las coordenadas real e imaginaria de la posición de los polos; por tanto, el conjunto resultante de posibles ubicaciones de los polos es la retícula uniforme que se muestra en la figura 32-13. Obsérvese que esta retícula es más densa (es decir, las posibles ubicaciones de los polos están más próximas entre sí) en la vecindad de $(1 + j0)$ de lo que están en la figura 32-11 y menos densa en la vecindad de $(0 + j1)$. El diseñador debe elegir la estructura que proporcione la mayor densidad en la región de interés.

Esta selección limitada de ubicaciones de polos es más seria en los filtros de banda estrecha de alto orden en los que se tienen que colocar muchos polos en una pequeña región muy próxima al círculo unitario; en este caso, incluso los errores de posición pequeños pueden degradar gravemente el funcionamiento, y es posible que se requieran palabras muy largas sin importar la configuración que se utilice.

En filtros de forma directa de orden superior, el análisis es en extremo complicado y no es viable sumar en términos de posibles posiciones de los polos, debido a que existe interacción entre éstos. Específicamente, Kaiser⁸ ha demostrado que el desplazamiento de los polos desde su valor deseado es máximo cuando grandes números de polos están próximos entre sí. Esta situación puede ocurrir con gran facilidad en filtros de

banda estrecha de alto orden. Por este motivo, la estructura de forma directa no suele recomendarse para órdenes de filtros mayores que dos. Como en las estructuras de segundo orden no se encuentran interacciones de polos, tampoco ocurren en estructuras en cascada o en paralelo.

Filtros FIR. La mayor parte del análisis subsiguiente se aplica a los filtros FIR. Sólo se analiza el aspecto de fase lineal. La cuantización de un conjunto de coeficientes simétricos no destruye su simetría; por tanto, los errores de cuantización en la forma directa no destruyen la linealidad de fase. Desplazan los ceros de sus valores de diseño, y en filtros de alto orden pueden desplazar ceros del círculo unitario fuera de éste.

Si se utiliza una concepción en cascada, las ejecuciones cuadráticas de los ceros de un círculo unitario siempre permanecen en dicho círculo. Ello se debe a que estos ceros se producen a partir de un factor $(z^{-2} + az^{-1} + 1)$, y un coeficiente de 1 no tiene error de cuantización. Sin embargo, en filtros de fase lineal los ceros que salen del círculo unitario se presentan en grupos de cuatro, con coordenadas polares $(\rho, \pm \theta)$, $(1/\rho, \pm \theta)$ (fig. 32-14). Si estos pares se materializan con secciones cuadráticas, la elección limitada de ubicaciones de raíces, para una $(\rho, \pm \theta)$ dada, suele evitar la colocación de un par correspondiente exactamente en los puntos recíprocos $(1/\rho, \pm \theta)$. Por tanto, si la linealidad de fase es un requisito crítico, suele ser mejor implementar términos de cuarto orden en forma directa.

32.4 TÉCNICAS DE DISEÑO DE FILTROS DE RESPUESTA DE PULSO INFINITA (IIR)

Los diseños de filtros digitales generalmente se agrupan en dos categorías. Existen los que se hacen a mano, con sólo la ayuda de una calculadora de bolsillo, y los que requieren una computadora. La primera categoría es más simple; las ecuaciones de diseño son breves y directas. También es la más antigua y tiende (con algunas excepciones) a generar un producto de inferior calidad. Los diseños auxiliados por computadora son difíciles de describir de manera concisa y, en términos generales, para ello es necesario hacer referencia a los programas que se utilizan, que son demasiado extensos para presentarlos en su totalidad aquí. Por tanto, los diseños que se pueden realizar a mano se describen aquí más ampliamente que los auxiliados por computadora, ya que cualquier descripción de los últimos termina con una referencia al programa que se utiliza.

Existen dos métodos generales para diseñar filtros digitales IIR. El primero consiste en comenzar con un filtro analógico conocido que cumpla los requisitos de diseño y determinar un filtro digital correspondiente. El segundo consiste en aproximarse al funcionamiento del filtro deseado directamente en el dominio digital o, de manera equivalente, en el dominio de la transformada z . Estos métodos de aproximación requieren la solución de conjuntos de ecuaciones no lineales y son

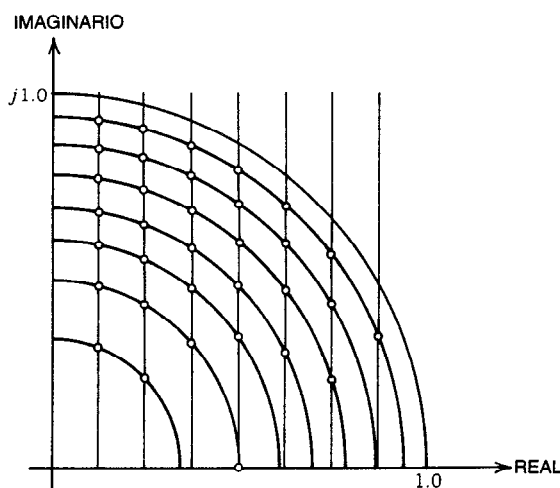


Fig. 32-11. Primer cuadrante del círculo unitario, que muestra posibles ubicaciones de los polos mediante la estructura de la figura 32-10 con cuantización de tres bits.

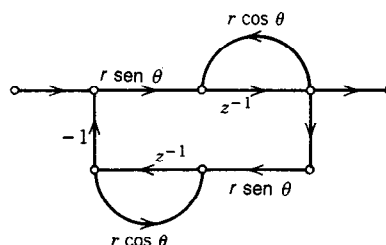


Fig. 32-12. Ejecución alternada de un par único de polos complejos en base a secciones de primer orden interacopladas.

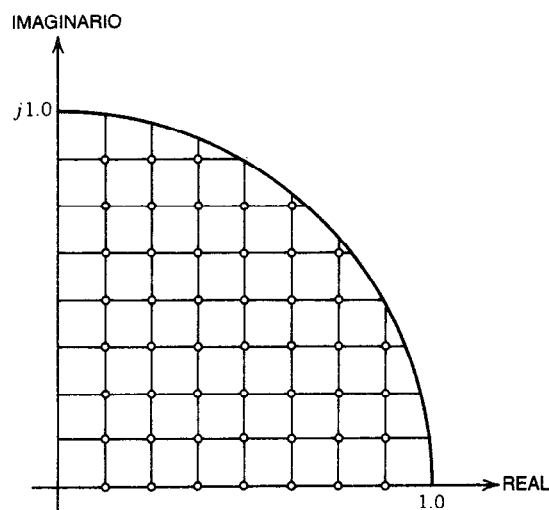


Fig. 32-13. Primer cuadrante del círculo unitario, que ilustra posibles ubicaciones de polos mediante la estructura de la figura 32-12 con cuantización de 3 bits.

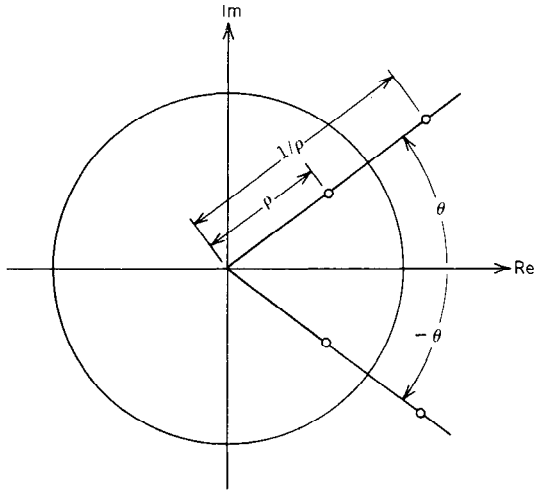


Fig. 32-14. Ubicaciones de ceros en filtros de respuesta de pulso finita (FIR) de fase lineal.

los que mejor se adaptan para el diseño auxiliado por computadora. Se comienza analizando los métodos con los que se da inicio a un diseño analógico equivalente.

32.4.1 Invariancia a los pulsos

Dado que un sistema lineal es especificado completamente por su respuesta de pulso, una posible estrategia de diseño consiste en deducir un filtro digital cuya respuesta de pulso sea una versión muestreada de la respuesta de pulso de un filtro analógico dado^{1,3}. Es decir, si $g(t)$ es la respuesta de pulso analógica y $h(n)$ es la respuesta de pulso digital, entonces:

$$h(n) = g(nT) \quad (32-35)$$

donde T es el intervalo de muestreo.

No obstante, como en una operación de muestreo cualquiera, se debe considerar en forma muy cuidadosa la relación entre frecuencia de muestreo y ancho de banda. La operación de muestreo $g(t)$ se puede considerar una multiplicación por un tren de pulsos con espaciamiento $T = 1/f_s$. Sin embargo, en base a la teoría elemental de la transformada de Fourier, esta operación convolucionada la respuesta de frecuencia $G(f)$ con otro tren de pulsos con espaciamiento $f_s = 1/T$. El resultado es una reproducción de $G(f)$ en in-

tervalos de f_s , como se observa en la figura 32-15. A menos que $G(f)$ sea limitado en banda en forma adecuada, estas reproducciones producirán aliasing. (La respuesta de pulso se submuestra.) Por tanto, la utilidad de este método de diseño se limita a filtros cuya respuesta de frecuencia tenga un descenso brusco hasta quedar muy por abajo de $f_s/2$. Su principal atractivo es su sencillez intuitiva y de cálculo.

El procedimiento del diseño invariante a los pulsos es como sigue:

1. Se comienza con la función de transferencia del filtro analógico correspondiente, $G(s)$.
2. Se determina el desarrollo en fracciones parciales de $G(s) = \sum_i G_i(s)$.
3. Para cada término $G_i(s)$, se obtiene el $H_i(z)$ correspondiente.
4. Se utiliza un filtro en paralelo constituido por bloques cuadráticos que correspondan a $H_i(z)$.

32.4.2 Transformación lineal

En el dominio de la transformada z , el círculo unitario corresponde al eje $j\omega$ en el dominio de la transformada de Laplace. La deducción de un filtro digital a partir de un filtro analógico equivalente puede equipararse a la búsqueda de un mapeo de un dominio al otro que "enrolle" al eje $j\omega$ en torno al círculo unitario. De hecho, la invariancia a los pulsos hace esto, con la salvedad de que un solo tramo del eje $j\omega$, de $-\pi f_s$ a πf_s , da una vuelta completa en torno al círculo unitario. En esta interpretación, el problema del aliasing se presenta debido a que todos los tramos adicionales del eje $j\omega$, de $(2n-1)\pi f_s$ a $(2n+1)\pi f_s$, $n = \dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots$, también vuelven al círculo unitario. Lo que se necesita es una función que mapeará todo el eje $j\omega$ en el círculo unitario sólo una vez. La función que hace esto es la transformación bilineal:

$$s = 2f_s \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}} \quad (32-36)$$

Si esta función sustituye a s en $G(s)$, el resultado es una función que, cuando se evalúa en torno al círculo unitario, asume los valores que toma $G(s)$ cuando se evalúa sobre el eje $j\omega$.

La transformación de la ecuación 32-36 mapea un intervalo infinito de frecuencias en el círculo unitario finito. Naturalmente, este mapeo distorsiona la escala de frecuencia. Llámese ω_d a la frecuencia en radianes del dominio de la transformada z y a ω_a a la frecuencia

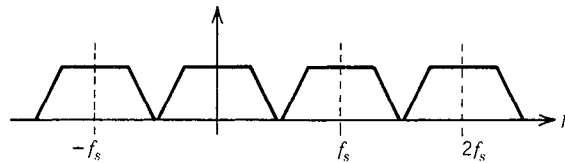


Fig. 32-15. Repeticiones de la respuesta de pulso a intervalos de f_s como resultado del muestreo.

en radianes correspondiente del dominio analógico. En el dominio de la transformada z , ω_d corresponde a la distancia angular en torno al círculo unitario. La distancia angular es $\omega_d T$ radianes, donde T es el periodo de muestreo. Evaluando la ecuación 32-36 sobre el círculo unitario, $z = e^{j\omega_d T}$:

$$\omega_a = 2/T \tan(\omega_d T/2) \quad (32-37)$$

La consecuencia práctica de esto es que, cuando se deduce un filtro digital a partir de un diseño analógico empleando la transformación bilineal, hay que *predistorsionar* las frecuencias de interés en el dominio analógico de manera que, después de que se hayan transformado, lleguen a los sitios correctos en el dominio de la transformada z .

Esto se ilustra en la figura 32-16. La frecuencia del dominio digital se grafica en el eje horizontal y la frecuencia del dominio analógico en el eje vertical. La curva continua es una gráfica de la ecuación 32-37. Debajo del eje del dominio digital se presenta una respuesta de frecuencia hipotética, y la predistorsión necesaria en el dominio del tiempo se aprecia a la izquierda del eje del dominio analógico.

El procedimiento para diseñar un filtro IIR empleando la transformación bilineal es como sigue:

1. Se predistorsionan todas las frecuencias críticas empleando la ecuación 32-37.
2. Se diseña (o se busca en una tabla) la función de transferencia del filtro analógico $G(s)$, empleando las frecuencias predistorsionadas.
3. Se encuentra la función de transferencia del filtro digital correspondiente $H(z)$ sustituyendo la ecuación 32-37 en $G(s)$.
4. Se deduce la sección digital apropiada, ya sea por factorización o por desarrollo en fracciones parciales de $H(z)$.

Ejemplo. Empleando $f_s = 10$ kHz, diseñar un filtro Butterworth de dos polos con frecuencia de esquina de 1 kHz.

1. Predistorsión de la frecuencia: $T = 0.0001$ s, $\omega_d = 6283.2$ rad/s. Por tanto, $\omega_a = 2 \times 10^4 \tan(6283.2 \times 10^{-4}/2) = 6498.4$ rad/s (1034.25 Hz).
2. Diseño analógico: un filtro Butterworth pasabajas de dos polos con $\omega_a = 6498.4$ tiene la función de transferencia:

$$G(s) = \frac{4.2229 \times 10^7}{s^2 + 9.19011 \times 10^3 s + 4.2229 \times 10^7}$$

3. Transformación bilineal:

$$\begin{aligned} H(z) &= \frac{4.2229 \times 10^7}{4 \times 10^8 \left(\frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}} \right)^2 + 1.83802 \times 10^8 \left(\frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}} \right) + 4.2229 \times 10^7} = \\ &= 0.067455 \frac{1 + 2z^{-1} + z^{-2}}{1 - 1.14298z^{-1} + 0.412802z^{-2}} \end{aligned}$$

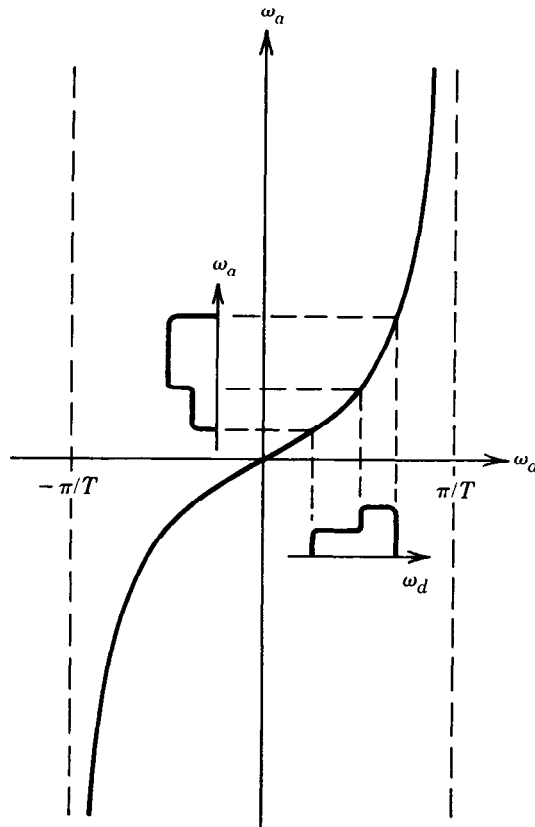


Fig. 32-16. Mapeo de frecuencias entre los dominios analógico (eje vertical) y digital (eje horizontal). Se muestran una posible respuesta de frecuencia y su equivalente analógico predistorsionado.

4. Implementación: como los polinomios son cuadráticos, cualquier implementación se reduce a una forma directa de orden 2 única (fig. 32-17).

En este ejemplo, $G(s)$ tiene dos polos complejos en $s = 4595.05 + j4595.05$ y un cero con multiplicidad dos en $s = \infty$. En el filtro digital, los polos están en $z = 0.57149 + j0.29360$ y los ceros en $z = -1$. La respuesta de frecuencia de este filtro se presenta en la figura 32-18.

Debido a que distorsiona la escala de frecuencia, la transformación bilineal se adapta mejor a filtros cuyas respuestas de frecuencia son esencialmente constantes por tramos, a diferencia de lo que ocurre con los filtros cuya respuesta debe ser alguna función lineal de la frecuencia (p. ej., diferenciadores).

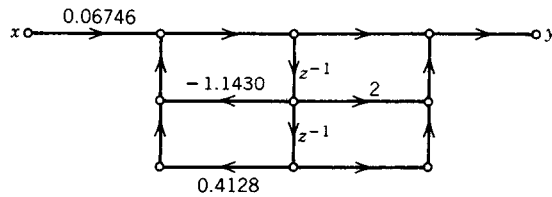


Fig. 32-17. Ejecución de un filtro Butterworth de dos polos por medio de la transformación bilineal.

32.4.3 Técnicas de diseño directo

En seguida se exponen tres técnicas para el diseño de filtros IIR directamente a partir de una respuesta de frecuencia especificada. Estos procedimientos de diseño son muy laboriosos desde el punto de vista del cálculo y, por lo general, no son prácticos sin la ayuda de una computadora.

Minimización del error cuadrático medio (MSE, de mean squared error). En la primera técnica, creada por Steiglitz¹⁰, la ganancia del filtro se especifica en M frecuencias discretas, $\{z_i\}$, y se determinan los coeficientes que minimizan los errores en estos puntos. Para tener mínima sensibilidad a los coeficientes y ductilidad analítica, supóngase una estructura en cascada de N secciones:

$$Y(z) = AH(z) \quad (32-38)$$

A es una constante de ganancia donde H es un producto de formas bicuadráticas dado por:

$$H(z) = \prod_{k=1}^N \frac{1 + a_k z^{-1} + b_k z^{-2}}{1 + c_k z^{-1} + d_k z^{-2}} \quad (32-39)$$

Sea Y^d la magnitud especificada de la respuesta de frecuencia en una frecuencia z_i y sea $Y(z_i)$ la aproximación del filtro digital. Por tanto, el MSE se define como:

$$Q(\theta) = \sum_{i=1}^M [|Y(z_i)| - Y^d]^2 \quad (32-40)$$

donde θ es el vector de parámetros desconocidos:

$$\theta = \{a_1, b_1, c_1, d_1, \dots, a_N, b_N, c_N, d_N, A\} \quad (32-41)$$

y la suma se toma sobre los M puntos en los cuales se especificó Y .

Para encontrar este mínimo es necesario resolver un conjunto de ecuaciones no lineales simultáneas. Steiglitz utiliza el algoritmo de Fletcher-Powell, que se puede hallar en el paquete de subrutinas científicas de IBM¹¹. Este programa requiere una subrutina suministrada por el usuario que calcule Q y las derivadas parciales de Q con respecto a los parámetros θ .

La subrutina para obtener Q y $\text{grad } Q$ tiene como entradas las frecuencias de interés $\{z_i\}$, las respuestas especificadas en estas frecuencias, y el valor actual de

un vector ϕ . El vector ϕ comprende todos los parámetros de θ salvo la ganancia, que es determinada por la subrutina. Esta ganancia óptima se expresa como A^* , y Steiglitz utiliza $\hat{Q}(\phi)$ para representar Q en relación con esta ganancia: $\hat{Q}(\theta) = Q(A^*, \phi)$. A se maneja por separado porque su nivel óptimo puede calcularse en forma directa. El manejo por separado reduce el número de parámetros por optimizar con la rutina de Fletcher-Powell, y por tanto acelera su ejecución.

La subrutina comprende las siguientes etapas. (Para más detalles véanse Steiglitz¹⁰ y en Peled y Liu².)

1. Calcular la función de transferencia, exclusiva de la ganancia, para todas las frecuencias que se especifican.
2. Determinar A^* mediante el uso de este valor de H_i e Y^d .
3. Calcular los errores individuales, E_i , y el MSE, \hat{Q} .
4. Determinar el gradiente.

En general, se requieren muchas iteraciones para llegar a un valor de ϕ satisfactorio. Además, la solución puede tener polos exteriores al círculo unitario. Por tanto, el programa se corre en dos etapas. Se hace una suposición inicial razonable como punto de partida; después de la convergencia, se examinan las ubicaciones de los polos. Cualesquiera polos que se hallen fuera del círculo unitario [p. ej., en las coordenadas polares (ρ, θ)] se sustituyen por un polo correspondiente en el interior, es decir, en $(1/\rho, \theta)$. Después se corre por segunda vez el programa utilizando estas ubicaciones corregidas como intento inicial.

Minimización de otras funciones error. El procedimiento anterior puede refinarse empleando una función error más complicada. Deczky¹² emplea una suma ponderada de potencias superiores de los errores individuales:

$$E = \sum_i a_i [|Y(z_i)| - Y^d]^{2p} \quad (32-42)$$

donde p es algún número mayor de 1. El uso de un exponente mayor hace que el error resultante tienda a una solución equiindulante. Esta versión da por resultado un conjunto de ecuaciones no lineales, como antes, que se resuelven de la misma manera. El método de Deczky también puede emplearse para obtener un retardo de grupo especificado.

Programación lineal. La programación lineal es una técnica para obtener valores $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ que maximicen la combinación lineal:

$$R = \sum_{j=1}^n c_j x_j \quad (32-43)$$

sujeta a las restricciones lineales:

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_i \quad i = 1, 2, \dots, m \quad (32-44)$$

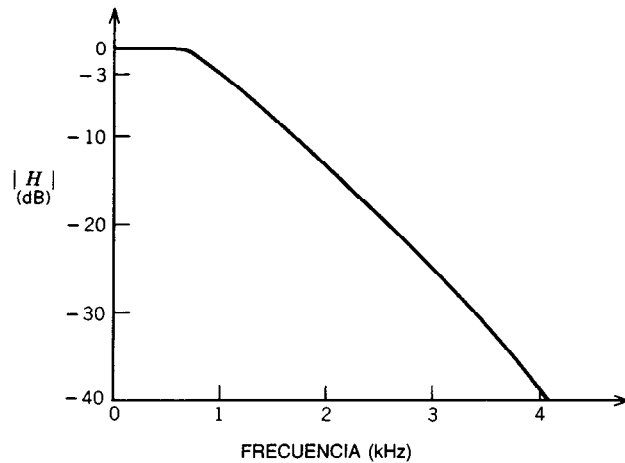


Fig. 32-18. Respuesta de frecuencia del filtro de la figura 32-17.

Thajchayapong y Rayner¹³ han aplicado esta técnica al diseño de filtros digitales. El valor absoluto al cuadrado de la función de transferencia $|H(z)|^2$, evaluada en el círculo unitario, puede expresarse como:

$$|H(e^{j\omega})|^2 = P(\omega, k_p) / Q(\omega, l_q) \quad (32-45)$$

donde:

$$P(\omega, k_p) = \sum_{p=0}^M K_p \cos(p\omega T) \quad (32-46)$$

$$Q(\omega, l_q) = 1 + \sum_{q=1}^N l_q \cos(q\omega T) \quad (32-47)$$

Estas expresiones son lineales en k_p y l_q .

La ganancia del filtro se especifica por medio de límites superior e inferior $U^2(\omega)$ y $L^2(\omega)$, y su diferencia es $E^2(\omega)$ (fig. 32-19). Las restricciones se basan en el requisito de que P/Q esté entre estos límites. La función R se elige de tal forma que su maximización fuerce la respuesta real hacia $U^2(\omega)$ en la banda de paso y hacia $L^2(\omega)$ en la banda de bloqueo o detención.

Estas restricciones se evalúan en cada frecuencia de interés y la función R se maximiza empleando la técnica simplex. Si la R resultante es negativa, entonces el orden del filtro debe incrementarse o bien deben relajarse las especificaciones de errores.

Después de que se ha obtenido el nivel óptimo, el diseño especificado se da en términos de $\cos(n\omega T)$. El diseño se completa sustituyendo $\cos(n\omega T)$ por $0.5(z^n + z^{-n})$. Los polinomios resultantes en z se refieren a $|H(z)|^2$ y tendrán raíces fuera y dentro del círculo unitario; al pasar de $|H(z)|^2$ a $H(z)$ se descartan las raíces que están fuera por razones de estabilidad y fase mínima. Rabiner¹⁴ y otros han generalizado este método.

32.5 TÉCNICAS DE DISEÑO DE FILTROS DE RESPUESTA DE PULSO FINITA (FIR)

Uno de los atractivos de los filtros FIR es que resulta fácil hacer que tengan una respuesta de fase lineal. En muchas aplicaciones, la fase lineal es una necesidad; por tanto, casi todas las técnicas de diseño FIR se han creado pensando en los filtros de fase lineal.

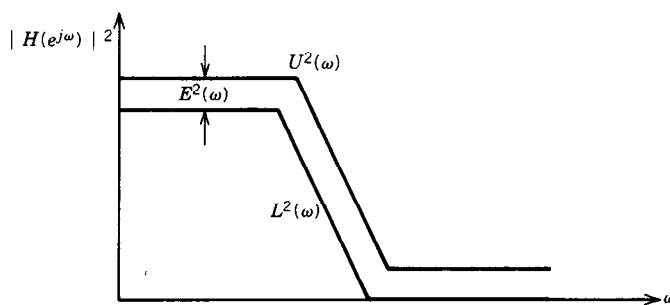


Fig. 32-19. Definición de límites de ganancia para el diseño de filtros mediante programación lineal.

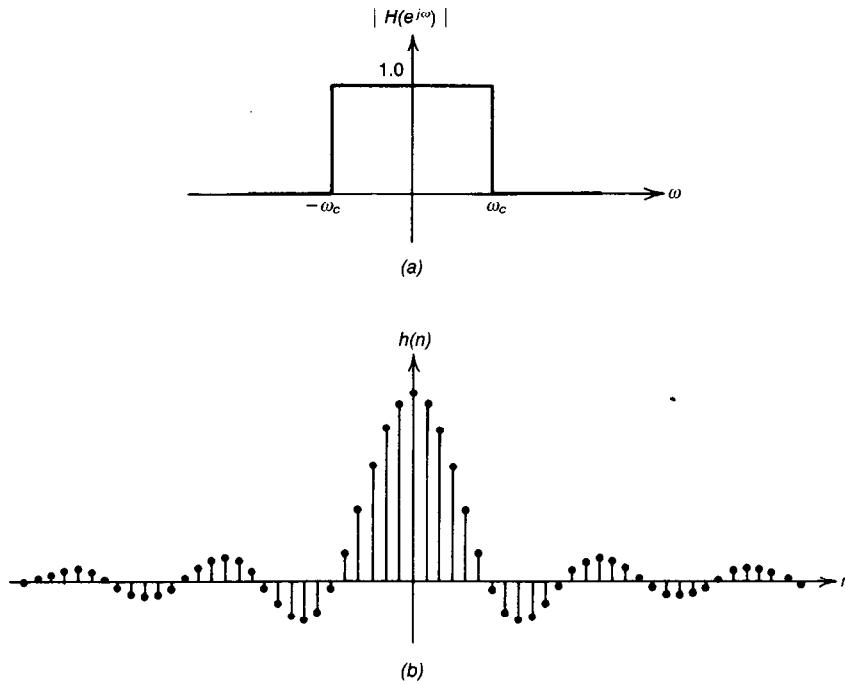


Fig. 32-20. a) Característica de un filtro pasabajas ideal con corte en ω_c . b) Respuesta de pulso correspondiente a un filtro pasabajas ideal.

32.5.1 Técnicas de la transformada de Fourier: aplicación de ventanas

Un punto de partida natural del diseño de filtros FIR es la respuesta de frecuencia especificada, aprovechando la relación que existe entre esta respuesta y la respuesta de pulso del filtro.

Si un filtro digital tiene respuesta de pulso $h(n)$, entonces su respuesta de frecuencia $H(e^{j\omega})$ está dada por la ecuación 32-11. Si ω se escala a la frecuencia de muestreo, entonces $H(e^{j\omega})$ es periódica con periodo 2π y $h(n)$ puede obtenerse a partir de la ecuación 32-12.

Considérese el caso de un filtro pasabajas ideal, como se muestra en la figura 32-20a. Esta respuesta es:

$$H(e^{j\omega}) = \begin{cases} 1 & |\omega| < \omega_c \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases} \quad (32-48)$$

donde ω_c es la frecuencia de corte normalizada $2\pi f_c/f_s$. Aplicando la ecuación 32-12 se obtiene:

$$h(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_c}^{\omega_c} e^{j\omega n} d\omega = \frac{\sin \omega_c n}{\pi n} \quad (32-49)$$

cuyo aspecto general es similar al de la figura 32-20b.

Esta solución no está aún lista para utilizarse, puesto que la respuesta de pulso no es finita y, además, el sistema no es causal (porque la respuesta de pulso es diferente de cero en un tiempo negativo). Sin embargo, se puede obtener una aproximación causal finita

haciendo pasar por una ventana la respuesta de pulsos; es decir, truncándola para $|n|$ mayor que algún tiempo de corte t_c y desplazando la respuesta en el tiempo hasta que el sistema sea causal. Estos dos pasos se ilustran en las figuras 32-21a y 32-21b.

El hacer pasar por una ventana la respuesta de pulso provoca una desviación respecto a la respuesta de frecuencia especificada, como se muestra en la figura 32-21c:

1. La respuesta de la banda de paso ya no es plana, sino que presenta oscilaciones que aumentan de manera uniforme en amplitud hasta llegar a la frecuencia de corte.
2. La respuesta de la banda de bloqueo ya no es cero.
3. La transición entre la banda de paso y la banda de bloqueo ya no es abrupta.

Para minimizar las oscilaciones mencionadas, la respuesta de pulso infinita original se multiplica por una función ventana que no sea un pulso rectangular puro. No existe una función ventana finita cuya transformada no tenga lóbulos laterales, pero se pueden encontrar funciones cuyas transformadas tengan lóbulos laterales muy pequeños.

En el caso de utilizarse una de estas funciones ventana, las oscilaciones en la respuesta de frecuencia se reducen en forma correspondiente.

Se han explorado muchas funciones ventana¹⁵. Algunas de las mejor conocidas se enumeran en la tabla

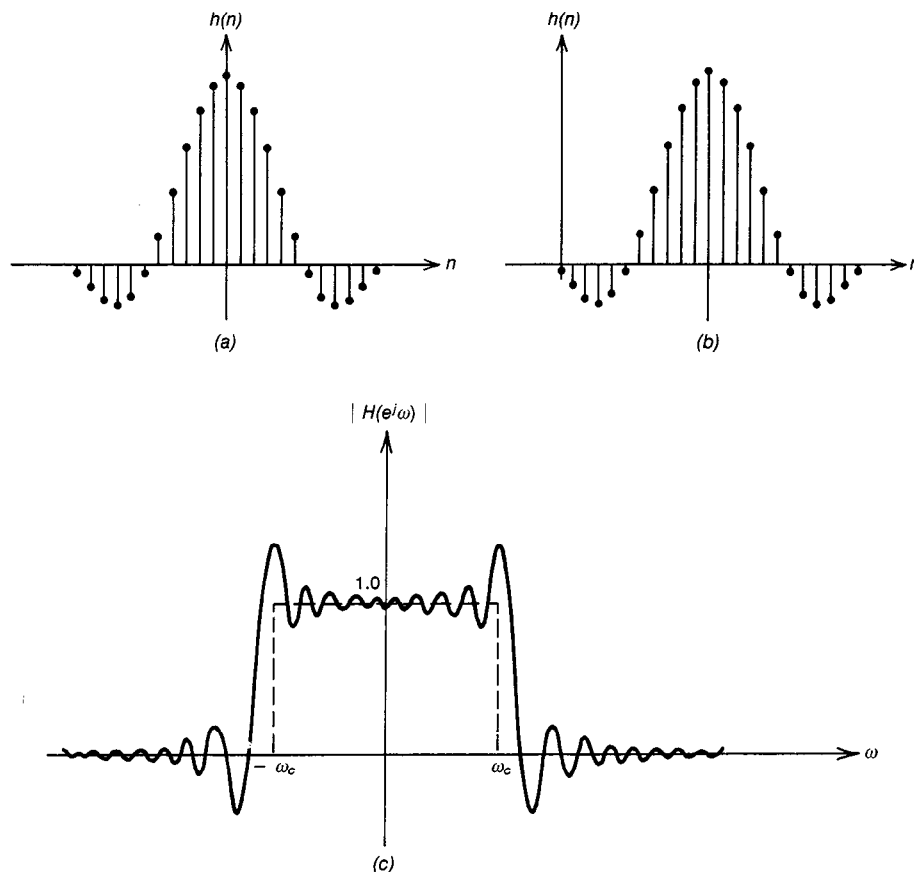


Fig. 32-21. a) Versión truncada de la respuesta de pulso de la figura 32-20b. b) Respuesta truncada desplazada para hacer causal el sistema. c) Respuesta de frecuencia del filtro, resultante del truncado de la respuesta de pulso.

32-3 y se presentan en la figura 32-22, junto con sus transformadas. En todas estas funciones ventana, los lóbulos laterales son mucho menores que aquellos que resultan de la ventana rectangular, y todos los lóbulos principales son más amplios que los resultantes de la ventana rectangular.

Estas aseveraciones son válidas para todas las ventanas; la búsqueda de la función ventana ideal es una búsqueda de la mejor solución intermedia entre la amplitud de los lóbulos laterales y el ancho de los lóbulos principales.

Sin embargo, ningún filtro FIR diseñado por transformación de Fourier y aplicación de ventanas es óptimo. El atractivo de la técnica reside totalmente en su sencillez y economía.

El diseño con la transformada de Fourier de filtros FIR puede resumirse en las especificaciones que siguen a continuación:

1. Se establece la ecuación de la respuesta de frecuencia deseada.
2. Se determina la respuesta de pulso por medio de la ecuación 32-49.

3. Se elige una función ventana y un ancho de ventana para satisfacer las especificaciones de oscilación y amplitud de transición que se requieren. Se asigna la ventana de acuerdo con la respuesta de impulso.
4. Se desplaza la respuesta de pulso para hacerla causal.

Tabla 32-3. Funciones ventana comunes

Nombre	Descripción ^a
Rectangular	$w(k) = 1$
Fejér-Bartlett	$w(k) = 1 - 2k/N $
Hanning	$w(k) = (1 + \cos\pi k/N)/2$
Hamming	$w(k) = 0.54 + 0.46 \cos\pi k/N$
Kaiser	$w(k) = \frac{I_0[N\theta_a \sqrt{1 - (k/N)^2}]}{I_0[N\theta_a]}$

^a Para todas las ventanas, $w(k) = 0$ para $|k| > N$.

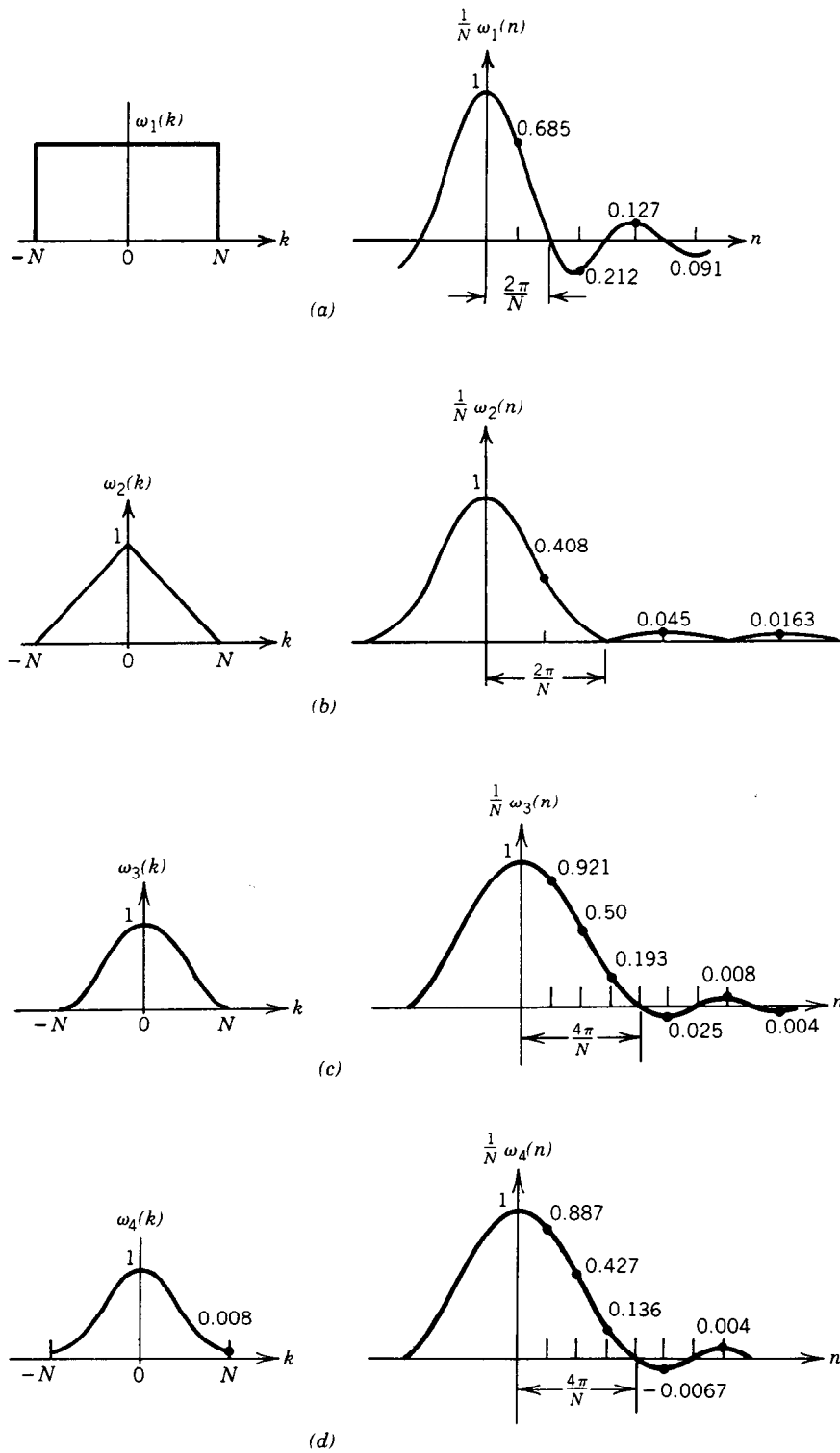


Fig. 32-22. Funciones ventana comunes y sus transformadas: a) rectangular; b) triangular (Fejér-Bartlett); c) Hanning; d) Hamming.

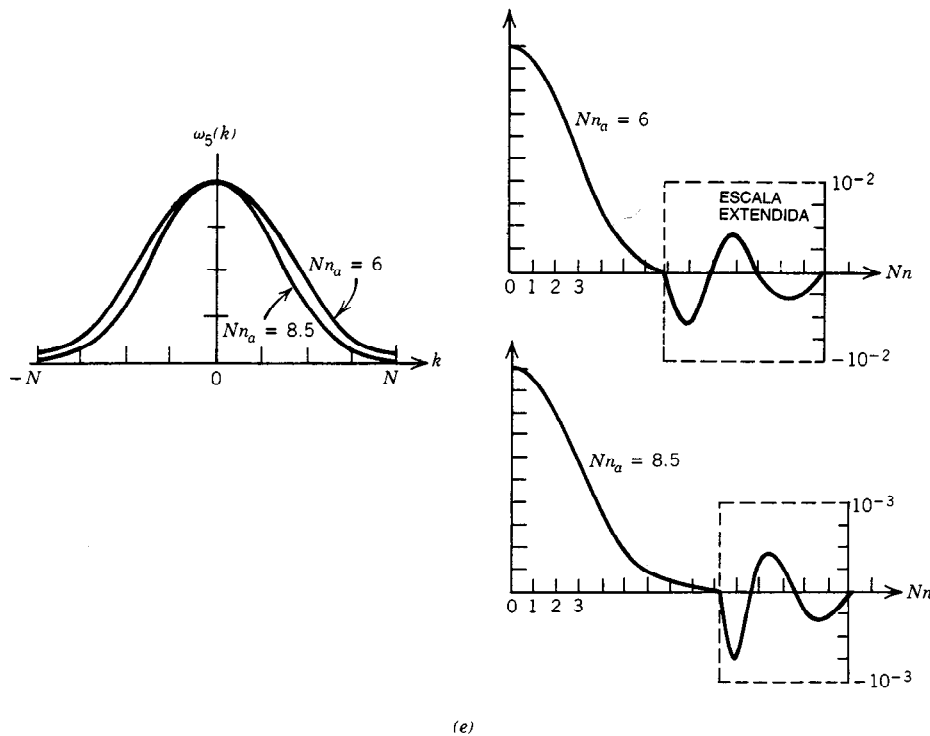


Fig. 32-22 (cont.). Funciones ventana comunes y sus transformadas: e) Kaiser.

32.5.2 Diseño de muestreo en frecuencia

La función de transferencia de un filtro digital puede obtenerse a partir de su respuesta de pulso empleando la relación (ec. 32-13a):

$$H(z) = \sum_{n=0}^{N-1} h(n)z^{-n} \quad (32-50)$$

La respuesta de pulso puede determinarse a partir de la respuesta de frecuencia por medio de la DFT inversa (ec. 32-13b):

$$h(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} H(k)W^{nk} \quad (32-51)$$

Combinando estas dos relaciones:

$$H(z) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} z^{-n} \sum_{k=0}^{N-1} H(k)W^{nk} \quad (32-52)$$

que puede volver a expresarse como:

$$H(z) = \frac{1 - z^{-N}}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \frac{H(k)}{1 - z^{-1}W^k} \quad (32-53)$$

Esta forma puede ser implementada por la estructura en paralelo de la figura 32-23. Los multiplicadores $H(k)$ son muestras equiespaciadas de la respuesta de frecuencia deseada. El procedimiento de diseño de es-

te filtro consiste en sustituir muestras de la respuesta de frecuencia deseada en la ecuación 32-53.

Como es usual, este diseño requiere algún trabajo extra para hacerlo práctico; se puede citar:

1. El denominador $(1 - z^{-1}W^k)$ coloca un polo en el círculo unitario y lleva a un sistema marginalmente estable. En la práctica, los polos se colocan justo dentro del círculo haciendo que el denominador sea $(1 - az^{-1}W^k)$, donde a es una constante ligeramente menor que la unidad (p. ej., $1 - 2^{-12}$).
2. Las muestras $H(k)$ son números complejos. En la práctica, los términos $H(k)$ conjugados se combinan para producir multiplicadores reales, con algún incremento en la complejidad.
3. Para tener la exactitud adecuada se requieren muchas muestras muy próximas entre sí y, por tanto, un número grande de ramas en paralelo. Sin embargo, el diseño es atractivo para filtros de banda estrecha en los cuales sólo algunas muestras son diferentes de cero, ya que se pueden omitir las ramas que tienen multiplicadores cero.
4. La respuesta ondulante de este filtro es deficiente, pero mejora en grado considerable dejando una o más muestras de las bandas de transición sin restricción y colocándolas de modo que se optimice dicha respuesta. Esto se realiza mejor con la ayuda de una computadora, mediante un programa de búsqueda del gradiente¹⁶.

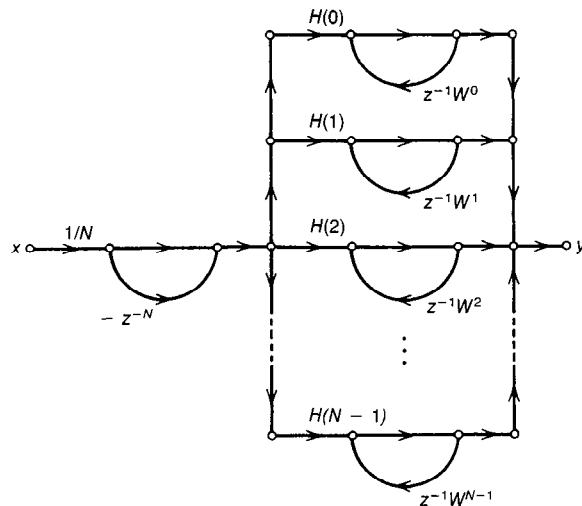


Fig. 32-23. Estructura de un filtro básico con muestreo en frecuencia.

32.5.3 Diseño óptimo de filtros

El concepto de diseño por ajuste de la respuesta de frecuencia a un conjunto de puntos predeterminado va a la zaga del moderno diseño óptimo de filtros auxiliado por computadora. Este diseño produce un desempeño equiindulante tanto en las bandas de paso como en las de bloqueo. Es un proceso iterativo en el que cada iteración produce una aproximación al filtro deseado. El desempeño ondulante de la aproximación se compara entonces con la especificación y, como resultado, se produce una nueva aproximación.

Los procedimientos modernos de diseño óptimo toman la forma de programas de computadora. Aquí se describirá la base general de su operación, y se referirá al lector a listados publicados. Estos programas también se pueden utilizar en línea mediante servicios de tiempo compartido.

Para simplificar, supóngase que la respuesta de frecuencia $H(e^{j\omega})$ es real pura y la respuesta de pulso $h(n)$ es simétrica alrededor de $n = 0$. (Este filtro no causal se hace fácilmente causal por medio de un simple desplazamiento cuando ha concluido el diseño.) Después $h(n)$ se define sobre una región $-M < n < M$, y $H(e^{j\omega})$ se puede describir en términos de funciones coseno:

$$H(e^{j\omega}) = h(0) \sum_{n=1}^M 2h(n)\cos(n\omega) \quad (32-54)$$

Sea el filtro equiindulante deseado como el de la figura 32-24. δ_1 es la tolerancia de la banda de paso, δ_2 la tolerancia de la banda de bloqueo, ω_p el final de la banda de paso y ω_s el inicio de la banda de bloqueo.

El procedimiento de diseño óptimo puede visualizarse ahora como el problema de determinar un conjunto de multiplicadores de $\cos(n\omega)$ que ajuste la suma

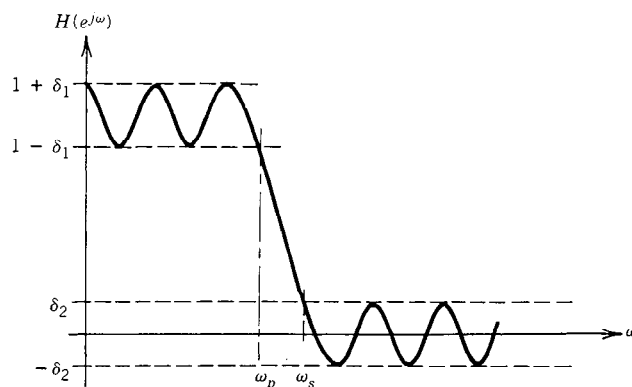


Fig. 32-24. Especificaciones de diseño óptimo de filtros de respuesta de pulso finita (FIR): δ_1 = ondulación de la banda de paso; δ_2 = ondulación de la banda de bloqueo; ω_p = final de la banda de paso; ω_s = inicio de la banda de bloqueo.

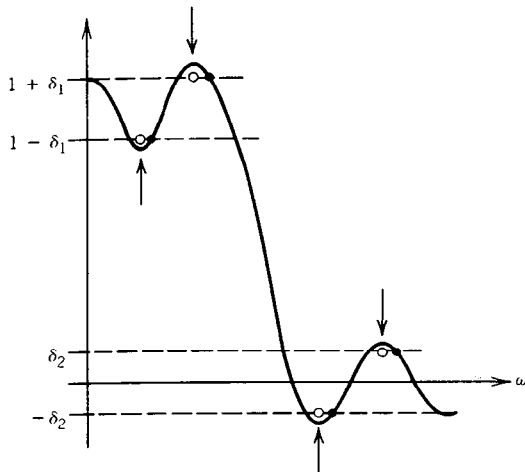


Fig. 32-25. Ubicaciones supuestas de errores máximos de respuesta de frecuencia en la primera y segunda iteraciones del diseño óptimo de filtros.

de la ecuación 32-54 a las tolerancias de la figura 32-24. Son soluciones a este problema las de Herrmann¹⁷, Herrmann y Schuessler¹⁸, Hofstetter y colaboradores¹⁹⁻²¹, Parks y McClellan^{22,23} y Rabiner^{24,25}. En todas estas soluciones se emplea el mismo método básico.

Se supone que los puntos de error máximo están equiespaciados en frecuencia, como se muestra en la figura 32-25. Entonces se calcula una respuesta de frecuencia que pase por estos puntos, como lo ilustra la curva de la figura 32-25.

En general, los errores máximos reales no ocurren en los puntos esperados. Sin embargo, el procedimiento óptimo es iterativo, y en cada nueva iteración las posiciones que se hallaron en la anterior se toman como las posiciones de error máximo. Así, por ejemplo, en el paso 1 los extremos reales se encontraron en las ubicaciones que indican las flechas; de este modo en el paso 2 los puntos de error máximo se desplazan hacia las flechas, como lo indican los círculos vacíos de la figura. Después, en el paso 2 se calcula una nueva respuesta de frecuencia que pase por los círculos vacíos. Luego se determinan los errores máximos reales de esta nueva respuesta y se ejecuta una nueva iteración. El proceso se repite hasta que no haya desplazamiento entre los errores esperados y los reales. A partir de la curva de respuesta final se obtienen los multiplicadores de la ecuación 32-54; éstos dan la respuesta de pulso requerida.

En las referencias bibliográficas 22, 23 y 26 se incluyen copias de un programa de computadora escrito por Parks y MacClellan.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

1. A. V. Oppenheim y R. W. Schaffer, *Digital Signal Processing*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ.
2. A. Peled y B. Liu, *Digital Signal Processing: Theory, Design, and Implementation*, Wiley, Nueva York.

3. L. R. Rabiner y B. Gold, *Theory and Application of Digital Signal Processing*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ.
4. B. Gold y C. M. Rader, *Digital Processing of Signals*, McGraw-Hill, Nueva York.
5. E. P. F. Kan y J. K. Aggarwal, "Error Analysis of Digital Filters Employing Floating-Point Arithmetic", *IEEE Trans. Circ. Theory* **CT-18**(11):678-681.
6. B. Liu y T. Kaneko, "Error Analysis of Digital Filters Realized with Floating-Point Arithmetic", *Proc. IEEE* **57**:1735-47.
7. L. Jackson, "An Analysis of Limit Cycles due to Multiplication Rounding in Recursive Digital Filters", en *Proc. 7th Allerton Conf. Circ. Sys. Theory*, pp. 69-78.
8. J. F. Kaiser, "Some Practical Considerations in the Realization of Linear Digital Filters", *Proc. 3rd Allerton Conf. Circ. Sys. Theory*, pp. 621-623.
9. A. Papoulis, *The Fourier Integral and its Applications*, McGraw-Hill, Nueva York.
10. K. Steiglitz, "Computer-Aided Design of Recursive Digital Filters", *IEEE Trans. Audio Electroacous.* **AU-18**(2):123-129.
11. "System/360 Scientific Subroutine Package, Version III, Programmer's Manual", IBM Data Processing Div., White Plains, NY, Documento H20-0205-3, pp. 221-225.
12. A. G. Deczky, "Synthesis of Recursive Digital Filters Using the Minimum p -Error Criterion", *IEEE Trans. Audio Electroacous.* **AU-20**(4):257-263.
13. P. Thajchayapong y P. J. W. Rayner, "Recursive Digital Filter Design by Linear Programming", *IEEE Trans. Audio Electroacous.* **AU-21**(2):107-112.
14. L. R. Rabiner y colaboradores, "Linear Programming Design of IIR Digital Filters with Arbitrary Magnitude Function", *IEEE Trans. Acous., Speech, Sig. Proc.* **ASSP-22**(2):117-123.
15. F. J. Harris, "On the Use of Windows for Harmonic Analysis with the Discrete Fourier Transform", *Proc. IEEE* **66**(1):51-83.
16. L. R. Rabiner y colaboradores, "An Approach to the Approximation Problem for Nonrecursive Digital Filters", *IEEE Tans. Audio Electroacous.* **AU-18**(2):83-106.
17. O. Herrmann, "On the Design of Nonrecursive Digital Filters with Linear Phase", *Elec. Lett.* **6**(11):328-329.
18. O. Herrmann y H. W. Schuessler, "Design of Nonrecursive Digital Filters with Minimum Phase", *Elec. Lett.* **6**(11):329-330.
19. E. Hofstetter y colaboradores, "A New Technique for the Design of Nonrecursive Digital Filters", *Proc. 5th Ann. Princeton conf. Inform. Sci. Sys.*, pp. 64-72.
20. E. Hofstetter y colaboradores, "On Optimum Nonrecursive Digital Filters", *Proc. 9th Allerton Conf. Circ. Sys. Theory*, pp. 789-798.

21. J. Siegel, *Design of Nonrecursive Approximations to Digital Filters*, PhD Thesis, MIT.
22. T. W. Parks y J. H. McClellan, "Chebyshev Approximation for Recursive Digital Filters with Linear Phase", *IEEE Trans. Circ. Theory* **CT-19**(3):189-194.
23. T. W. Parks y J. H. McClellan, "A Program for the Design of Linear Phase Finite Impulse Response Filters", *IEEE Trans. Audio Electroacous.* **AU-20**(3):195-199.
24. L. R. Rabiner, "The Design of Finite Impulse Response Digital Filters Using Linear Programming Techniques", *Bell Sys. Tech. J.* **51**:1177-1198.
25. L. R. Rabiner, "Linear Program Design of Finite Impulse Response (FIR) Digital Filters", *IEEE Trans. Audio Electroacous.* **AU-20**(4):280-288.
26. IEEE Acoustics, Speech and Signal Processing Society, Digital Signal Processing Committee, eds., *Programs for Digital Signal Processing*, IEEE Press, Piscataway, NJ.

SÉPTIMA PARTE

**Ingeniería de sistemas, control
automático y mediciones**

CAPÍTULO 33

Ingeniería de sistemas

Richard G. Costello

The Cooper Union for Advancement
of Science and Art
Nueva York

- 33.1 Definición de sistema**
- 33.2 Clasificación de sistemas por función**
- 33.3 Sistemas de control**
- 33.4 Sistemas de cálculo**
- 33.5 Sistemas de comunicación**
- 33.6 Sistemas administrativos**
 - 33.6.1 PERT (técnica de evaluación y revisión de programas)
 - 33.6.2 CPM (método de la ruta crítica)
 - 33.6.3 Modelos económicos
 - 33.6.4 Programación lineal y asignación de recursos
- 33.7 Sistemas de control con operador humano**
 - 33.7.1 Función de transferencia lineal
 - 33.7.2 Función descriptora cuasilineal
 - 33.7.3 Modelo lineal simplificado
 - 33.7.4 Modelo de datos muestreados
 - 33.7.5 Modelo no lineal
 - 33.7.6 Modelo adaptativo
 - 33.7.7 Modelo de modo dual
 - 33.7.8 Modelo de control óptimo
 - 33.7.9 Restricciones de diseño
 - 33.7.10 Restricciones del operador humano
 - 33.7.11 Ventajas del operador humano
- 33.8 Clasificación de sistemas por modelo matemático**
 - 33.8.1 Sistemas lineales
 - 33.8.2 Sistemas no lineales
 - 33.8.3 Sistemas continuos
 - 33.8.4 Sistemas discretos
 - 33.8.5 Sistemas de una sola entrada y una sola salida
 - 33.8.6 Sistemas de entradas y salidas múltiples
 - 33.8.7 Sistemas determinísticos
 - 33.8.8 Sistemas estocásticos
 - 33.8.9 Sistemas óptimos
 - 33.8.10 Sistemas adaptativos
- 33.9 Resumen del proceso de diseño de sistemas**

33.1 DEFINICIÓN DE SISTEMA

Definir el término "sistema" no es una tarea simple, porque esa palabra ha invadido la sociedad tecnológica actual y se emplea en muchas áreas diferentes con muchos significados distintos. En la página 2 562 del *Webster's New International Dictionary* (2.^a ed. no abreviada) se hallan 15 definiciones de la palabra "sistema". Sin considerar los sistemas legales, el sistema decimal de Dewey, el sistema de trenes AMTRACK y los sistemas orgánicos de los seres vivos, queda un gran conjunto de definiciones de sistema que tienen una aplicación directa en la ingeniería. Tres de las más pertinentes son:

Agregado o montaje de objetos unidos por alguna forma de interacción o interdependencia regular; grupo de unidades diversas combinadas por la naturaleza o por el hombre para formar un todo, y para funcionar, operar o moverse al unísono y, con frecuencia, obedeciendo a alguna forma de control...

Conjunto de ideas organizadas o dispuestas en forma metódica; presentación completa de principios o hechos esenciales, dispuestos en una dependencia o conexión racional...

Esquema o método formales que rigen la organización, disposición, etcétera, de objetos o material, o un modo de procedimiento; plan definido o establecido de ordenamiento, operación o procedimiento...

En sentido general éstas son unas definiciones válidas, pero carecen de ciertas especificaciones que suelen aplicarse a todos los sistemas de ingeniería, científicos o técnicos. Algunas de estas especificaciones importantes son:

1. Un sistema debe poder describirse, de lo contrario no es un sistema (cuando menos en sentido ingenieril, científico o técnico). La descripción suele contener aproximaciones con datos probabilísticos o estocásticos, de manera que los parámetros o valores pueden cambiar o ser variables aleatorias, o incluso pueden ser inobservables.
2. Un sistema debe producir una salida, ejecutar una acción o llegar a un objetivo. La mayor parte de los sistemas requieren asimismo una entrada. Los sistemas de control, de computación (cálculo), económicos y administrativos tienen entradas y salidas.
3. Un sistema debe gobernarse por reglas de operación cuya meta sea minimizar o maximizar alguna función de las entradas y salidas. Los sistemas de control suelen diseñarse para minimizar errores; los sistemas administrativos, para maximizar ganancias, etc. La teoría de la optimización trata sobre la búsqueda de la mejor regla o control para producir la minimización o maximización deseadas del sistema en particular que se optimiza.

Con estos antecedentes, en el presente capítulo se utilizan y citan las definiciones de ingeniería de sistemas que se encuentran en Shinnars¹, como la definición generalmente aceptada por el ingeniero de sistemas:

Un sistema grande y complejo que consta de sistemas de control, computación y comunicaciones, que funcionan de manera altamente integrada e interdependiente para lograr una armonía total en el rendimiento, confiabilidad, programación, costo, mantenimiento, consumo de energía, peso y expectativas de vida de alto nivel, se conoce como el problema de la ingeniería de sistemas.

Otras definiciones de un sistema con sesgo tanto matemático como intuitivo pueden encontrarse en Klir², en especial en las secciones 1.3 y 1.2. Glorioso y Osorio³ hacen una amplia selección de material básico sobre sistemas prácticos, técnicos y matemáticos.

33.2 CLASIFICACIÓN DE SISTEMAS POR FUNCIÓN

Los siguientes tipos de sistemas son diseñados, modificados, utilizados o aplicados por el ingeniero eléctrico:

1. **Sistemas de control.** Servomecanismos; robots; reguladores de presión, temperatura, velocidad, etcétera; controladores de procesos, controladores numéricos de máquinas herramienta, controladores de plantas de manufactura.
2. **Sistemas de computación.** Sistemas de control digital directo; diseño de arquitectura y lógica de sistemas; programas de sistemas; sistemas de multiprocesamiento; sistemas de tiempo compartido; redes de sistemas; sistemas de control o instrumentos de microcomputadoras especializadas.
3. **Sistemas de comunicación.** Sistemas analógicos de radio, televisión y telefónicos; sistemas de relevadores por satélite; sistemas de navegación; sistemas de conmutación de redes y paquetes; sistemas digitales de comunicación; sistemas de codificación y corrección de errores; sistemas de cifrado (en clave) y descifrado; sistemas de modulación y demodulación; sistemas de procesamiento y acondicionamiento de señales.
4. **Sistemas administrativos.** CPM (*critical path method*, método de la ruta crítica) y PERT (*program evaluation and review technique*, técnica de evaluación y revisión de programas); métodos de maximización por programación lineal y dinámica; algoritmo simplex para maximización sujeta a restricciones; sistemas de modelado en economía.
5. **Sistemas con operador humano.** Sistemas de interfaz humano-máquina, sistemas de control vehicular; sistemas de bioingeniería; sistemas de diagnóstico médico; miembros y órganos artificiales; sistemas de control electromiográfico; sistemas automatizados de atención de pacientes.

6. **Sistemas de radar.** Doppler de pulsos; radar de la policía; sistemas de control del tráfico aéreo; sistemas de altímetro por radar; sistemas de mapeo por radar de vista lateral; sistemas de navegación por radar de barcos y puertos; sistemas de radar de localización en el aire.
7. **Sistemas de navegación y guía (dirección)*.** LO-RAN (*long range aid to navigation*, auxiliar de la navegación de largo alcance); DME (*distance-measuring equipment*, equipo telemétrico), para la dirección de aeronaves; SONAR (*sound navigation and ranging*, navegación y alcance por ondas sonoras), para navegar bajo la superficie; VOR (*visual omni range*, radiofaro omnidireccional de onda métrica), para la dirección de aeronaves; indicadores de la inclinación de planeo para aterrizaje de aeronaves; sistemas de navegación por satélite para submarinos, aeronaves, misiles y vehículos aeroespaciales; sensor solar y sensor canope (de la estrella Canope) para naves de exploración planetaria y satélites; sistemas de dirección por microondas.

33.3 SISTEMAS DE CONTROL

A continuación se definen algunos de los términos que se utilizan en los sistemas de control.

Planta. Dispositivo físico controlado por un sistema de control. Puede ser un dispositivo individual, como un motor, o una colección de dispositivos, como el motor, engranes, cables y pesos que conforman una planta elevadora. En el sentido más amplio una planta puede ser un proceso químico, una generadora de energía o una nave espacial. En el capítulo 34, sección 34.4, se analizan sistemas que contienen diversos tipos de plantas.

Sistema de control por retroalimentación. Este sistema contiene un ciclo de retroalimentación que devuelve la señal de salida a la entrada de referencia y compara estas dos señales para obtener la diferencia o error entre la entrada y la salida. El sistema de control por retroalimentación minimiza el error, lo cual permite relacionar la salida del sistema con la entrada de referencia del sistema o que aquella sea controlada por ésta. Los sistemas de control por retroalimentación se analizan en el capítulo 34, secciones 34.3 a 34.9.

Servomecanismo o servo. Es un sistema de control por retroalimentación con una salida mecánica, tal como la posición, ángulo, velocidad o aceleración. El mecanismo de dirección hidráulica de un vehículo es un servomecanismo, y un robot soldador contiene muchos servomecanismos (uno para cada grado de libertad de movimiento). La teoría de los servomecanismos se analiza en el capítulo 34, secciones 34.3 a 34.9, y el hardware del servo se estudia en el capítulo 36.

*La navegación y la guía (dirección) se estudian en los capítulos 50 a 54.

Regulador o regulador automático. Es un sistema de control por retroalimentación con una entrada de referencia constante o casi constante. La tarea del regulador consiste en mantener la salida constante, en respuesta a perturbaciones desconocidas del sistema. Un sistema de calefacción doméstico con un controlador termostático es un ejemplo de sistema de regulación de temperatura. La teoría de los reguladores se estudia en el capítulo 34, secciones 34.3 y 34.4.

Sistema de control de procesos. Es un sistema de regulación automática en el que la salida regulada es una variable del proceso tal como el gasto, pH, densidad, temperatura o presión. El control de procesos se utiliza ampliamente en la industria, en particular en las industrias química y de procesamiento de alimentos. Uno de los algoritmos de control más usados en la industria de procesos es el controlador PID (posición, integral, derivada). El control de procesos industriales se expone en el capítulo 35.

33.4 SISTEMAS DE CÁLCULO

Los sistemas de computación (cálculo) se estudian en los capítulos 55 a 65. Las mediciones digitales de las variables del sistema de control se exponen en el capítulo 37, y en el capítulo 38 se analizan las simulaciones por computadora.

Los sistemas de computación y de control se interrelacionan cada vez más, de manera que resulta difícil juzgar la separación entre ambos. En el capítulo 35 se exponen el control de automóviles y las aplicaciones de las computadoras en este ámbito.

Las computadoras también se están convirtiendo en la parte más importante de muchos sistemas de comunicación. Las computadoras de conmutación de mensajes son dispositivos tanto de computación como de comunicaciones, y no se pueden separar en uno u otro.

33.5 SISTEMAS DE COMUNICACIÓN

Como se dijo en la sección 33.4, los sistemas de comunicación se vinculan cada vez más con los sistemas de computación. Esto es especialmente cierto en áreas tales como la conmutación de paquetes, conmutación de mensajes y multicanalización en los dominios de tiempo y frecuencia (TDM y FDM), así como en diversas áreas de codificación destinadas a corregir errores o proteger la seguridad de un enlace de comunicación por medio de diversos algoritmos de cifrado y descifrado en clave.

Los sistemas de comunicación se analizan en los capítulos 47 a 49.

Los sistemas de control y servomecanismos también se entrelazan con sistemas de comunicación por satélite (cap. 49), debido a que la posición u orientación de los satélites en el espacio se debe controlar en forma precisa, a fin de que las antenas apunten a las áreas de recepción indicadas en la Tierra. Para comunicaciones

en el espacio lejano, la antena de recepción en la Tierra (p. ej., la antena parabólica Goldstone de California) debe estar dirigida hacia la nave espacial y seguirla. Los sistemas de control se analizan en el capítulo 34.

33.6 SISTEMAS ADMINISTRATIVOS

El objetivo principal de un sistema administrativo es suministrar información y predecir posibles dificultades, así como aportar posibles soluciones a los niveles administrativos adecuados⁴. Un sistema administrativo consta de los siguientes elementos:

- Un plan sistemático.
- Un método de recolección de datos.
- Un método para efectuar estimaciones de costos razonables, tiempo necesario para realizar sub tareas y división de recursos o esfuerzo de trabajo.
- Un método de procesamiento y presentación al nivel administrativo adecuado de toda la información obtenida.

Un sistema administrativo puede ser sólo software, en el que se realiza el procesamiento de datos necesario y los informes se escriben a mano. Aunque los informes escritos a mano aportan valiosa información a la administración, no son lo que suele entenderse por un sistema administrativo. Típicamente, un sistema administrativo moderno, como un MIS (sistema de información administrativa), proporciona información que varía cada semana, todos los días o hasta cada hora. Para informar estos cambios rápidos se aplica un algoritmo de procesamiento de datos sistemático a cantidades potencialmente grandes de datos variables empleando un sistema de computadora o de computación digital.

Algunos sistemas administrativos meramente condensan datos que se obtienen de muchas fuentes remotas (p. ej., oficinas o almacenes de ventas) y generan informes al minuto que contienen gráficas o presentaciones de tendencias de ventas, ganancias, pérdidas, inventarios, cuentas por cobrar y otros indicadores comerciales pertinentes. Un sistema mayor divide esta información en segmentos o secciones que se relacionan en forma natural con la empresa que se administra. En un sistema aún mayor se busca correlacionar en forma cruzada un parámetro administrativo con otro mediante un análisis de regresión múltiple con los conjuntos de datos disponibles. Así, un gerente podría desear ver los coeficientes de relación o correlación que existen entre las ganancias del último trimestre y el número de unidades producidas o los gastos generales. Un MIS de esta naturaleza consta de una computadora digital, diversas estaciones de entrada de datos y estaciones de visualización de salida, y un conjunto de programas de computadora y paquetes estadísticos hechos sobre pedido.

Aquí se considerarán cuatro importantes herramientas administrativas de sistemas: PERT, CPM, modelos económicos y programación lineal.

33.6.1 PERT (técnica de evaluación y revisión de programas)

Una clase totalmente diferente de sistemas administrativos proporciona algo más que la información digerida hasta la fecha. Esta clase de sistema ayuda a la administración a programar tareas sucesivas o interrelacionadas desordenadamente largas o complicadas. El método mejor conocido de este tipo es la PERT, o bien el CPM (de *critical path method*, método de la ruta [camino] crítica), en esencia similar.

PERT son las siglas de *program evaluation and review technique* (técnica de evaluación y revisión de programas), creada en 1958 por la Marina de Estados Unidos para manejar el sistema de misiles del submarino Polaris (sistema de misiles balísticos de la flota). La PERT encuentra la crítica o cuello de botella que retrasa la terminación de un proyecto complejo. CPM es un proceso esencialmente similar. La diferencia entre PERT y CPM se analiza más adelante.

El concepto de ruta crítica se entiende mejor observando un diagrama PERT, como el de la figura 33-1. En la figura 33-2 se ilustra la nomenclatura de la figura 33-1.

El diagrama PERT es similar a un diagrama de flujo de señales (que se estudia en la sección 34.3). Las ramificaciones o flechas indican la cantidad de tiempo de trabajo o actividad que se requiere para pasar de un suceso encerrado en un círculo al siguiente. Todos los sucesos deben completarse, y todas las trayectorias deben seguirse. Cada flecha conectora o actividad se rotula con cuatro valores de tiempo, como se muestra en la figura 33-2. Todos los tiempos deben medirse en las mismas unidades, ya sean días, semanas o meses. Estos tiempos se estiman al realizar un análisis PERT. La exactitud de las estimaciones de tiempo influye directamente en la exactitud del diagrama PERT y las conclusiones que se obtienen de éste. Además, la exactitud es influida por el grado en que se aplica la suposición de una distribución beta con desviación estándar $\sigma = (t_3 - t_1)/6$ a las estimaciones de tiempo reales.

Una vez construido el diagrama PERT, se examina cada posible trayectoria de conexión de principio a fin del proyecto, y se suma el tiempo total de cada trayectoria. La trayectoria con el tiempo más largo se conoce como ruta crítica. Dado que todas las trayectorias se deben cubrir para ejecutar todos los sucesos, sólo se depura la del tiempo más largo. El método de depuración es simple. Los trabajadores o recursos de una actividad que no forma parte de la ruta crítica y que se concluye antes de ésta sobran o están inactivos, y se pueden desplazar a alguna parte de la ruta crítica para acelerar su terminación.

Considérese el segmento muy simplificado de un diagrama PERT que se muestra en la figura 33-3. La ruta crítica requiere un tiempo estadísticamente estimado de $4 + 7 = 11$ semanas, mientras que la ruta no crítica paralela sólo requiere $2 + 3 = 5$ semanas. El tiempo de inactividad en la ruta no crítica es por tanto de seis semanas ($11 - 5$ semanas). La asignación de personal y recursos de la trayectoria no crítica a la ruta crítica hace posible ahorrar hasta seis semanas. En la

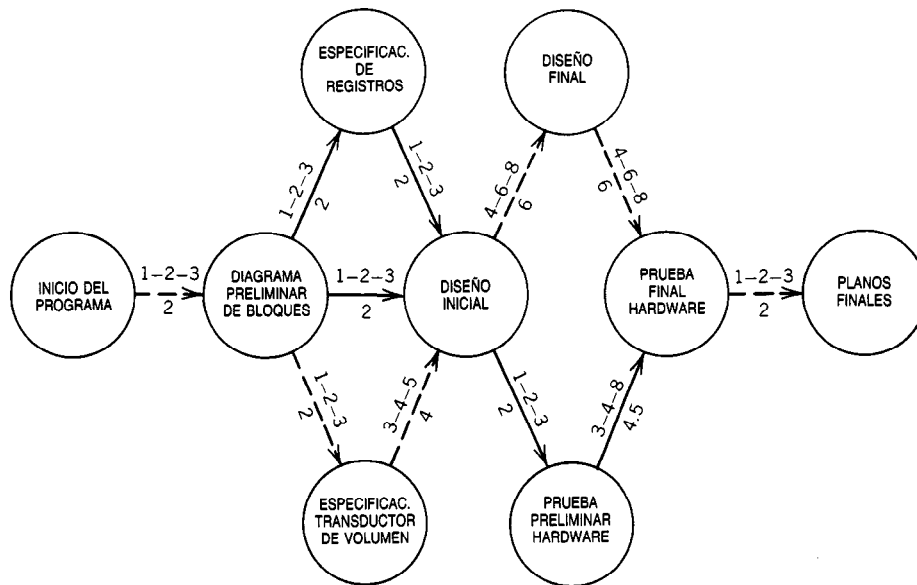


Fig. 33-1. Diagrama PERT (técnica de evaluación y revisión de programas) para el diseño de un respirómetro Warburg de registro automático. Línea discontinua = ruta (camino) crítica = tiempo más largo para realizar todas las tareas necesarias; línea continua = ruta no crítica. Notación: $(1 - 2 - 3)/2$, $(4 - 6 - 8)/6$, etc. = $(t_1 - t_2 - t_3)/t_e$; $t_e = (t_1 + 4t_2 + t_3)/6$. Véanse en la figura 33-2 las definiciones de los factores t .

realidad, es factible que el ahorro sea menor, ya que se pueden necesitar diferentes técnicas especiales y recursos especializados en las dos trayectorias. Sin embargo, si los tiempos se miden en meses o años en vez de en semanas, es viable contratar o capacitar nuevo personal y adquirir equipo especializado.

33.6.2 CPM (método de la ruta crítica)

Aunque tanto la PERT como el CPM tienen el objetivo de encontrar la ruta crítica para completar un proyecto, CPM se diferenciò originalmente de PERT. En ambos métodos se encuentra y analiza la ruta crítica de una gráfica de flujo de sucesos de una actividad, como se muestra en la figura 33-1. En este aspecto son idénticos. La diferencia principal entre CPM y PERT es la estimación del tiempo.

El PERT asigna tres tiempos de actividad probabilísticos y calcula un tiempo esperado (denotado t_e) sobre la base de una distribución de probabilidad beta. CPM asigna un solo tiempo determinístico, que se supone se conoce con exactitud, sobre la base de la experiencia con proyectos similares (p. ej., la construcción de una casa o una carretera). Por tanto, CPM sólo utiliza un valor de tiempo para cada flecha de actividad, que es equivalente al tiempo esperado (t_e) del diagrama PERT.

En el CPM se supone que el tiempo para realizar una actividad cualquiera puede reducirse dedicando más personal, materiales y equipo a la tarea; es decir, incrementando el costo asociado con la actividad. El tiempo normal de la actividad tiene asociado un costo normal. En situaciones de urgencia, el tiempo puede

reducirse por medio de un esfuerzo "intensivo". El tiempo reducido se denomina tiempo intensivo, y el costo mayor asociado, costo intensivo. Por tanto, cuando se encuentra la ruta crítica a partir del diagrama PERT-CPM, CPM asigna una relación convenientemente "negociada" entre el tiempo y el costo a cada actividad, que en general es diferente para cada una. Con frecuencia esta relación es lineal, y el proceso de la programación lineal puede aplicarse a todo el conjunto de actividades a lo largo de la ruta crítica. De esta forma es posible encontrar el valor más conveniente de tiempo y costo para cada ramificación de actividad a fin de reducir el tiempo de terminación del proyecto en un número especificado de días. A menudo se emplea el CPM en el manejo de programas grandes (es decir, proyectos de construcción) en que los tiempos de actividades se pueden reducir linealmente asignando mayores costos a la actividad en for-

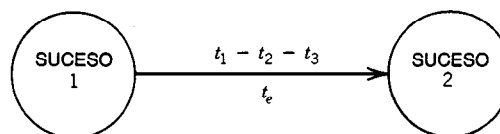


Fig. 33-2. Flecha de actividad, rotulada con tiempos de trabajo para diagramas PERT (técnica de evaluación y revisión de programas). t_1 = tiempo mínimo para realizar la actividad; t_2 = tiempo más probable para realizar la actividad; t_3 = tiempo máximo para realizar la actividad; t_e = tiempo esperado estadísticamente, con base en la distribución de probabilidad beta con desviación estándar de $1/6(t_3 - t_1)$. Shinnery⁵ demuestra que $t_e \cong (t_1 + 4t_2 + t_3)/6$.

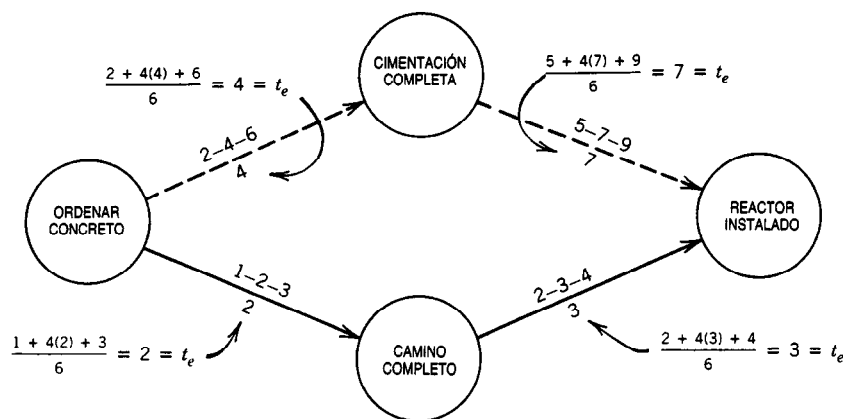


Fig. 33-3. Ejemplo del tiempo "inactivo" de un diagrama PERT (técnica de evaluación y revisión de programas). La asignación de personal y recursos de la ruta B (línea continua) a la A (línea discontinua) puede ahorrar seis semanas. La ruta A (ruta crítica) = $4 + 7 = 11$ semanas, que es el tiempo estadísticamente esperado t_e ; ruta B = $2 + 3 = 5$ semanas (t_e); tiempo "inactivo" = $11 - 5 = 6$ semanas.

ma de personal y equipo. Por otro lado, muchos proyectos o actividades no presentan este comportamiento lineal de la "negociación" de los valores más convenientes de tiempo y costo. Por ejemplo, los proyectos que implican investigación e invención son no lineales, y no se puede aplicar el CPM fácilmente a la estimación del plan del proyecto.

33.6.3 Modelos económicos

Un método que se aplica con relativa amplitud para producir modelos económicos implica la división de la entidad económica de interés en subentidades o unidades funcionales adecuadas con entradas y salidas. Luego, estas unidades funcionales económicas suelen representarse por medio de un diagrama de bloques, y la estabilidad o comportamiento del diagrama interconectado completo se analiza por medio de métodos estándares de la teoría del control (sec. 34.4), o bien se simulan mediante una computadora adecuada (cap. 38). Por ejemplo, en la figura 34-4 se muestra un modelo hipotético para la producción nacional de bienes y la influencia que recibe de los impuestos corporativos y al consumidor.

33.6.4 Programación lineal y asignación de recursos

La programación lineal es un método matemático para la administración de sistemas en el que se utilizan ecuaciones lineales a fin de expresar las relaciones de

ganancias y la distribución o asignación de recursos a través de ecuaciones de restricción. Se creó después de la Segunda Guerra Mundial y se aplicó en el puente aéreo de Berlín en 1948.

Por ejemplo, puede aplicarse para determinar cuántas camisas y pantalones debe producir un fabricante de ropa para maximizar las ganancias a partir de la cantidad limitada de tela, hilo y botones de que se dispone. Considérense los requisitos hipotéticos, que se presentan en la tabla del final de esta página, para la producción de camisas o pantalones, donde S es el número de camisas producidas y P el número de pantalones. S y P se denominan variables de decisión.

Supóngase que el fabricante sabe que la ganancia por cada camisa será de \$ 2.00 y por cada pantalón de \$ 4.00. La ganancia, o función objetivo, es entonces:

$$\text{Ganancia} = \text{función objetivo} = 2S + 4P \quad \$$$

Las ecuaciones de restricción se escriben como "igual a o menor que", debido a que no toda la cantidad de un recurso, como la tela, se puede utilizar si la producción total está limitada por una pequeña cantidad de otro recurso, como los botones.

Estas ecuaciones de restricción de la tela, el hilo y los botones pueden graficarse sobre un conjunto de ejes ortogonales asignados a los diversos productos finales por producir, que son, en este caso, el número de camisas S y el número de pantalones P . Las tres gráficas se presentan en la figura 33-5, junto con una cuar-

Recurso	Cantidad del recurso	Para una camisa	Para un pantalón	Ecuación de restricción
Tela	1 000 pies ²	5 pies ²	7 pies ²	$5S + 7P \leq 1\,000$
Hilo	2 000 yd	7 yd	15 yd	$7S + 15P \leq 2\,000$
Botones	1 000	10	2	$10S + 2P \leq 1\,000$

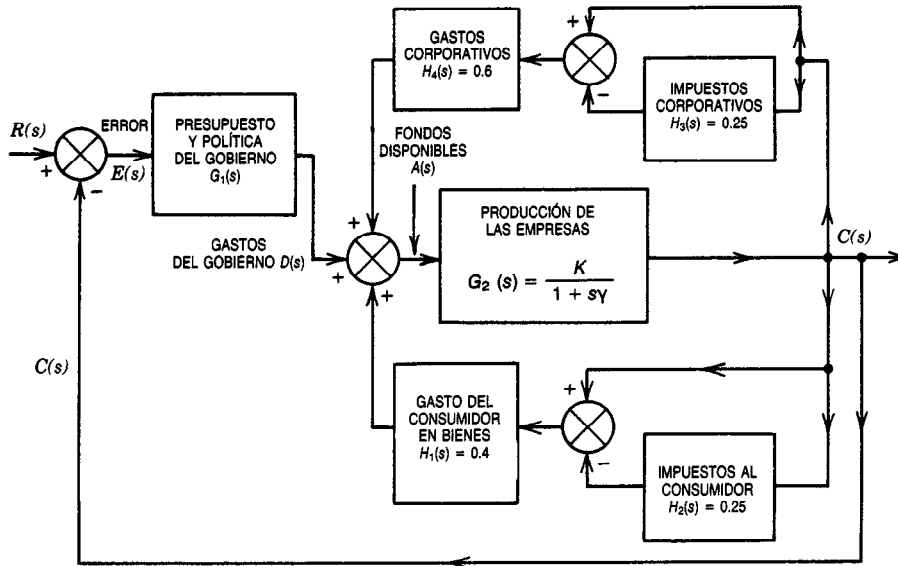


Fig. 33-4. Modelo de sistema administrativo económico: diagrama de bloques de la producción nacional de bienes. $R(s)$ = producción deseada de bienes, en dólares; $C(s)$ = producción nacional de bienes, en dólares. Las ganancias de retroalimentación $H_1(s)$, $H_2(s)$, $H_3(s)$ y $H_4(s)$, junto con la ganancia a futuro K y la constante de tiempo γ , se deben ajustar conforme a la política del gobierno $G_1(s)$ y las condiciones económicas reales.

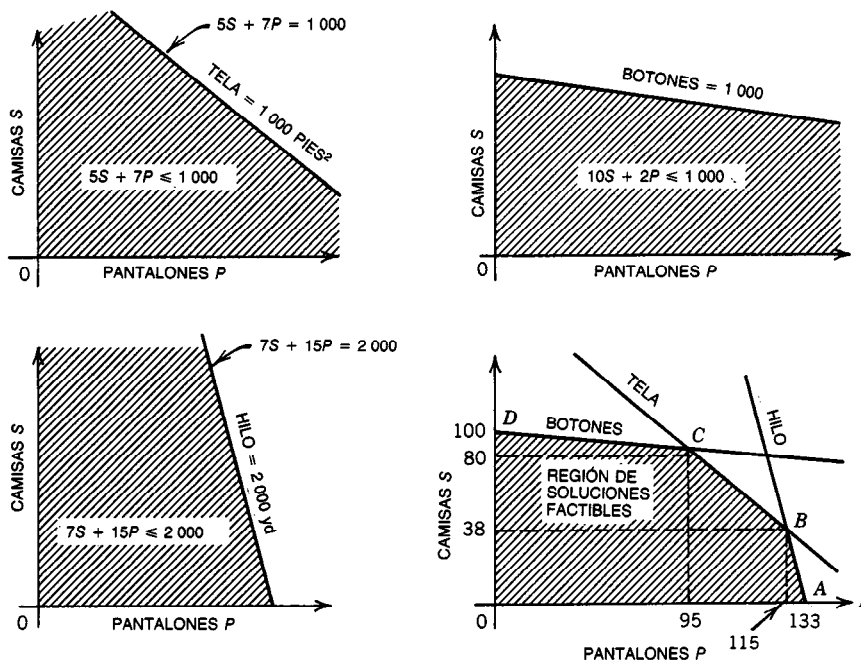


Fig. 33-5. Ejemplo de programación lineal de distribución de recursos. Ganancia o utilidad (función objetivo) $= 2S + 4P$. S y P son variables de decisión. La ganancia siempre será un máximo (o mínimo) a lo largo de la frontera y en uno de los vértices de la región de soluciones factibles, como consecuencia de las restricciones lineales y la región convexa resultante de soluciones posibles o factibles. Por tanto, las posibles soluciones ocurren en los vértices A , B , C o D . La superposición de las tres restricciones, con $S \geq 0$ y $P \geq 0$, produce una región convexa de soluciones factibles.

ta gráfica en la que se superponen las tres gráficas de restricción junto con la restricción extra de que el número de camisas o pantalones producidos no puede ser un número negativo. Las soluciones al problema de la asignación están todas dentro del área sombreada de la figura. Esta área sombreada se denomina región de factibilidad o región de soluciones factibles.

Cuando todas las restricciones se combinan en la cuarta gráfica, se produce una región cerrada convexa hacia fuera con vértices O, A, B, C, D . El teorema fundamental de la programación lineal establece que la ganancia, o función objetivo, se maximiza en uno de los vértices de restricción A, B, C o D . Es obvio que nada se maximiza en O , que corresponde a 0 camisas, 0 pantalones y, por tanto, 0 ganancia. Dado que la función de ganancia está dada por $2S + 4P$, la ganancia aumenta si S o P se incrementan. Por tanto, ningún número que esté en la región interior del polígono de restricción puede maximizar la ganancia, ya que S y P pueden incrementarse hasta alcanzar la línea de restricción limitante. En cualquier línea de restricción, S o P aumentan en alguna dirección de movimiento a lo largo de la línea. Por tanto, la ganancia aumenta (en circunstancias muy especiales podría mantenerse constante) en alguna dirección de movimiento a lo largo de la línea de restricción. Los incrementos del movimiento y la ganancia terminan en el mismo vértice. Así, la ganancia máxima (y mínima) ocurre en un vértice del polígono de restricción de la programación lineal.

En este caso hay cuatro vértices por probar, A, B, C y D , para alcanzar la máxima ganancia. Tabulando el número de camisas S , el número de pantalones P y la ganancia en cada vértice se obtienen los valores que se indican en la tabla del final de la página.

Los valores de S y P de la tabla se obtuvieron resolviendo los pares de ecuaciones que enlazan cada restricción. Por ejemplo, el punto B ocurre cuando la restricción de la tela ($5S + 7P \leq 1\,000$) interseca la restricción del hilo ($7S + 15P \leq 2\,000$). S y P en el punto B se obtienen resolviendo las ecuaciones simultáneas:

$$5S + 7P = 1\,000$$

$$7S + 15P = 2\,000$$

para las cuales $S = 38.46$ y $P = 115.38$ (valores truncados 38 y 115).

Dado que sólo las camisas y pantalones completos tienen valor en el mercado, las soluciones de S y P se truncan (no se redondean) a números enteros. Los va-

lores también se podrían leer de una gráfica exacta. Sin embargo, las gráficas de más de tres elementos o variables requieren más de tres dimensiones, de manera que estos problemas invariablemente se resuelven por métodos analíticos y no gráficos.

La tabulación de ganancias resultante indica que el punto C es la elección óptima para maximizar las ganancias. El punto C corresponde a la manufactura de 80 camisas y 95 pantalones.

En los problemas reales por lo general intervienen muchas más variables. Las ecuaciones simultáneas que definen los vértices pueden crecer de 2×2 a 100×100 . Cuando aumenta la dimensionalidad, la frontera de restricción se desplaza de un polígono plano convexo en dos dimensiones a un poliedro convexo en tres dimensiones con forma de gema y a una forma convexa abstracta de dimensiones múltiples. En 1947, Dantzig creó un método denominado algoritmo simplex. En éste se examinan los vértices en forma selectiva y siempre se avanza en la dirección del máximo incremento en la ganancia de un vértice a otro hasta que la ganancia ya no aumenta. En ese vértice se encuentra la máxima ganancia.

El algoritmo de Dantzig⁶ introduce las variables llamadas inactivas (sin relación con el tiempo inactivo del CPM). Estas variables se emplean para convertir las desigualdades, como $5S + 7P \leq 1\,000$, en igualdades, como $5S + 7P + X = 1\,000$. Sólo quedan dos variables de decisiones, S y P , y la variable inactiva X no incrementa la dimensionalidad del problema. En el mercado existen paquetes de computación basados en el algoritmo simplex, que pueden resolver problemas de programación lineal con miles de restricciones.

En la práctica, el algoritmo simplex se comporta como si estuviese polinomialmente acotado. Esto es, el número de iteraciones simplex tiende a aumentar como función lineal de las restricciones. A principios de la década de 1980 los matemáticos rusos Shor, Iudin y Nemirouski informaron sobre el algoritmo polinomialmente acotado⁷. El algoritmo comienza con un elipsoide grande centrado en el origen y no se supone linealidad. Después se construyen elipsoides cada vez más pequeños, cada uno de los cuales se sabe que contiene la solución deseada. Aunque se ha demostrado que este método es polinomialmente acotado, las pruebas realizadas muestran que su convergencia es comparable a la del método simplex para ciertas familias de problemas simples. Por tanto, aunque el método de programación ruso es superior en teoría, el algoritmo simplex sigue siendo el método de programación lineal de mayor uso.

Vértice	S	P	Ganancia ($2S+4P$) (\$)
A	0	133 (133.33)	532
B	38 (38.46)	115 (115.38)	536
C	80 (80.88)	95 (95.59)	540
D	50	0	100
Punto medio arbitrario	50	50	300

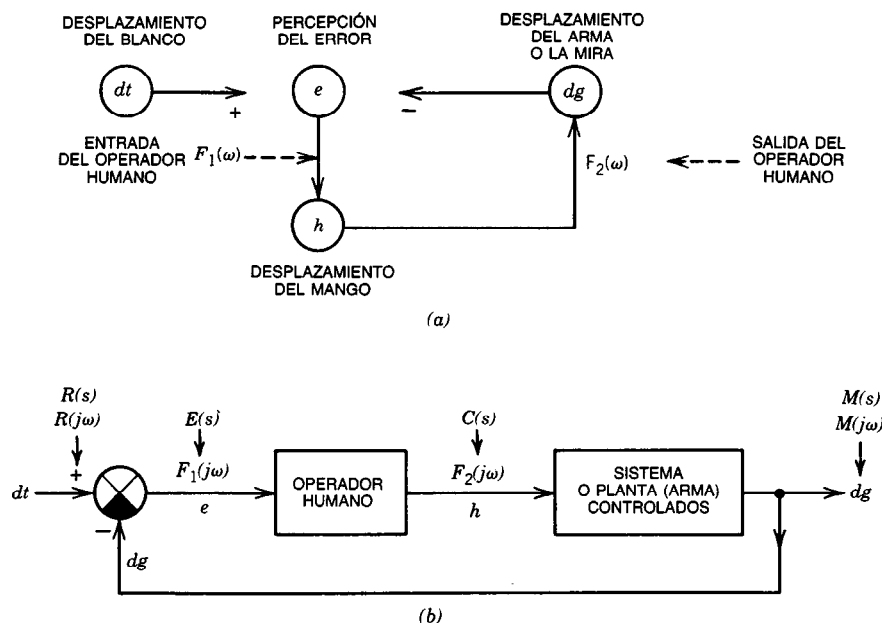


Fig. 33-6. Modelo de seguimiento compensatorio de Tustin⁸: a) forma original; b) diagrama de bloques equivalente, $dt = r(t)$ = entrada del sistema en el dominio del tiempo; $e = e(t)$ = error del sistema en el dominio del tiempo; $h = c(t)$ = salida del operador humano en el dominio del tiempo; $dg = m(t)$ = salida del sistema en el dominio del tiempo; $F_1(j\omega) = E(s)|_{s=j\omega}$ = entrada del operador humano en el dominio de la frecuencia; $F_2(j\omega) = C(s)|_{s=j\omega}$ = salida del operador humano en el dominio de la frecuencia; $M(j\omega) = M(s)|_{s=j\omega}$ = salida del sistema en el dominio de la frecuencia; $R(j\omega) = R(s)|_{s=j\omega}$ = entrada del sistema en el dominio de la frecuencia.

33.7 SISTEMAS DE CONTROL CON OPERADOR HUMANO

Los sistemas de control con operador humano constan de una planta controlada, un medio de visualización y un operario que realiza alguna operación con este último. Los ejemplos más comunes conciernen a vehículos guiados por personas. La planta controlada es, en este caso, el barco, avión, automóvil o nave espacial. El medio de visualización es un conjunto de instrumentos y pantallas de CRT (tubo de rayos catódicos). El operador u operario es la persona que está al timón, el piloto o el conductor del vehículo. Entre otros ejemplos de sistemas de control con operador humano se cuentan el seguimiento de un blanco en una pantalla de CRT o de PPI (indicador de la posición en el plano), la operación de un elevador, la puntería del cañón de un tanque y el control manual de parte o todo un sistema complejo grande en casos de emergencia.

El análisis formal de los sistemas de control con operador humano comenzó con el trabajo publicado por Tustin⁸ en 1947 sobre la puntería del cañón de un tanque. Tustin propuso diversos modelos lineales del operador humano, uno de los cuales se presenta en la figura 33-6. Él introdujo el término "remanente" para describir aquella parte de la salida del operador que no se relaciona en forma lineal con la entrada y, por tanto, no es producida por su modelo. La señal remanente o de ruido se muestra en las figuras 33-7 y 33-8.

La mayor área de interés en el modelado del operador humano es el control manual de vehículos aéreos o aeroespaciales pilotados. La atención se ha centrado en estos sistemas de control manual porque los vehículos implicados son los más difíciles de controlar, y los que tienen las menores constantes de tiempo y el menor tiempo de respuesta de cualquier vehículo tripulado. En el comienzo mismo del modelado del piloto, Tustin y sus colaboradores reconocieron que el operador humano es no lineal o, cuando mucho, cuasilineal; la generación de modelos del operador humano ha seguido los avances de la teoría del control no lineal. En la tabla 33-1 se presentan modelos de operadores humanos seleccionados y se describen brevemente. Aunque la mayor parte de estos modelos fueron propuestos para el control de aeronaves, son igualmente aplicables a otras tareas de control por operador humano, como la conducción de un automóvil, un barco o el control manual de una planta de energía nuclear.

33.7.1 Función de transferencia lineal

En la función de transferencia lineal de Tustin⁸, la señal de entrada es tres sinusoides, relativamente primos en frecuencia, que se suman para producir una entrada de aspecto aleatorio para evitar la predicción por un operador humano. Una función de transferencia lineal se ajusta al conjunto de datos de entrada y salida calculados en diversas frecuencias.

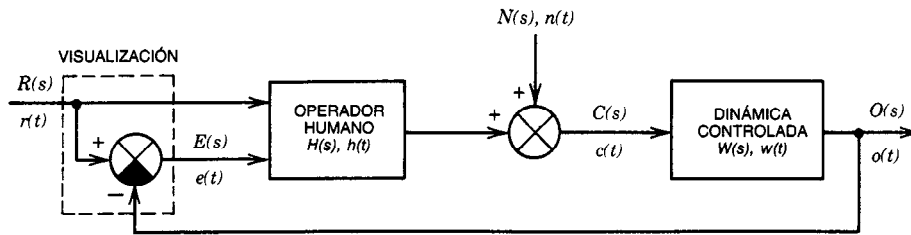


Fig. 33-7. Diagrama de bloques del sistema de persecución visual. $H(s)$ = aproximación lineal (función descriptora del operador humano); $N(s)$ = parte de la salida del operador humano que no está relacionada en forma lineal con la entrada (remanente o ruido); $W(s)$ = dinámica controlada, o planta; $R(s)$ = entrada del sistema; $E(s)$ = error del sistema; $C(s)$ = salida del operador humano; $O(s)$ = salida del sistema. Para convertir una función cualquiera del dominio de Laplace, tal como la $H(s)$, a una función del dominio de frecuencia, simplemente se sustituye de manera formal s por $j\omega$. Ejemplo:

$$H(s) = \frac{25e^{-0.1s}}{(s + 10)}$$

$$H(j\omega) = H(s)|_{s=j\omega} = \frac{25e^{-0.1j\omega}}{(j\omega + 10)}$$

$$\text{ganancia del ciclo} = H(s)W(s)|_{s=j\omega} = H(j\omega)W(j\omega)$$

33.7.2 Función descriptora cuasilineal

La función descriptora cuasilineal de McRuer y colaboradores⁹ es similar en concepto al modelo de Tustin, pero es, con mucho, más avanzada desde el punto de vista computacional. La función de transferencia del operador humano, expresada como una transformada de Fourier $H(j\omega)$, se obtiene como la razón de las transformadas de Fourier de dos correlaciones cruzadas, o:

$$H(j\omega) = \Phi_{rc}(j\omega)/\Phi_{re}(j\omega)$$

donde r = entrada del sistema
 c = salida del operador
 e = entrada del operador = error de sistema
 ω = frecuencia, rad/s

$$j = \sqrt{-1}, \Phi_{rc}(j\omega) = \Phi_{rc}(s)|_{s=j\omega}$$

$\Phi_{rc}(s)$ = transformada de Laplace de dos lados de $\phi_{rc}(\tau)$

$\Phi_{rc}(j\omega)$ = transformada de Fourier de $\phi_{rc}(\tau)$

$\phi_{rc}(\tau)$ = función correlación cruzada entre la entrada r y la salida c ²⁶

$$\phi_{rc}(\tau) = \lim_{Y \rightarrow \infty} \frac{1}{2Y} \int_{-Y}^Y r(t)c(t + \tau)dt$$

Uno entre los cientos de modelos de McRuer y Krendel es:

$$H(j\omega) = \frac{Ke^{-j\omega\tau}(1 + j\omega\gamma_L)}{(1 + j\omega\gamma_n)(1 + j\omega\gamma_I)}$$

donde $H(j\omega) = Y_p(j\omega)$ = función descriptora del operador o piloto humano

γ_I = constante de tiempo de retraso del operador humano = 10 s

γ_L = constante de tiempo de adelanto del operador humano = 0.5 s

γ_n = constante de tiempo de retraso neuromuscular = 0.2 s

τ = tiempo de reacción o tiempo de retardo = 0.15 s

K = constante de ganancia = 35

Todos estos parámetros, en particular K y γ_L , dependen de la tarea y pueden cambiar en forma importante. McRuer y Krendel formularon reglas de ajuste de todos los parámetros, según varíen la tarea o la planta. Su modelo básico se ilustra en la figura 33-8.

Simplificación importante. Si $r(t)$ es sinusoidal, entonces la función de transferencia del operador humano $H(j\omega)$ está dada por la siguiente fórmula:

Tabla 33-1. Modelos seleccionados con operador humano

Investigador	Fecha	Tipo del modelo
Tustin ⁸	1947	Función de transferencia lineal
McRuer y Krendel ⁹	1957-67	Función descriptora cuasilineal
Soliday y Schohan ⁴⁰	1964	Modelo lineal simplificado
Ward ³⁹	1958	Modelo de datos muestreados
Bekey ¹⁰	1962	Modelo de datos no muestreados
Goodyear Aircraft Co. ¹¹	1962	Modelo no lineal
Knoop y Fu ¹²	1964	Modelo adaptativo

donde γ_s = periodo de muestreo = 0.33 s, y γ_N = constante de tiempo de retraso neuromuscular.

El modelo de Bekey constaba de los dos elementos anteriores, una constante de ganancia en cascada con un interruptor de muestreo de pulsos, y retroalimentación negativa unitaria. El modelo de datos muestreados de Bekey se muestra en la figura 33-9.

33.7.5 Modelo no lineal

El modelo no lineal de la Goodyear Aircraft Company¹¹ se creó en la era de las computadoras analógicas gigantes. Fue un modelo evolutivo de ensayo y error que produjo resultados tan provechosos que un piloto de prueba no podía informar de inmediato cuando su salida se conmutaba con la salida del modelo¹¹.

El modelo Goodyear se ilustra en la figura 33-10. Contiene factores psicológicos bien conocidos, como umbral de percepción, tiempo de reacción, estimación de aceleración y velocidad, y anticipación.

33.7.6 Modelo adaptativo

Una de las facultades más prácticas del operador humano es la capacidad de modificar la forma de su respuesta conforme a variaciones en el sistema que se controla. Los modelos lineales de McRuer y Krendel, por ejemplo, cambian de estructura para diferentes tipos de elementos controlados, como se muestra en la tabla de la parte inferior. (Los valores numéricos típicos que se dan pueden cambiar fácilmente en un factor de dos o más con diferentes operadores.)

El modelo adaptativo de Knoop y Fu¹² es del tipo de acoplamiento, que contiene un modelo de planta, como se muestra en la figura 33-11. El modelo de planta se ajusta para que corresponda al elemento controlado, según varíen los parámetros del elemento controlado.

33.7.7 Modelo de modo dual

Todos los modelos anteriores tienen la finalidad principal de manejar señales de entrada que son ruido aleatorio filtrado o sinusoides sumados de diferentes frecuencias. No predicen con exactitud la respuesta de un operador a señales discontinuas por tramos (como

una ráfaga de viento repentina). Aunque algunos de los modelos anteriores se pueden ajustar para producir respuestas en tramos razonables, no producen respuestas de seguimiento continuo razonables. El modelo de modo dual de Costello¹³ contiene un modelo linealizado de coeficientes constantes del tipo que popularizaron McRuer y Krendel, y un modelo controlador de segundo orden óptimo, del tipo de frontera de conmutación de máximo esfuerzo.

Las ecuaciones que describen el modelo dual se expresan en el dominio del tiempo con variables de estado, en lugar de expresarse en el dominio de la frecuencia con variables de frecuencia. Cuando los valores absolutos del error del sistema y de la primera derivada del error son menores que ciertas cotas, se emplea el modelo final de coeficientes constantes. Cuando los valores absolutos exceden estas cotas, se utiliza el modelo controlador de segundo orden óptimo. Estas cotas son especificadas por una frontera de conmutación de modelos que se construye en el plano de fase $[e(t), \dot{e}(t)]$, como se muestra en la figura 33-12, junto con el modelo de modo dual completo.

33.7.8 Modelo de control óptimo

El modelo de control óptimo de Kleinman¹⁴ es un modelo adaptativo que ajusta algunos de sus parámetros de manera que la salida del modelo sea óptima en algún sentido. El sentido óptimo se elige como una suma ponderada cuadrática media mínima de estados del sistema y señales de control. Esto puede interpretarse como minimizar el error cuadrático medio y el esfuerzo de control cuadrático medio, donde ambos objetivos son deseables. La forma matemática cuadrática media se elige porque es susceptible de solución de forma cerrada. El modelo de Kleinman es continuo y estocástico y contiene retardo de tiempo, un retraso de primer orden atribuible a la dinámica neuromuscular; también contiene entradas de ruido o remanentes.

El modelo del piloto de control óptimo que se muestra en la figura 33-13 se desarrolló en un trabajo patrocinado por Wright-Patterson¹⁵. La dinámica del vehículo o planta es descrita por una ecuación de estado lineal invariante en el tiempo:

$$[\dot{X}] = [A][X] + [b]u + [w]$$

Función de transferencia del elemento o planta controlados	Características constantes, retardo $e^{-s\tau}$ y retraso neuromuscular $(1 + s\gamma_N)$	Características adaptativas del operador humano	Descripción verbal de la característica adaptativa
Constante	$\frac{Ke^{-0.15s}}{(1 + 0.2s)}$	$\times \frac{(1 + s)}{(1 + 10s)}$	Retraso-adelanto más ganancia variable K
Primer orden C_1/s	$\frac{Ke^{-0.15s}}{(1 + 0.2s)}$	$\times \frac{1}{1}$	Ganancia variable pura K
Segundo orden C_1/s^2	$\frac{ke^{-0.15s}}{(1 + 0.2s)}$	$\times \frac{(1 + 10s)}{(1 + s)}$	Retraso-adelanto más ganancia variable K

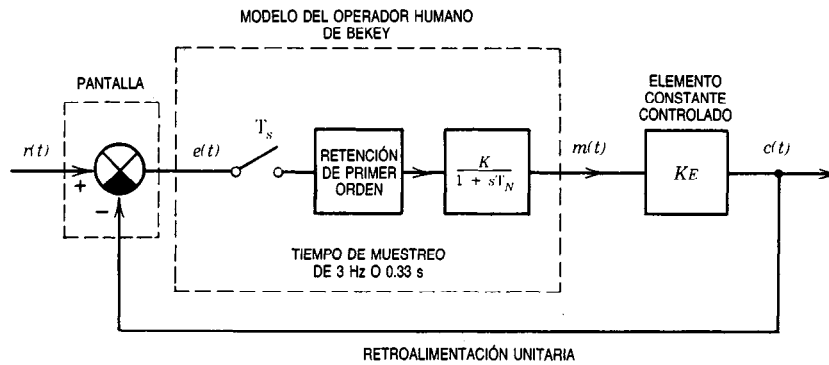


Fig. 33-9. Modelo de datos muestreados de Bekey¹⁰ para el seguimiento compensatorio del operador humano, con dinámica constante. γ_s = período de muestreo, muestreo de pulsos en 3 Hz, o $\gamma_s = 0.33$ s; $r(t)$ = entrada al sistema estacionaria de aspecto aleatorio; $e(t)$ = error del sistema; K = constante de ganancia del operador humano; γ_N = constante de tiempo de retraso neuromuscular; $m(t)$ = salida del operador humano; $c(t)$ = salida del sistema; K_E = función de transferencia de elementos controlados; retención de primer orden = $[(1 - e^{-s\gamma_s})/s]^2(1 + s\gamma_s)/\gamma_s$.

donde $[X]$ = vector de estado del vehículo

u = salida del operador o piloto humano (entrada de control)

$[w]$ = entrada de ruido blanco al sistema

$[A]$ = matriz cuadrada de variables de estado homogénea con coeficientes constantes

$[b]$ = arreglo de funciones de entrada con coeficientes constantes (vector)

Los autores suponen que el operador puede estimar las velocidades de los cambios de estado si se visualizan un estado o una combinación lineal de estados. Entonces postulan el siguiente índice de rendimiento cuadrático, que el operador minimiza a fin de realizar la tarea de control en forma óptima:

$$J(\mu) = \sum_{i=1}^n q_i \bar{\sigma}_{x_i}^2 + R \bar{\sigma}_u^2 + G \bar{\sigma}_u^2$$

donde $J(\mu)$ = función de costo por minimizar

μ = salida del piloto = entrada de control
 $\dot{\mu}$ = derivada respecto al tiempo o velocidad de μ

X_i = variable de estado del vehículo, n de ellas

q_i, R, G = coeficientes de ponderación
 $\bar{\sigma}_{x_i}^2$ = varianza promediada de variables de estado

$\bar{\sigma}_u^2$ = varianza promediada de variables de control

$\bar{\sigma}_u^2$ = varianza promediada de variables de velocidad de control

Aquí \bar{X} = media de $X = \lim_{T \rightarrow \infty} 1/T \int_0^T X(t) dt$ = promedio en el tiempo

σ^2 = varianza = $(X - \bar{X})^2 = \lim_{T \rightarrow \infty} 1/T \int_0^T (X(t) - \bar{X})^2 dt$

σ = desviación estándar = $\sqrt{\text{varianza}}$

El operador elige una entrada de control en base a la observación de las pantallas, de manera que se minimice alguna suma ponderada del estado promediado y la varianza de control.

33.7.9 Restricciones de diseño

Ciertos parámetros o restricciones de diseño se encuentran en la base de todos estos modelos. La restricción fundamental divide todos los modelos actuales del operador humano en dos categorías, según el tipo de información que se presente visualmente al operador humano. Estas dos categorías se denominan de persecución visual y de seguimiento compensatorio. En la figura 33-7 se ilustra el diagrama de un sistema de persecución visual y en la figura 33-8 el de un sistema de seguimiento compensatorio. El rendimiento del sistema y los modelos analíticos varían notablemente entre las dos configuraciones.

Persecución visual. Ésta se produce cuando la entrada y la salida se presentan visualmente al operador humano y él intenta hacer coincidir la entrada y la salida del sistema. La puntería de una escopeta a un ave en vuelo es una tarea de persecución visual.

Una forma especial de persecución visual ocurre cuando se conocen o advierten los valores futuros de la entrada. El término "precognoscitivo" describe este caso. La conducción de un automóvil o la búsqueda de la perilla de una puerta representan dos ejemplos de persecución visual precognoscitiva, puesto que el operador conoce la posición futura del camino o de la perilla.

El comportamiento precognoscitivo, comparado con la persecución visual ordinaria, posee varias características únicas. En el modo precognoscitivo, el individuo con frecuencia ejecuta movimientos rápidos aprendidos con anterioridad, que se efectúan en forma de ciclo abierto (es decir, sin corrección visual extra una vez que se inicia el movimiento). Este comportamiento altamente no lineal no es susceptible de análisis de control directo. En consecuencia, no se ha investigado en forma tan detallada como el comportamiento de persecución visual o el seguimiento compensatorio. Los modelos que incluyen comportamiento de perse-

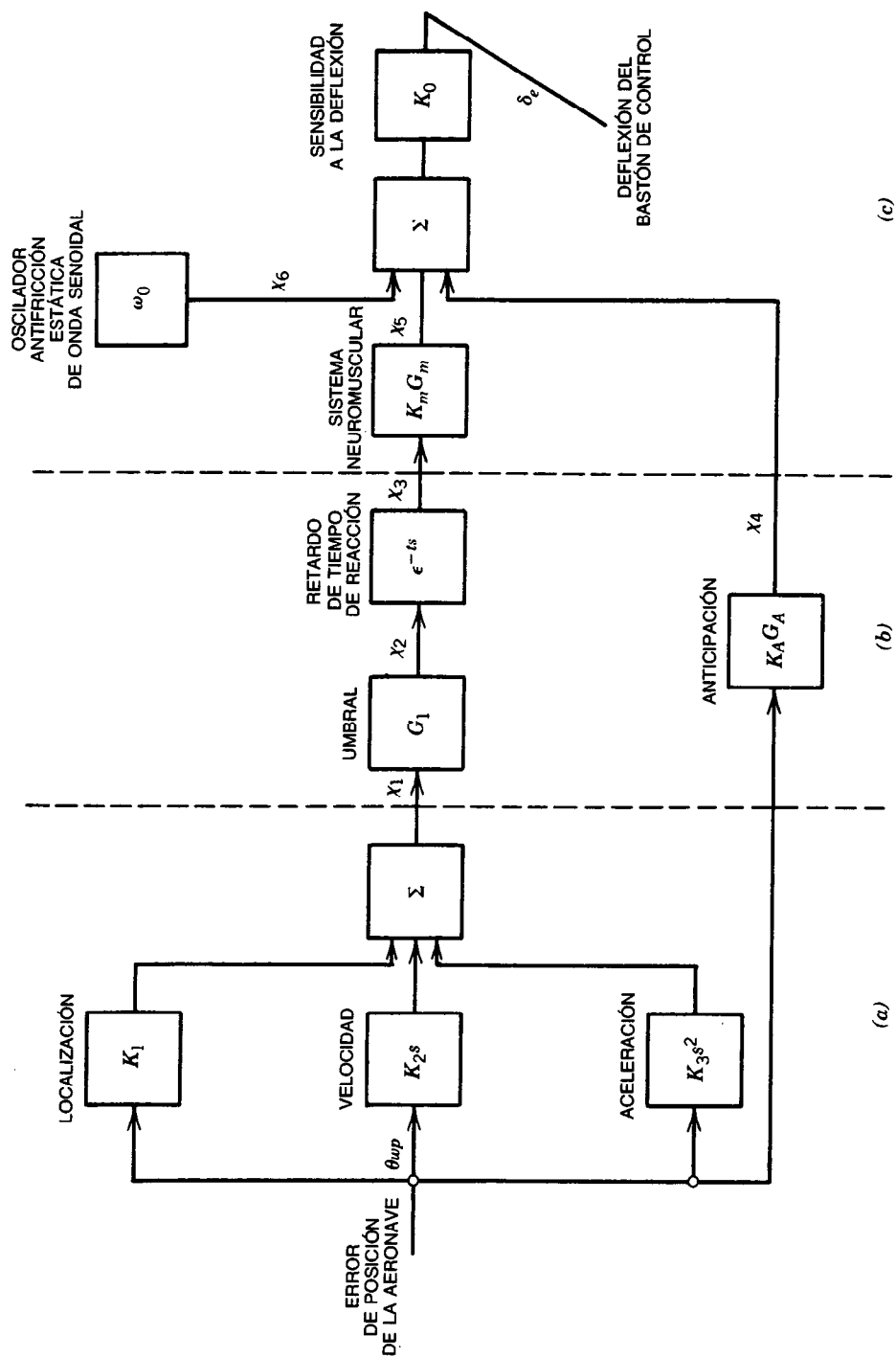


Fig. 33-10. Modelo no lineal de la Goodyear Aircraft Co. 11: a) sistema de cómputo lineal; b) operaciones de fase no lineal y no mínima; c) sistema motor.

cución visual y precognoscitivo requieren fronteras de conmutación que delimiten el control de la persecución visual, predominantemente lineal, del control precognoscitivo, predominantemente no lineal^{13,16}.

Seguimiento compensatorio. El seguimiento compensatorio no implica un seguimiento real como la persecución visual. En una tarea de seguimiento compensatorio visual sólo se presenta al operador la diferencia entre la entrada y la salida; es decir, el error del sistema. Después, el sujeto actúa de manera tal que anule el error.

La mayor parte de los modelos de control por operador humano que se utilizaron y que aún se emplean en el presente se aplican de manera exclusiva al seguimiento compensatorio. Entre ellos se cuentan los primeros modelos lineales de Tustin⁸ (ya mencionados), los modelos cuasilineales de coeficientes constantes de McRuer y colaboradores⁹, los modelos de datos muestrados de Ward y Bekey¹⁰, los modelos adaptativos de Knoop y Fu¹² y de Wasaff¹⁷, los modelos de regresión múltiple de Elkind¹⁸, los modelos de filtro óptimo de Wierwille¹⁹ y los modelos de control óptimo de Kleinman¹⁴.

De todos estos modelos se pueden deducir ciertas restricciones sobre el rendimiento de un operador humano. North²⁰ y Fogel²¹ indicaron la mayor parte de estas restricciones en la década de 1950, y su naturaleza básica se mantiene intacta. Estas restricciones y algunos ejemplos actuales de su aplicación se enumeran a continuación (junto con algunas ventajas del sistema con operador humano sobre los sistemas de control puramente automáticos).

33.7.10 Restricciones del operador humano

1. **Tiempo de retardo o de reacción.** Típicamente este tiempo es de 0.5 s para un automovilista distraído, 0.25 s para uno atento, 0.15 s para un piloto de combate, un atleta o un conductor de autos de carreras, y 0.10 s es el límite de los campeones.
2. **Respuesta a la frecuencia máxima para una tarea de seguimiento visual compensatorio manual, como pilotar un avión por instrumentos.** Típicamente esta respuesta es de 10 rad/s para un descenso en la ganancia de -3 dB (potencia mitad), aunque un cierto rendimiento del seguimiento se puede extender hasta 20 rad/s. La regla empírica general es que 1 Hz (6.28 rad/s) constituye el límite del seguimiento sostenido del operador humano en control manual simple (dinámica controlada de ganancia unitaria).
3. **Generación de adelanto de fase y orden de la planta controlada.** Una planta de orden cero (dinámica = K) requiere la generación del adelanto de fase cero por parte del operador y es la planta más fácil de controlar. Una planta de primer orden (dinámica = K/s) requiere un cierto adelanto de fase por el operador y es más difícil de controlar, como lo indica la menor respuesta a la frecuencia comparada con la de una planta de

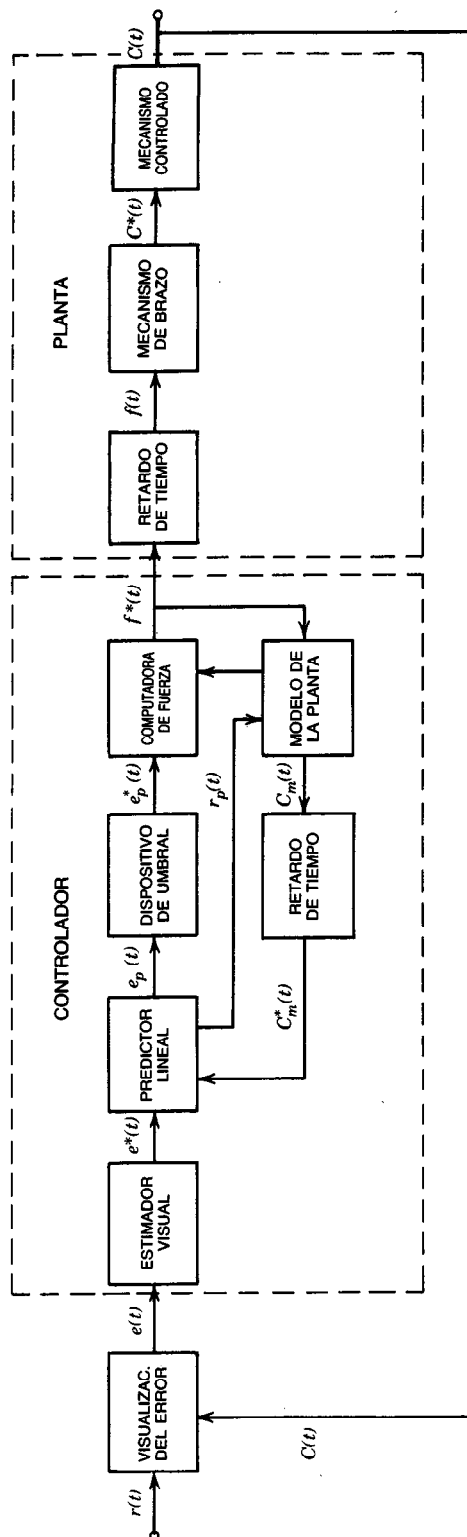


Fig. 33-11. Modelo adaptativo de Knoop y Fu¹².

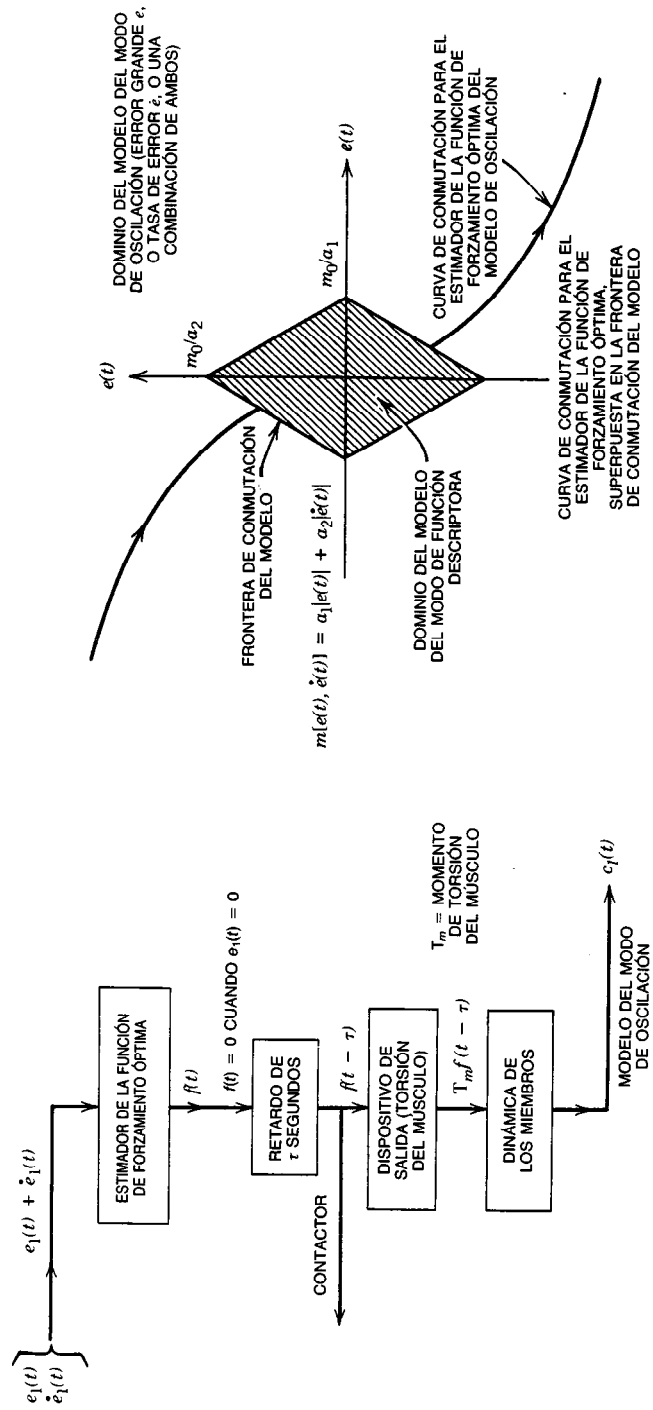
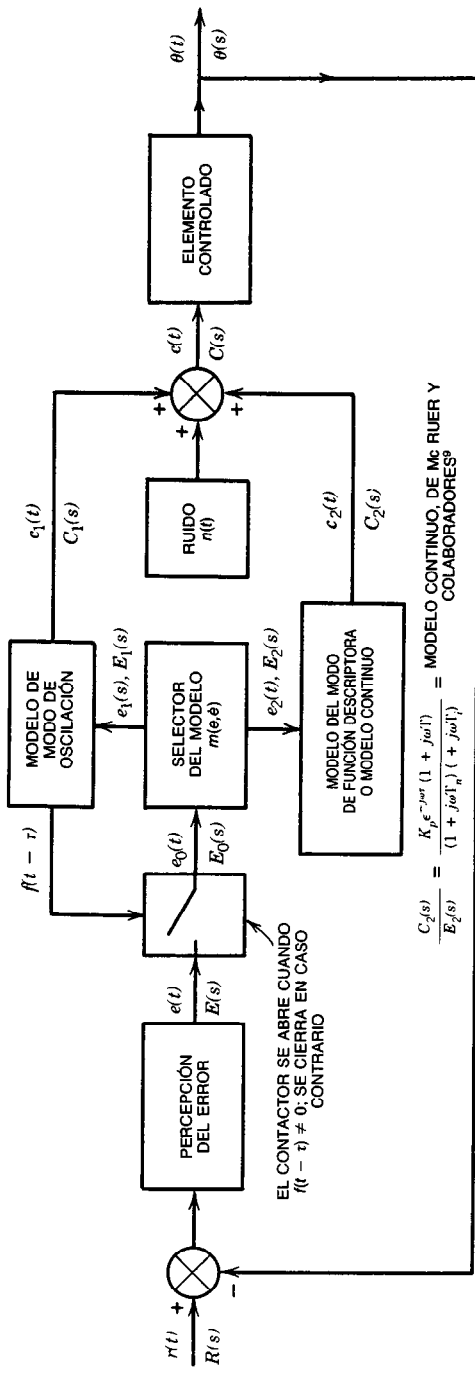


Fig. 33-12. Modelo de modo dual de Costello¹³.

orden cero. Una planta de segundo orden (dinámica = K/s^2) requiere un adelanto de fase mucho mayor por el operador que una planta de primer orden y es difícil de controlar, con una respuesta máxima a la frecuencia aún menor.

4. **Intervalo de ganancia del sistema y ganancia adaptativa del sistema.** El operador tiende a preferir la máxima ganancia compatible con restricciones de estabilidad y linealidad, y su rendimiento tiende a ser mayor con ella. Las ganancias inferiores llevan a desempeño lento. Los primeros cañones de tanques que investigó Tustin se apuntaban haciendo girar una manivela muchas veces (que es un método de control de ganancia muy baja). Sin embargo, la ganancia debe limitarse para asegurar la controlabilidad en todos los posibles estados del sistema. Cuando los errores son relativamente pequeños y las frecuencias de entrada son bajas, cabe utilizar ganancias mayores, pero cuando los errores son grandes y las frecuencias de entrada son relativamente altas, se deben utilizar ganancias menores para evitar no linealidades (como llevar la visualización del error más allá de sus límites) o para evitar relaciones de ganancia y fase inestables. Una solución consiste en emplear ganancias adaptativas variables, que varían con el estado del sistema. En los modernos aviones de propulsión a chorro se aplica este método, y en ciertos automóviles se emplea un mecanismo de dirección hidráulica de razón variable que introduce una ganancia variable en el ciclo de control de la dirección. En la actualidad, uno de los ejemplos más desarrollados de sistema de control con operador humano de ganancia adaptativa variable es el reactor de caza de un motor y un solo tripulante F-16 de la General Dynamics. Por sí sola, esta nave de rápida respuesta es estáticamente inestable o casi lo es. La aerodinámica inestable se controla y el avión se hace operable por medio de un sistema de control electrónico de ganancia variable adaptativa que opera las superficies de control de la aeronave por medio de señales eléctricas de control (el llamado método de pilotaje por cables). El piloto no controla directamente el F-16, sino que envía órdenes al sistema de control electrónico, que controla el avión en forma directa.

Probablemente el vehículo controlado por operador humano y estabilizado por computadora de ganancia adaptativa más famoso sea el transbordador espacial de Estados Unidos. El transbordador espacial es pilotado por cables y lo controlan cuatro computadoras que "votan" en favor de la acción adecuada.

5. **Ajuste de la ganancia por el modelo de cruce.** En el modelo de cruce de McRuer y colaboradores⁹ se combina el criterio de estabilidad de Bode (que se estudió en la sección 34.4) con la preferencia observada de los operadores humanos de sistemas con dinámica controlada de la forma K/s . El término "cruce" se refiere al cruce de la

magnitud de la ganancia de ciclo abierto por el nivel de 0 dB, que corresponde al nivel crítico de ganancia unitaria. El modelo de cruce establece que en la región de control estable el operador ajusta la ganancia, de manera que en la región de 0 dB la magnitud de la ganancia de ciclo abierto tenga la forma K/s . Con símbolos:

$$Y_p(j\omega)Y_c(j\omega) = H(s)W(s)|_{s=j\omega} \equiv \frac{K}{s} e^{-s\tau}|_{s=j\omega_c}$$

donde $Y_p(j\omega) = H(s)$ = función de transferencia del piloto u operador

$Y_c(j\omega) = W(s)$ = función de transferencia de la aeronave o planta controladas

ω_c = frecuencia de cruce, rad/s (en $\omega = \omega_c$, $|Y_p(j\omega_c)Y_c(j\omega_c)| = 0$ dB)

τ = tiempo de reacción del operador, s

Para un seguimiento práctico, ω_c debe ser mayor que cualquier frecuencia de entrada.

33.7.11 Ventajas del operador humano²¹

1. **Reconocimiento de patrones.** En ninguna máquina o computadora ha podido reproducirse la facultad del operador humano de reconocer patrones y extraer señales del ruido en un entorno operativo de tiempo real.
2. **Sensores multimodales.** Los sistemas de control ordinarios no pueden compararse en número de modos sensoriales o grado de resolución o sensibilidad con el operador humano. Es posible construir un controlador con mayor sensibilidad o resolución en un modo sensorial (como la percepción de temperatura, color o sonido), pero sólo a un costo relativamente grande y para un modo a la vez. Además, el operador humano contiene canales de sensibilidad e información que pueden reconocer un comportamiento peligroso o anormal del sistema (a menudo antes de que ocurra una catástrofe).
3. **Costo, tamaño, peso, mantenimiento y disponibilidad.** En comparación con un sistema de control cualquiera que pueda duplicar todas las acciones de control que ejecuta un operador humano, éste presenta las siguientes características:

- a. Pesa menos.
- b. Cuesta menos.
- c. Es relativamente más fácil de mantener.
- d. Es relativamente más fácil de programar o capacitar.
- e. No hay gastos en su producción.

Sólo en situaciones especializadas limitadas los pilotos automáticos o robots soldadores han superado al hombre. Los pilotos automáticos o robots soldadores no pueden encargarse de situaciones de emergencia o inusuales. De hecho, su ventaja principal es que se

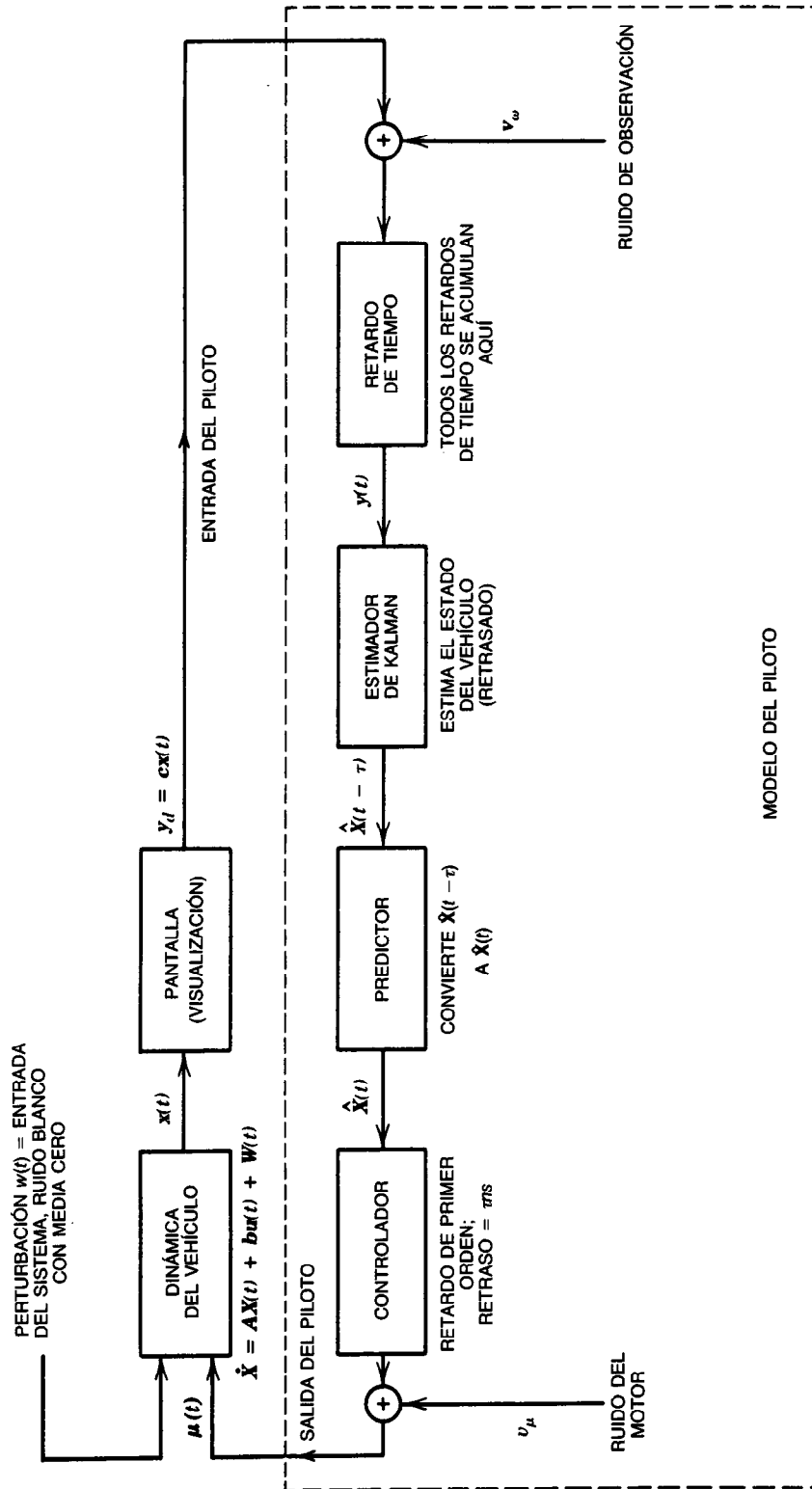


Fig. 33-13. Modelo de control óptimo de Baron y colaboradores¹⁵. Los símbolos en negritas representan vectores o matrices. Un acento circunflejo sobre un símbolo representa una cantidad estimada.

encargan de operaciones repetitivas estándares paso por paso que cansan al operador humano y en consecuencia reducen el rendimiento de éste.

33.8 CLASIFICACIÓN DE SISTEMAS POR MODELO MATEMÁTICO

Los sistemas se pueden clasificar según la forma del modelo matemático que describe sus características, tales como:

- Ecuaciones diferenciales lineales.
- Ecuaciones transformadas de Laplace.
- Ecuaciones de estado.
- Ecuaciones en diferencias.
- Ecuaciones transformadas z .
- Ecuaciones de tiempo discreto.
- Ecuaciones diferenciales no lineales.

En la tabla 33-2 se resumen los modelos matemáticos que se utilizan para describir las características de los sistemas.

Basándose en la forma del modelo matemático y la estructura del sistema, los sistemas suelen clasificarse y denominarse como sigue:

- Sistemas lineales.
- Sistemas no lineales.
- Sistemas continuos.
- Sistemas discretos.
- Sistemas de una sola entrada y una sola salida.
- Sistemas de entradas y salidas múltiples.
- Sistemas determinísticos.
- Sistemas estocásticos.
- Sistemas óptimos.
- Sistemas adaptativos.

Cada uno se analiza brevemente desde el punto de vista de los sistemas.

33.8.1 Sistemas lineales

Un sistema lineal se describe o modela por medio de una ecuación lineal. La característica principal que identifica un sistema lineal es que cumple la ley de superposición. Esta ley establece que la salida del sistema para la suma de dos o más entradas es igual a la suma de las salidas para cada entrada aplicada por separado. Se sigue que si la entrada de un sistema $r(t)$ produce una salida $C(t)$, entonces una entrada $Kr(t)$ produce una salida $KC(t)$. Por tanto, si se duplica la entrada de un sistema lineal, también se duplica la salida.

Los sistemas lineales se analizan con todos los métodos matemáticos que se mencionaron en la sección 33-8 y la tabla 33-2, salvo los de ecuaciones diferenciales no lineales.

Otra implicación del teorema de superposición es que la salida de un sistema lineal está dada por la convolución de su entrada con la respuesta de pulso del sistema. Cuando se consideran las transformadas de

Laplace, la convolución se convierte en multiplicación. Por tanto, en el dominio de Laplace, la transformada de la salida de un sistema lineal está dada por el producto de su transformada de entrada por la transformada de la respuesta de pulso del sistema. Ésta es la base del análisis de sistemas lineales mediante funciones de transferencia, que son las transformadas de Laplace de las respuestas de pulso del sistema. En la tabla 34-6 se presenta la integral de convolución junto con la superposición y las transformadas de Laplace.

Los sistemas lineales pueden ser sistemas de tiempo continuo o de tiempo discreto. Estos últimos se analizan más adelante en el presente capítulo.

Kuo^{22,23} proporciona una excelente introducción a los sistemas lineales. Dertouzos y colaboradores²⁴ han publicado una introducción igualmente excelente a la superposición y la convolución.

33.8.2 Sistemas no lineales

Un sistema no lineal se describe por medio de una ecuación no lineal. Las principales características que identifican una ecuación lineal son:

- Funciones trigonométricas, exponenciales y otras no lineales:

Trigonométricas

$$C(t) = \sin r(t)$$

Exponenciales de función

$$C(t) = e^{r(t)}$$

Exponenciales enteras

$$C(t) = r(t)^2$$

- Ecuaciones discontinuas:

$$C(t) = 2r(t) \quad r(t) > 1$$

$$C(t) = 0 \quad r(t) \leq 1$$

- Ecuaciones diferenciales con coeficientes variables, o productos de derivadas:

Lineales

$$\frac{d}{dt} C(t) + C(t) = 0$$

No lineales con coeficientes variables $C(t)$

$$C(t) \cdot \frac{d}{dt} C(t) + C(t) = 0$$

Ecuación lineal de segundo orden

$$\frac{d^2}{dt^2} C(t) + \frac{d}{dt} C(t) + C(t) = 0$$

Tabla 33-2. Resumen de métodos matemáticos comunes que se aplican en el análisis de sistemas

Tipo de ecuación	Ejemplo	Métodos de solución
Ecuación diferencial lineal	$\frac{d^2}{dt^2} C(t) + 2 \frac{d}{dt} C(t) + 3C(t) = r(t)$ <p>Condición inicial: $C(t) _{t=0} = c(0)$</p> <p>y $\frac{d}{dt} C(t) _{t=0} = \dot{c}(0)$</p>	De tanteos, serie infinita de potencias, aproximaciones por integración numérica, transformada de Laplace
Ecuación transformada de Laplace	$s^2 C(s) - sc(0) - \dot{c}(0) + 2sC(s) - 2c(0) + 3C(s) = R(s)$ <p>Para condiciones iniciales cero:</p> $s^2 C(s) + 2sC(s) + 3C(s) = R(s)$	Manipulaciones algebraicas, tablas de transformadas, desarrollo en fracciones parciales, integrales de inversión
Ecuación de estado	$\begin{bmatrix} \dot{X}_1 \\ \dot{X}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -3 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ r(t) \end{bmatrix}$ <p>$X_1 = C(t)$ $X_2 = \frac{d}{dt} C(t)$</p>	Métodos matriciales, exponencial de matrices de transición, transformadas de Laplace, teoría de sistemas lineales
Ecuación en diferencias	$X(K+2) + 2X(K+1) + 3X(K) = r(K)$ <p>Condición inicial:</p> <p>$X(K) _{K=0} = X(0)$ y $X(K) _{K=1} = X(1)$</p>	Sumatoria de series infinitas, sumatoria de convolución, solución numérica, transformadas z
Ecuación transformada z	$z^2 X(z) - z^2 X(0) - zX(1) + 2zX(z) - 2zX(0) + 3X(z) = R(z)$ <p>Para condiciones iniciales cero:</p> $z^2 X(z) + 2zX(z) + 3X(z) = R(z)$	Manipulación algebraica, desarrollo en fracciones parciales, tablas de transformadas, integrales de inversión
Ecuación de tiempo discreto	$X(K\gamma + 2\gamma) + 2X(K\gamma + \gamma) + 3X(K\gamma) = r(K\gamma)$ <p>(γ = tiempo de muestreo constante)</p> <p>Condiciones iniciales:</p> <p>$X(K\gamma) _{K=0} = X(0)$ y $X(K\gamma) _{K=1} = X(\gamma)$</p>	Mismos métodos que para las ecuaciones en diferencias. Nótese que K es un entero, mientras que $K\gamma$ no lo es, salvo en el caso especial $\gamma = 1$ s
Ecuación diferencial no lineal	$\frac{d^2}{dt^2} C(t) - [1 - C(t)^2] \frac{dC(t)}{dt} + C(t) = 0$ <p>(ecuación de Vanderpol)</p>	Sin solución en general; análisis del plano de fase, funciones descriptivas, aproximaciones por linealización, método de Lyapunov, método de Popov, integración numérica

Ecuación diferencial no lineal debido al término trigonométrico, $A \sin C(t)$

$$\frac{d^2}{dt^2} C(t) + \frac{d}{dt} C(t) + A \sin C(t) = 0$$

Ecuación diferencial lineal con función de accionamiento no lineal $A \sin \omega t$

$$\frac{d^2}{dt^2} C(t) + \frac{d}{dt} C(t) + C(t) = A \sin \omega t$$

Producto o cuadrado no lineales de la derivada de primer orden

$$\frac{d^2}{dt^2} C(t) + \left[\frac{d}{dt} C(t) \right]^2 + C(t) = 0$$

Los sistemas no lineales no se comportan conforme al principio de superposición. La duplicación de la entrada no duplica la salida, como ocurre con un sistema lineal. Todos los sistemas reales presentan alguna forma de no linealidad tal como la saturación, zona muerta, huelgo (movimiento inútil), histéresis, esticción, fricción de Coulomb o alguna combinación de ellos. Los sistemas no lineales se estudian en detalle en las secciones 34.8 y 34.9.

Gibson²⁵ presenta una introducción completa a los sistemas no lineales. Graham y McRuer²⁶ cubren el tema y ponen de relieve la descripción de funciones correlación y la densidad espectral de potencia, que utilizan en un trabajo posterior sobre modelos lineales y no lineales de pilotos humanos.

33.8.3 Sistemas continuos

Los sistemas continuos se describen por medio de ecuaciones o modelos en los cuales el tiempo varía en forma continua. Los sistemas continuos a menudo se denotan como sistemas analógicos y suelen describirse por medio de ecuaciones diferenciales, ecuaciones de estado o ecuaciones transformadas de Laplace. Un sistema continuo verdadero no contiene elementos discontinuos, tales como relevadores, conmutadores o dispositivos digitales. Sin embargo, un sistema continuo por tramos puede contenerlos. Entre unos cambios discontinuos cualesquiera, tales como el encendido o apagado de un motor cohete, el sistema continuo por tramos se analiza sobre una base continua. Los sistemas continuos pueden ser lineales o no lineales.

D'Azzo y Houpis²⁷ presentan una introducción muy amplia a los sistemas continuos.

33.8.4 Sistemas discretos

Un sistema discreto se describe por medio de ecuaciones en diferencias y no de ecuaciones diferenciales. Dentro de un sistema discreto, algunas de las variables cambian en forma discreta escalonada. A menudo se emplean filtros para suavizar este comportamiento escalonado antes de que se produzca la salida del sistema, de manera que la salida de un sistema discreto a

menudo es una función continua suave del tiempo. Típicamente, un sistema discreto muestrea una función de tiempo para producir datos muestreados que entonces se procesan. Los sistemas discretos suelen contener uno o más de los siguientes elementos:

- Interruptor de muestreo (muestreador de pulsos o elemento de muestreo y retención).
- Elemento de retención (retención de orden cero o generador de "furgones", retención de primer o segundo orden).
- Convertidores A/D y D/A (A = señal analógica o continua, D = código digital, que se mantiene constante un tiempo de muestreo).
- Relevadores o interruptores.
- Procesador de señales digitales (filtro o controlador especializado, o todo un sistema de computación).

El crecimiento de los sistemas discretos es paralelo al de las computadoras digitales, en especial las microcomputadoras. Antes de 1970, casi todos los sistemas de hardware eran de naturaleza continua. A principios de la década de 1980, los sistemas discretos sobresalieron en aplicaciones militares y aeroespaciales, en especial en las áreas de dirección, guía y control. En el terreno comercial, el control digital directo, el control numérico de máquinas herramientas y los robots industriales son ejemplos de sistemas discretos.

Cadzwow²⁸ ha publicado una introducción completa a los sistemas discretos

33.8.5 Sistemas de una sola entrada y una sola salida

Los sistemas de una sola entrada y una sola salida se pueden reducir a una expresión que relaciona la entrada del sistema con su salida. Son ejemplos de estos sistemas los sistemas reguladores, tales como los de control de temperatura, presión o velocidad. La entrada es la temperatura, presión o velocidad deseadas y la salida es la temperatura, presión o velocidad reguladas.

Un sistema de una sola entrada y una sola salida puede ser un componente de un sistema mucho mayor que contenga otras señales. En realidad no puede haber un sistema de una sola entrada ya que, además de la entrada pretendida, siempre hay otras entradas extrañas que ocasionan perturbaciones generadas por ráfagas de viento, olas, variaciones de temperatura o cualquier otra fluctuación externa que afecte al sistema (p. ej., ruido).

Un libro con ejemplos prácticos de sistemas de control, como el de Shinner⁵, proporciona muchos ejemplos de sistemas de una sola entrada y una sola salida.

33.8.6 Sistemas de entradas y salidas múltiples

En un sistema de entradas y salidas múltiples, cada salida es afectada por una o más entradas. Una salida también puede ser afectada por otras salidas. La mayor parte de los sistemas complejos grandes son de la variedad de entradas y salidas múltiples. Por ejemplo, un

sistema de control de la posición de un satélite típicamente controla tres coordenadas angulares y sus velocidades. Por tanto, el sistema tiene seis salidas.

En un sistema de entradas y salidas múltiples no interactivas las variaciones en una entrada sólo afectan una salida. Conceptualmente, este sistema puede separarse en un conjunto de sistemas de una sola entrada y una sola salida, todos contenidos en un gran marco de referencia. Por ejemplo, un sistema de control de procesos podría tener varias entradas, como materias primas, temperaturas, gastos hidráulicos y presiones, y podría generar varias salidas de producto. Es deseable que una sola entrada controle por separado cada salida, para facilitar la producción variable. Por tanto, se busca un sistema de entradas y salidas múltiples sin interacción. Por lo general esto no sólo es difícil, sino imposible de conseguir. Ocurre interacción entre las entradas, y algunas de las entradas o todas ellas se deben ajustar para hacer variar una de las salidas en una forma deseada. En un libro verdaderamente sobresaliente, Ogata²⁹ analiza este problema empleando matrices espaciales de transferencia de estado. En otro libro breve pero lleno de realidades, Owens³⁰ también estudia los sistemas de entradas y salidas múltiples.

33.8.7 Sistemas determinísticos

La salida de un sistema determinístico se establece de manera única para todo el tiempo a partir de las condiciones iniciales y señales de entrada. Es deseable que un sistema sea determinístico, de manera que no haya incertidumbre en la salida del sistema. Un sistema descrito por medio de una ecuación diferencial o en diferencias con coeficientes constantes sin entradas de perturbación o ruido es un sistema determinístico. En la realidad, siempre existen entradas de perturbación extrañas, que producen fluctuaciones aleatorias en la salida del sistema. Por tanto, para tener un sistema determinístico en la práctica, estas perturbaciones externas aleatorias deben ser insignificantes.

En la mayor parte de los libros que abordan el tema de la teoría del control, particularmente libros introductorios como el de D'Azzo y Houpis²⁷, sólo se analizan sistemas determinísticos.

33.8.8 Sistemas estocásticos

Los sistemas estocásticos están sujetos a variables o procesos aleatorios o los emplean, y se analizan por medio de métodos estadísticos. La salida de un sistema estocástico no puede determinarse de manera única en un instante cualquiera, sino que la respuesta esperada de la salida puede determinarse dentro de una varianza calculada. Típicamente un sistema estocástico tiene una señal de entrada ruidosa. El objetivo que se busca en el diseño de un sistema es un sistema que responda a la señal de entrada subyacente y no al ruido que degrada esta señal. El efecto del ruido se minimiza por filtrado. En el proceso de filtrado se pueden emplear promedio o correlación de señales, filtros analógicos o digitales, o filtros ponderados de retroalimentación o de Kalman. Los parámetros del filtro requerido de-

penden de la planta controlada por el sistema y de las características de las señales de entrada y de ruido. Si alguno de éstos varía en forma significativa, también cambian los parámetros del filtro requerido. Por tanto, para ser en verdad efectivo, un sistema estocástico debe poder cambiar sus parámetros de filtrado conforme a las variaciones en las propiedades estadísticas de las señales degradadas por ruido. Aunque estos sistemas estocásticos ya se han analizado, se han construido muy pocos. En casi todos los sistemas estocásticos se supone estadística constante estacionaria de ruido*, en particular ruido blanco (en todas las frecuencias) con distribución de probabilidad gaussiana en forma de campana. En ocasiones se supone ruido de color (de banda de frecuencia limitada).

Dos razones para suponer una distribución de probabilidad gaussiana estacionaria son:

1. Muchas perturbaciones aleatorias y señales de ruido se calculan en forma muy aproximada por medio de una distribución de probabilidad gaussiana, que es estacionaria o no cambia si se desliza el origen del tiempo.
2. La distribución de probabilidad gaussiana estacionaria es matemáticamente atractiva. Su función de autocorrelación²⁶:

$$\phi_{nn}(\tau) = \lim_{Y \rightarrow \infty} \frac{1}{2Y} \int_{-Y}^Y n(t + \tau)n(t)dt \quad (33-1)$$

es una función pulso $K\delta(\tau)$ cuya transformada de Laplace es simplemente K , donde K es el peso o área situada bajo el pulso delta de Dirac $\delta(\tau)$. K está dada por $\phi_{nn}(0)$, que se denomina valor cuadrático medio de $n(t)$.

Los sistemas estocásticos con entradas aleatorias a menudo se analizan mediante funciones de correlación y funciones espectro de densidad de potencia. Estas últimas también se denominan espectro de potencia o densidad espectral de potencia. Las funciones correlación son funciones del tiempo (correlación cruzada para dos señales, autocorrelación para una señal consigo misma). Las funciones densidad espectral de potencia son transformadas de Fourier o de Laplace de las funciones autocorrelación y, por tanto, son funciones de la frecuencia. Las transformadas de las funciones correlación cruzada (de tiempo) se denominan funciones densidad espectral de potencia cruzada o funciones densidad espectral cruzada; éstas también son funciones de la frecuencia³². Algunos de los símbolos empleados para estas cantidades son los siguientes:

- Señales de tiempo, $r(t)$ y $c(t)$
- Expresiones para los términos de correlación y densidad del espectro de potencia son:
- Autocorrelación. $\phi_{rr}(\tau)$ y $\phi_{cc}(\tau)$ [véase $\phi_{nn}(\tau)$, dado antes para la definición completa]:

*Las propiedades estadísticas de una función estacionaria no cambian si se desliza el origen del tiempo.

Correlación cruzada

$$\phi_{rc}(\tau) = \lim_{Y \rightarrow \infty} \frac{1}{2Y} \int_{-Y}^Y r(t)c(t + \tau)dt \quad (33-2)$$

Densidad espectral de potencia

$$\Phi_{rr}(\omega) \equiv s_{rr}(\omega) \equiv s_r(\omega) \equiv s_r(f) \equiv Y_r(f) \equiv Y_{rr}(\omega) \equiv Y_{rr}(j\omega) = \Phi_{rr}(s)$$

Transformada de Laplace de dos lados

$$\Phi_{rr}(s) = \int_{-\infty}^{\infty} \phi_{rr}(\tau)e^{-s\tau}d\tau \quad \text{donde } s = \sigma + j\omega \quad (33-3)$$

Transformada de Fourier

$$\Phi_{rr}(\omega) = \Phi_{rr}(s)|_{s=j\omega} = \int_{-\infty}^{\infty} \phi_{rr}(\tau)e^{-j\omega\tau}d\tau \quad (33-4)$$

Densidad espectral de potencia cruzada

$$\Phi_{rc}(s) \equiv \Phi_{rc}(j\omega) \equiv \Phi_{rc}(\omega) = s_{rc}(\omega) \equiv Y_{rc}(\omega)$$

$$\Phi_{rc}(s) = \int_{-\infty}^{\infty} \phi_{rc}(\tau)e^{-s\tau}d\tau \quad (33-5)$$

$$\Phi_{rc}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \phi_{rc}(\tau)e^{-j\omega\tau}d\tau = \Phi_{rc}(s)|_{s=j\omega} \quad (33-6)$$

Para la figura 33-14, las relaciones determinística y estocástica son como sigue:

$$C(s) = G(s)R(s) = R(s)G(s) \quad (33-7)$$

$$\Phi_{cc}(s) = G(s)G(-s)\Phi_{rr}(s) = G(-s)G(s)\Phi_{rr}(s) \quad (33-8)$$

$$c(t) = \int_0^t g(\tau)r(t - \tau)d\tau = \int_0^t r(\tau)g(t - \tau)d\tau \quad (33-9)$$

Convolución integral $r(t) = 0, t < 0$

$$\phi_{cc}(\tau) = \frac{1}{2\pi j} \int_{c_1 - j\infty}^{c_1 + j\infty} G(s)G(-s)\Phi_{rr}(s)e^{s\tau}ds \quad (33-10)$$

Integral de inversión de Laplace; $c_1 =$ constante elegida para la convergencia (por lo general $c_1 = 0$)

Frecuencia negativa

$$\Phi_{rr}(s) = \Phi_{rr}(-s) \quad (33-11)$$

$$\Phi_{rc}(s) = \Phi_{rc}(-s) \quad (33-12)$$

Suma o diferencia de señales³⁴ (véase la fig. 33-15)

$$e(t) = r(t) - c(t) \quad (33-13)$$

$$E(s) = R(s) - C(s) \quad (33-14)$$

$$\phi_{ee}(\tau) = \phi_{rr}(\tau) + \phi_{cc}(\tau) - \phi_{rc}(\tau) - \phi_{cr}(\tau) \quad (33-15)$$

$$\phi_{ee}(s) = \phi_{rr}(s) + \phi_{cc}(s) - \phi_{rc}(s) - \phi_{cr}(s) \quad (33-16)$$

Para la suma de dos señales, se cambian por positivos todos los signos negativos de las cuatro ecuaciones anteriores y la figura 33-15.

33.8.9 Sistemas óptimos

Un sistema óptimo tiene el mejor desempeño posible conforme al criterio especificado de "bondad" y las restricciones especificadas. Una restricción es toda relación que deba satisfacerse tal como "el consumo máximo de combustible no excederá de 1 000 kg", "la temperatura máxima no pasará de 1 000 °C" o "el costo máximo no excederá de \$ 1 000". El criterio de "bondad" se denomina criterio, medida o índice de rendimiento, función de costo o factor de mérito. Este índice de rendimiento es una función de las variables del sistema y se maximiza o minimiza por medio del proceso de optimización. El sistema óptimo resultante depende en gran medida de la elección del índice de rendimiento. Por lo general, al cambiar el índice de rendimiento el sistema resultante cambia.

Las medidas del rendimiento suelen estar representadas por integrales de cantidades cuadradas, tales como la integral del error al cuadrado que se debe minimizar. Cuando se emplean ecuaciones matriciales de variables de estado, como medida del rendimiento suele considerarse la integral de una función positiva definida (que por lo general es una forma cuadrática). En el caso escalar, una forma cuadrática se reduce a una variable al cuadrado.

Una forma cuadrática bidimensional del vector $X = [X_1, X_2]^T$ es:

$$F(X) = X^T A X = [X_1, X_2] \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix}$$

Multiplicando:

$$F(X) = [X_1, X_2] \begin{bmatrix} a_{11}X_1 + a_{12}X_2 \\ a_{21}X_1 + a_{22}X_2 \end{bmatrix} = a_{11}X_1^2 + a_{21}X_2X_1 + a_{12}X_1X_2 + a_{22}X_2^2$$

Ahora $F(X) = F(X_1, X_2)$ es positiva definida si $F(X) > 0$ para $X \neq 0$, y $F(X) = 0$ sólo para $X = 0$.

En el caso escalar, $F(X) = F(X_1) = a_{11}X_1^2$.

La integral de formas cuadráticas o variables al cuadrado se usa con una función de costo o índice de rendimiento, puesto que esta integral es monótona e independiente del signo de las variables. Por tanto, si la variable se relacionara con el error, un error positivo o negativo incrementaría la función de costo. La única manera de minimizar tal función de costo consiste en mantener el error próximo a cero. Un error negativo no puede cancelar un error positivo posterior. Los procedimientos de optimización de un sistema se analizan

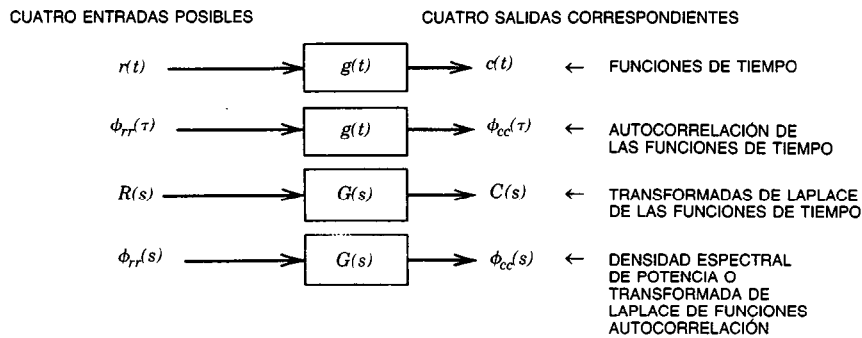


Fig. 33-14. Funciones de transferencia³³.

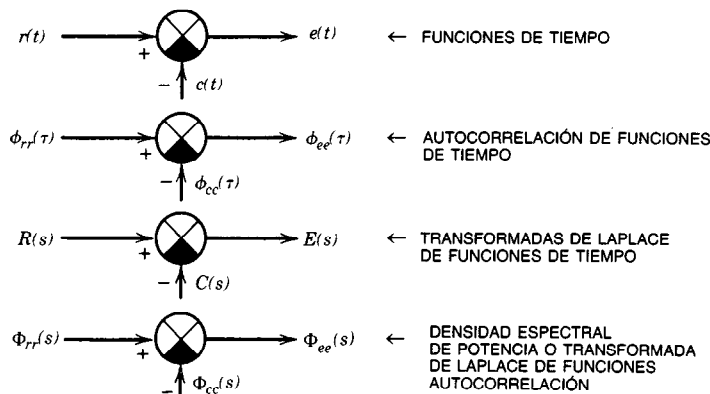


Fig. 33-15. Suma de diferencia de señales. Sólo se utiliza uno de los cuatro conjuntos posibles de señales a la vez.

con detalle en las secciones 34.11 a 34.14. Ogata²⁹ presenta una introducción concisa pero en extremo clara a los sistemas óptimos (secciones 7.3 a 7.6).

33.8.10 Sistemas adaptativos

Los sistemas adaptativos modifican sus parámetros o estructura internos en respuesta a cambios en la tarea de control. Estas variaciones suelen deberse a la dinámica cambiante del sistema ocasionada por variaciones internas o externas³⁴. Ejemplos de estas variaciones son el cambio en la masa del vehículo debido al consumo de combustible o el cambio en las fuerzas de control aerodinámicas debido a cambios en altura, velocidad o ambas del vehículo. Estas variaciones también pueden atribuirse a cambios en el tipo de señales de control y al tipo de ruido que degrada la señal de control.

El tipo más común de sistema adaptativo cambia las ganancias internas para tratar de mantener las características del sistema independientes de variaciones en los parámetros del sistema. Para lograr esto, las características del sistema se determinan comparando la salida del sistema con su entrada. Las características resultantes se comparan entonces con una serie de características deseadas o con un modelo de referencia.

Las ganancias adaptativas se ajustan para optimizar alguna función de rendimiento o factor de mérito en base a esta comparación de características.

Por ejemplo, la dinámica de avance de una aeronave a menudo se describe por medio de dos conjuntos de polos en el plano complejo (los polos de dinámica de periodo corto y los de periodo largo o fugoides). La posición de estos polos, que corresponde a su frecuencia y amortiguamiento asociados, cambia con la altitud, velocidad y peso de la nave. En base a pruebas de manejo con pilotos se conoce la posición deseada de estos polos. Si el subsistema de medición de un controlador de sistema adaptativo determina que estos polos han salido de las cotas deseables, el controlador adaptativo cambia las ganancias de ciclo ajustable de los diversos ciclos de control. El procedimiento de desplazamiento de polos se conoce como incremento de la estabilidad, y las ganancias de ciclo ajustable son los controles adaptativos del sistema de incremento de la estabilidad.

Para medir o establecer las características de un sistema, suele aplicarse una entrada de prueba especial mediante uno de dos métodos. En el primer método se puede aplicar una entrada determinística, tal como un pulso que se aproxima a una entrada delta de Dirac, cuando el sistema esté casi en equilibrio. La salida dará

el valor aproximado de la función de ponderación del sistema. En el caso de que tales perturbaciones no resulten tolerables, puede agregarse a la entrada de control real una señal de ruido aleatoria estacionaria generada a propósito con media cero, y entonces es posible determinar la función de transferencia del sistema a partir de métodos de densidad espectral de potencia; es decir²⁶:

$$G(s) = \frac{\Phi_{nc}(s)}{\Phi_{ne}(s)}$$

donde $G(s)$ = función de transferencia de la planta por determinar

n = entrada de ruido al sistema

e = entrada de la planta

c = salida de la planta

$\Phi_{nc}(s)$ = espectro de potencia cruzada, ruido-salida de la planta

$\Phi_{ne}(s)$ = espectro de potencia cruzada, ruido-entrada de la planta

como se define en este capítulo para los sistemas estocásticos.

El diagrama de bloques correspondiente se muestra en la figura 33-16.

Una vez más, Ogata²⁹ presenta una introducción breve, lúcida y relativamente completa a los sistemas adaptativos. Si se busca un solo libro que abarque todos los temas sobre la teoría del control que se analizan en la sección 33.8, será difícil, si no imposible, encontrar uno superior.

33.9 RESUMEN DEL PROCESO DE DISEÑO DE SISTEMAS

El proceso de diseño de sistemas se inicia con un planteamiento teórico del problema, que incluye la definición de algunos o todos los siguientes 14 pasos:

1. ¿Qué se supone que hace el sistema?
2. ¿Cuáles son las entradas del sistema?
3. ¿Cuáles son las salidas del sistema?
4. ¿Cuáles son las restricciones del sistema?
5. ¿Cuáles son las alternativas de cada uno de los primeros cuatro pasos?
6. ¿Qué efectos tendrá el sistema sobre dispositivos que interactúan con él, y viceversa?
7. ¿Cuáles son los beneficios previstos del sistema?
8. ¿Cuáles son los costos previstos del sistema?
9. ¿Qué disposiciones deben o pueden tomarse para futuras modificaciones y contingencias no previstas?
10. ¿Cuáles son los componentes o subsistemas principales del sistema?
11. ¿Qué especificaciones deben cumplir los componentes o subsistemas para que el sistema tenga un rendimiento satisfactorio?
12. ¿Cuál es el tiempo previsto para el diseño, construcción, prueba y consecución de cada componente o subsistema del sistema?

13. ¿Qué recursos (personal, máquinas, instalaciones, capital) deben asignarse al sistema?
14. ¿Cuál es la importancia relativa de cada uno de los pasos anteriores para el sistema particular?
¿Pueden omitirse algunos pasos?

Con los primeros cinco pasos esencialmente se intenta definir el sistema desde el punto de vista del rendimiento. Para tener éxito, todo proceso de diseño debe contener una definición clara y específica del sistema. Dado que un sistema cualquiera, como un sistema de control de antenas, puede ser un componente de un sistema mayor (p. ej., un sistema de aterrizaje por radar), considerar las interacciones del sistema (paso 6) puede ser de importancia decisiva en el proceso de definición. Si se producen varias tentativas de diseños del sistema, los pasos 7 y 8, evaluación de los beneficios y costos esperados del sistema, sirven para comparar los méritos relativos de cada diseño de sistema.

El diseño de sistemas es un proceso iterativo. Todos los sistemas complejos producidos hasta la fecha han requerido modificaciones, correcciones, ajustes y alteraciones de un tipo u otro. Un sistema debe diseñarse teniendo presente la modificación. Por tanto, debe contener puntos de prueba, componentes modulares conectables, tableros de acceso, alambres de repuesto, puntas de contacto, conectores, módulos, zócalos y memoria extra. Sólo con esta filosofía se puede diseñar un sistema óptimo y de costo mínimo.

Una vez diseñado un sistema teórico en borrador, éste se divide comúnmente en subsistemas, a lo largo de líneas funcionales. Todo el proceso por pasos se vuelve a aplicar después a los subsistemas, en forma iterativa, y se agregan detalles al diseño. Si el sistema es grande, complejo y costoso, cada subsistema se puede diseñar en un orden secuencial determinado por un programa administrativo, que se describió en la sección 33.6. A medida que continúa el diseño teórico se examina cada componente de manera periódica en relación con los siguientes tres factores clave³⁵:

1. **Idoneidad.** ¿Realizará el trabajo?
2. **Factibilidad.** ¿Se puede manufacturar?
3. **Aceptabilidad.** ¿Justifica su desempeño los costos estimados en términos de tiempo, materiales, personal y dinero?

Cabe evaluar o juzgar diversos diseños mediante la aplicación de las técnicas que siguen:

1. **Factores de mérito.** Factores de rendimiento deseable, como resistencia, exactitud, potencia.
2. **Métodos de optimización.** Se analizan en las secciones 34.11 a 34.34; se utilizan para maximizar un factor de mérito.
3. **Construcción y prueba del modelo.** Mediante el uso de modelos físicos o matemáticos.
4. **Simulación por computadora.** Se utiliza junto con los modelos matemáticos o físicos.
5. **Prueba de comparación.** Se emplea cuando varios diseños de subsistemas diferentes se llevan hasta su terminación.

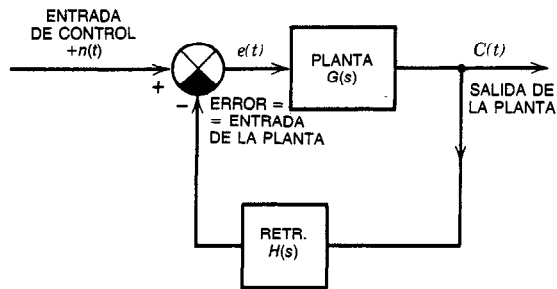


Fig. 33-16. Determinación de $G(s)$ a partir de funciones densidad espectral de potencia, con entrada de ruido aleatorio $n(t) = n \cdot \Phi_{nc}(s) = \int_{-\infty}^{\infty} \phi_{nc}(\tau) e^{-s\tau} d\tau$ (transformada de Laplace de dos lados); $G(s) = \Phi_{nc}(s)/\Phi_{ne}(s)$; $\phi_{nc}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} (1/2T) \int_{-T}^T c(t + \tau) c(t) dt$ (correlación cruzada). RETR. = retroalimentación.

Una vez que se ha producido un diseño teórico en forma de diagramas de bloques, programas de computadora, copias heliográficas de planos, modelos, especificaciones e informes, se inicia el proceso de diseño del sistema físico real. Cada componente o subsistema se diseña o compra físicamente de manera que se cumplan todas las especificaciones del sistema. Éste también es un proceso iterativo, en el que se examinan los componentes físicos y después se rediseñan si es necesario para cumplir con las especificaciones que se pidan.

En la práctica, el proceso de diseño teórico puede llegar a fallar en algún punto, y un subsistema que originalmente se juzgó teóricamente adecuado, factible y aceptable resulta ser difícil o imposible de diseñar y producir de manera física. En este caso se requiere un diseño teórico completamente nuevo. En un caso u otro, el diseño de un sistema físico por último se lleva a término, y se construyen e interconectan los subsistemas prototipo.

El sistema físico completo debe probarse entonces para saber si se cumplen las especificaciones, para determinar si surgen problemas que requieren rediseño y para verificar la confiabilidad, susceptibilidad de recibir mantenimiento y disponibilidad del sistema. Aunque todo parezca satisfactorio, el trabajo aún no termina. Se deben hacer esfuerzos para reducir el costo inicial y el costo del ciclo de vida del sistema (que incluye el costo de operación) sin reducir el rendimiento o para mejorar el rendimiento sin incrementar los costos. Además, deben continuar las pruebas de confiabilidad a largo plazo, susceptibilidad de recibir mantenimiento y disponibilidad, especialmente cuando se introducen cambios en el diseño.

Por este motivo, el proceso de diseño de sistemas complejos grandes es iterativo y nunca concluye realmente. El objetivo de mejorar el rendimiento del sistema, mejorar la confiabilidad, susceptibilidad de recibir mantenimiento y disponibilidad, y reducir el costo de operación continúa durante toda la vida del sistema.

Otros detalles de manejo del proceso de diseño de sistemas pueden consultarse en Hillier y Lieberman³⁶, Cook y Russell³⁷ o Huysmans³⁸.

BIBLIOGRAFÍA

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

1. S. M. Shinnars, *A Guide to Systems Engineering and Management*, Lexington Books, Lexington, MA.
2. G. J. Klir, *An Approach to General Systems Theory*, Van Nostrand Reinhold, Nueva York.
3. R. M. Glorioso y F. C. Osorio, *Engineering Intelligent Systems; Concepts, Theory & Applications*, Digital Press, Bedford, MA.
4. K. N. Dervitsiotis, *Operations Management*, McGraw-Hill, Nueva York.
5. S. M. Shinnars, *Modern Control System Theory and Application*, 2.ª ed., Addison-Wesley, Reading, MA.
6. G. B. Dantzig, *Linear Programming and Extensions*, Princeton University Press, Princeton, NJ.
7. R. G. Eland, "The Allocation of Resources by Linear Programming", *Scient. Am.*, pp. 124-126.
8. A. Tustin, "The Nature of the Operator's Response in Manual Control and Its Implications for Controller Design", *J. IEEE* 94 (parte IIA): 190-202.
9. D. T. McRuer, D. Graham y E. Krendel, "Human Pilot Dynamics in Compensatory Systems", Wright Patterson Air Force Flight Dynamics Laboratory, Informe AFFDL-TR-65-15.
10. G. A. Bekey, *Sampled Data Models of the Human Operator in a Control System*, PhD Dissertation, University of California, Los Ángeles.
11. Goodyear Aircraft Co., *Final Report, Human Dynamics Study*, Goodyear Aircraft Co., Akron, OH, Informe N.º GER-4750.
12. D. Knoop y K. Fu, *An Adaptive Model of the Human Operator in a Control System*, PhD Dissertation, Purdue University, West Lafayette, IN.
13. R. G. Costello, "The Surge Model of the Well-Trained Human Operator in simple Manual Control", *IEEE Trans. Man-Machine Sys.* MMS-9(1):2-9.
14. D. L. Kleinman y cols., "An Optimal Control Model of Human Response, Parte I: Theory and Validation", *Automatica* 6, (3), 357-369.
15. S. Baron, D. L. Kleinman, D. C. Miller, W. H. Levison y J. I. Elkind, "Application of Optimal Control Theory to the Prediction of Human Performance in a Complex Task", Wright Patterson Air Force Flight Dynamics Lab, Informe AFFDL-TR-69-81.
16. L. R. Young y J. L. Meiry, "Bang-Bang Aspects of Manual Control in High Order Systems", *IEEE Trans. Auto. Cont.*, AC-10(3):336-341.
17. C. R. Wasaff, "A Human Adaptive Control Scheme", del 7º Simp. de la IEEE, Factores Humanos en Electrónica, Minneapolis, MN.
18. J. I. Elkind, "Further Studies of Multiple Regression Analysis of Human Pilot Dynamic Response: A Comparison of Analysis Techniques and Evaluation of Time Varying Measurements", Bolt Beranek and Newman, Inc., Cambridge, MA, documentación técnica.

19. W. W. Wierwille, "A Theory of the Optimal Deterministic Characterization of the Time-Varying Dynamics of the Human Operator", NASA, Informe CR-170, Washington DC.
20. J. D. North, "The Design and Interpretation of Human Control Experiments", Parte I, *Ergonomics* 1(4):314-327.
21. L. J. Fogel, "The Human Computer in Flight Control", *Memorandum*, Convair, Div. General Dynamics Corp., San Diego, CA, pp. 1-19.
22. B. C. Kuo, *Linear Networks and Systems*, McGraw-Hill, Nueva York.
23. B. C. Kuo, *Automatic Control Systems*, 4.^a ed., Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ.
24. M. L. Dertouzos, M. Athans, R. N. Spann y S. J. Mason, *Systems, Networks, and Computations, Basic Concepts*, McGraw-Hill, Nueva York.
25. J. E. Gibson, *Nonlinear Automatic Control*, McGraw-Hill, Nueva York.
26. D. Graham y D. McRuer, *Analysis of Nonlinear Control Systems*, Wiley, Nueva York.
27. J. J. D'Azzo y C. H. Houpis, *Linear Control System Analysis and Design*, 2.^a ed., McGraw-Hill, Nueva York.
28. J. A. Cadzow, *Discrete Time Systems*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ.
29. K. Ogata, *Modern Control Engineering*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ.
30. D. H. Owens, *Multivariable and Optimal Systems*, Academic Press, Nueva York.
31. D. Pierre, *Optimization Theory with Applications*, Wiley, Nueva York.
32. Y. Takahashi, M. Rabins y D. Auslander, *Control and Dynamic Systems*, Addison-Wesley, Reading, MA.
33. S. S. L. Chang, *Synthesis of Optimum Control Systems*, McGraw-Hill, Nueva York (véase sección 3.5).
34. J. M. Mendel y K. S. Fu, *Adaptive Learning and Pattern Recognition Systems, Theory and Applications*, Academic Press, Nueva York.
35. C. R. Mischke, *Mathematical Model Building*, Iowa State University Press, Ames.
36. F. S. Hillier y G. J. Lieberman, *Introduction to Operations Research*, 3.^a ed., Holden-Day, San Francisco.
37. T. M. Cook y R. A. Russell, *Introduction to Management Science*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ.
38. J. Huysmans, *The Implementation of Operations Research*, Wiley, Nueva York.
39. J. R. Ward, *The Dynamics of a Human Operator in a Control System: A Study Based on the Hypothesis of Intermittency*, PhD Thesis, Department of Aeronautical Engineering, University of Sydney, Australia.
40. S. M. Soliday y B. Schohan, "Task Loading of Pilots in Simulated Low Altitude, High Speed Flight", 7(1):45-53.
41. N. Glickman, T. Inouye, S. E. Telser, R. W. Keston, F. K. Hick y M. K. Fahnestack, "Physiological Adjustments of Human Beings to Sudden Changes in Environment", 19(8).

LIBROS Y REVISTAS

- K. R. Baker, *Introduction to Sequencing and Scheduling*, Wiley, Nueva York.
- E. S. Buffa, *Modern Production Management*, 5.^a ed., Wiley, Nueva York.
- R. G. Costello y T. J. Higgins, *IEEE Trans. Human Fact. Electr.* HFE-7:174-181.
- P. Drucker, *Management: Tasks, Responsibilities, Practices*, Harper & Row, Nueva York.
- A. J. Duncan, *Quality Control and Industrial Statistics*, 4.^a ed., Irwin, Homewood, IL.
- F. Hillier y G. J. Lieberman, *Introduction to Operations Research*, 2.^a ed., Holden-Day, San Francisco.
- E. I. Jury y T. Pavlidis, *IEEE Trans. Autom. Contr.* AC-8:210-217.
- R. L. Keeney y H. Raiffa, *Decision Analysis With Multiple Objectives*, Wiley, Nueva York.
- R. I. Levin y C. A. Kirkpatrick, *Planning and Control with PERT/CPM*, McGraw-Hill, Nueva York.
- P. W. Marshall y colaboradores, *Operations Management: Text and Cases*, Irwin, Homewood, IL.
- D. H. Meadows y colaboradores, *The Limits to Growth*, New American Library, Nueva York.
- J. J. Moder y C. R. Phillips, *Project Management with CPM and PERT*, 2.^a ed., Reinhold, Nueva York.
- R. Peterson y E. A. Silver, *Decisions Systems for Inventory Management and Production Planning*, Wiley, Nueva York.
- J. L. Riggs, *Production Systems: Analysis Planning and Control*, 2.^a ed., Wiley, Nueva York.
- J. L. Riggs, *Engineering Economics*, McGraw-Hill, Nueva York.
- J. L. Riggs y M. S. Inoue, *Introduction to Operation Research and Management Science*, McGraw-Hill, Nueva York.
- M. H. Spencer y colaboradores, *Managerial Economics*, 4.^a ed., Irwin, Homewood, IL.
- L. G. Summers y K. Ziedman, "A Study of Manual Control Methodology, with Annotated Bibliography", NASA, Informe CR-125, Washington DC.
- R. J. Tersine, *Materials Management and Inventory Systems*, Elsevier, Nueva York.
- R. C. Vaughn, *Quality Control*, Iowa State University Press, Ames.
- H. M. Wagner, *Principles of Operations Research*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ.
- L. R. Young y L. Stark, "Biological Control Systems—A Critical Review & Evaluation", NASA, Informe CR-190, Washington, DC.

CAPÍTULO 34

Control automático

Richard G. Costello

The Cooper Union for Advancement
of Science and Art
Nueva York

- 34.1 Introducción**
 - 34.2 Control automático clásico**
 - 34.3 Representaciones de los sistemas clásicos de control**
 - 34.3.1 Ecuaciones integrodiferenciales
 - 34.3.2 Funciones de transferencia
 - 34.3.3 Diagramas de bloques y gráficas de flujo de señales
 - 34.4 Análisis y compensación de sistemas clásicos de control**
 - 34.4.1 Orden y tipos de sistemas de control y sus respuestas
 - 34.4.2 Errores del sistema de control
 - 34.4.3 Estabilidad del sistema de control
 - 34.4.4 Compensación del sistema de control
 - 34.5 Control de datos muestreados**
 - 34.6 Teoría de la transformada z de los sistemas de control**
 - 34.7 Diagramas de bloques de la transformada z con elementos de retención**
 - 34.8 Transformada z modificada, $F(z, m)$**
 - 34.9 Control no lineal**
 - 34.9.1 Características únicas de los sistemas no lineales
 - 34.9.2 Análisis del plano de fase
 - 34.9.3 Método de la función descriptora
 - 34.9.4 Criterio de estabilidad de Liapunov
 - 34.9.5 Criterio del círculo de Popov
 - 34.10 Control moderno**
 - 34.10.1 Ecuaciones espaciales de estado
 - 34.10.2 Soluciones de las ecuaciones de estado
 - 34.11 Técnicas de control óptimo**
 - 34.11.1 Optimización por el segundo método de Liapunov
 - 34.12 Cálculo de variaciones**
 - 34.13 Programación dinámica**
 - 34.14 Método del multiplicador de Lagrange**
-

34.1 INTRODUCCIÓN

El **control automático** es una rama de la teoría de los sistemas a la que concierne el control de entidades o dispositivos físicos. Las configuraciones de los dispositivos varían con el objetivo y la función de éstos. Algunos ejemplos son el control del flujo de agua que pasa por una turbina, la regulación de la temperatura de un horno de difusión y la estabilización de la orientación de un satélite de comunicaciones.

Los antiguos griegos diseñaron sistemas de control automático del tipo de regulación, que tenían la finalidad de mantener constante el nivel de fluido contenido en un recipiente, aunque en forma periódica se sacara algo de ese fluido. En el tanque de agua del inodoro actual se utiliza un diseño similar, donde el nivel de fluido se mantiene constante aunque la mayor parte del líquido se desaloje cada vez que se limpia el inodoro. Éste es uno de los ejemplos más antiguos de sistema de control por retroalimentación de ciclo cerrado del tipo regulador. En estos sistemas el nivel de fluido del recipiente se detecta con un flotador que retroalimenta la información a través de un reenvío mecánico con una válvula y admite más fluido de un depósito o tubería cuando desciende el nivel de éste.

El prolífico autor Herón de Alejandría descubrió un "dispensador de vino" que él diseñó en el año 50 d.C., el cual mantenía llena una copa por medio de un regulador flotante¹.

Según Mayr¹, el primer sistema de control automático se incorporó a una clepsidra (reloj de agua), diseñada y construida por el diseñador y constructor de maquinaria griego Ctesibios, que trabajaba al servicio del rey egipcio Tolomeo II de Alejandría hacia el año 300 a.C. El control automático era una válvula flotante que mantenía constante el nivel de líquido en un pequeño tanque elevado. El pequeño tanque, a su vez, contenía un pequeño orificio por el cual caía agua a un tanque mucho mayor, que se llenaba lentamente. El nivel de

agua en el tanque mayor elevaba un flotador conectado a una aguja que indicaba las horas. El flotador regulador de Ctesibios era parecido a la válvula de flotador actual que se utiliza en los carburadores de los automóviles, más de 2 000 años después.

Desde estos inicios, el control automático se desarrolló hasta encontrarse ahora en casi todos los aspectos de la vida diaria. En la tabla 34-1 se presenta una lista de adelantos importantes en el área del control automático.

En la tabla 34-2 se resume el origen del control por la era cronológica, mientras que en la tabla 34-3 se enumeran las cinco áreas de control existentes y se dan muchos ejemplos; en la tabla 34-4 se enumeran siete áreas del control en evolución y se presentan numerosos ejemplos.

34.2 CONTROL AUTOMÁTICO CLÁSICO

El control automático clásico trata sobre el análisis y diseño de sistemas lineales de control de ciclo abierto mediante diagramas de bloques, funciones de transferencia de la transformada de Laplace y métodos del dominio de la frecuencia.

Sistema de control de ciclo abierto. En la figura 34-1 se muestra un sistema de control de ciclo abierto. Existe cierta relación entre la salida y la entrada, de manera que la entrada cambiante hace que la salida cambie en forma conocida. La relación entre la entrada y la salida se puede llamar ganancia del sistema, función de transferencia del sistema, función de ponderación del sistema o función de planta del sistema. En el ejemplo de la figura 34-1, una válvula de agua controla el flujo en la regadera (ducha). La entrada al sistema es la posición angular de la llave de la válvula y la salida es el gasto del agua. A medida que se da vuelta a la llave aumenta el ángulo de entrada θ_i , al igual que el gasto del agua

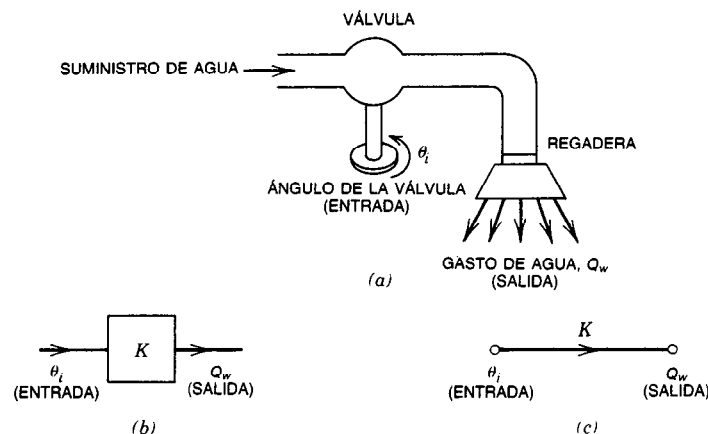


Fig. 34-1. Sistema de control de ciclo abierto; gasto de un grifo de agua: a) esquema del sistema físico; b) diagrama de bloques; c) diagrama de flujo. Ecuación aproximada del modelo lineal: $Q_w = K \cdot \theta_i$, donde Q_w = salida del sistema = gasto de agua, gal/min; θ_i = entrada del sistema = ángulo de la válvula de agua, rad; y K = constante de proporcionalidad, ganancia o función de transferencia.

Tabla 34-1. Cronología del desarrollo del control automático desde la antigüedad hasta la Primera Guerra Mundial

Año	Dispositivo	Inventor o creador; lugar	Descripción
Hacia 250 a.C. (periodo helénico)	Regulador de flotador con retroalimentación	Ctesibios; Alejandría, Grecia	Reloj de agua con regulador de flotador con retroalimentación. Se considera el primer ejemplo de sistema de control por retroalimentación ^a . Dispositivo de retroalimentación, detector y dispositivo de control integrados en el mismo elemento físico, el flotador. Se encuentran dispositivos básicamente idénticos en el compartimiento de la válvula de flotador del carburador de los automóviles modernos; específicamente, la válvula de aguja operada por un flotador
Siglo I d.C.	Primer sistema de control moderno	Herón; Alejandría, Grecia	La <i>Pneumatica</i> ^b de Herón contiene dibujos y explicaciones de unos cien dispositivos. Su regulador de flotador (<i>Pneumatica</i> II.31) contiene conceptos innovadores, como la separación del dispositivo detector (flotador) del dispositivo de control (válvula), de modo que el sistema se ajusta formalmente a la definición de sistema de retroalimentación en el sentido moderno ^c
Siglo IX d.C.	Dispositivo de control de encendido y apagado	Banū Mūsā (los tres hijos de Mūsā); Bagdad	Los hermanos Mūsā escribieron al menos 21 documentos. Uno, <i>Kitāb al-Hiyal</i> (Libro de mecanismos ingeniosos) contiene alrededor de cien dibujos y explicaciones de dispositivos. Los números 83 y 84 describen un dispositivo de control de encendido y apagado (abierto-cerrado) no lineal para mantener constante el nivel de un líquido; se puede considerar uno de los primeros ejemplos de sistemas de control de encendido y apagado (abierto-cerrado). Los Banū Mūsā tenían conocimiento del trabajo de Herón de Alejandría. Ellos mejoraron considerablemente el regulador de flotador de aquél con la válvula de estrangulación que no requería fuerza constante para mantenerla cerrada. (Los reguladores de Herón sólo funcionaban a bajas presiones, ya que la fuerza de control tenía que contrarrestar directamente la presión opuesta del fluido por medio de una placa plana colocada contra el extremo de suministro.) Un ejemplo de válvula de estrangulación moderna es la válvula de compuerta estándar para suministro de agua que se emplea como la válvula de cierre principal en la mayor parte de los sistemas de suministro de agua domésticos. La válvula de Mūsā era topológicamente similar a la válvula de grifo de laboratorio o a la válvula de carrete de control hidráulico, ya que no contenía el mecanismo de rosca de la válvula de compuerta
Hacia 1650 d.C.	Primer sistema de control termostático	Cornelius Drebbel; Alkmaar, Holanda	Según toda la evidencia de que se dispone ^d , el primer sistema de retroalimentación que se inventó en la Europa moderna, y que es independiente de modelos anteriores, es el regulador de temperatura inventado por Drebbel. El diseño y construyó hornos de laboratorio controlados termostáticamente llamados hornillos de atenores, así como incubadoras controladas de la misma forma. La temperatura era controlada por medio de un regulador de tiro, que

Tabla 34-1. Cronología del desarrollo del control automático desde la antigüedad hasta la Primera Guerra Mundial (*continuación*)

Año	Dispositivo	Inventor o creador; lugar	Descripción
1680 d.C.	Válvula de seguridad de vapor o regulador de presión	Denis Papin; Blois, Francia	<p>graduaba el suministro de aire al fuego. El regulador de tiro estaba mecánicamente unido a una varilla de control que flotaba en el mercurio contenido en un tubo en forma de U. El extremo cerrado del tubo estaba conectado a un cilindro de vidrio lleno de alcohol, que se insertaba en el horno o la incubadora. A medida que aumentaba la temperatura, el alcohol se dilataba y hacía entrar mercurio en el tubo, que a su vez elevaba la varilla de control del flotador que cerraba el regulador de tiro. Esto restringía la entrada de aire al fuego y abatía la temperatura del horno o la incubadora</p> <p>Papin, uno de los inventores de la máquina de vapor, produjo su primera olla de cocción de presión en 1680 colocando un objeto pesado en la tapa de una olla. El objetivo era suavizar huesos, de manera que el ama de casa pudiera "extraer jugos nutritivos de los huesos que, de lo contrario, se tendrían que dar a los perros hambrientos". De esta forma Papin creó la válvula de seguridad de vapor o regulador de presión, que es, en forma modificada, uno de los reguladores más usados en la actualidad. En la mayor parte de las válvulas de seguridad de presión o vapor modernas se utiliza la presión de resortes, en vez de la fuerza del peso, para regular la presión controlada. Sin embargo, la olla de presión controlada por peso sigue empleándose sin modificación después de 300 años</p>
1783 d.C.	Termostato (tipo de varilla)	Bonnemain; París, Francia	<p>La transformación del regulador de temperatura de laboratorio más bien delicado de Drebber en el práctico y resistente controlador de la temperatura se debe al ingeniero francés Bonnemain. En vez de emplear un tubo de vidrio lleno de líquido para detectar cambios de temperatura, aplicó el viejo conocimiento⁶ de los relojeros de qué metales distintos tienen distintos coeficientes de dilatación. En el diseño de Bonnemain se empleaba una varilla sólida larga de acero cubierta por un cilindro de metal un poco más corto, con elevado coeficiente de dilatación. En el extremo alejado la varilla de acero y el cilindro exterior estaban herméticamente unidos en un tramo de quizá 0.5 pulg (1 cm). Este extremo y la mayor parte de la longitud del cilindro estaban inmersos en la caldera u horno. Se colocaba un sellador entre el cilindro exterior y la caldera, a varias pulgadas de distancia del extremo externo. En este extremo el cilindro ascendería por la varilla de acero a medida que aumentara la temperatura debido a la mayor dilatación del cilindro exterior en comparación con la de la varilla de acero. La distancia se amplificaba por medio de varillaje mecánico, y el movimiento resultante se empleaba para controlar el regulador de tiro de la chimenea del horno. Se usa exactamente la misma</p>

Tabla 34-1. Cronología del desarrollo del control automático desde la antigüedad hasta la Primera Guerra Mundial (continuación)

Año	Dispositivo	Inventor o creador; lugar	Descripción
1788	Primer sistema de control bien conocido, regulador centrífugo de velocidad	James Watt; Escocia	<p>configuración (un cilindro de metal de rápida dilatación sobre una barra de acero) en todo tipo de controladores de temperaturas actuales, como lo ejemplifica el controlador termostático de los calentadores de agua domésticos alimentados con gas</p> <p>Watt no inventó ni patentó el regulador centrífugo (también llamado regulador de Watt). Él perfeccionó y aplicó el regulador centrífugo (o péndulo centrífugo) inventado por los constructores de molinos ingleses 20 o 30 años antes. Los constructores de molinos construían molinos harineros para triturar grano entre dos grandes discos de piedra que giraban en un plano horizontal y que debían mantenerse separados entre sí una distancia pequeña para que cupiera el grano entre ellos. Cuando se suspendía la molienda o cuando las piedras giraban lentamente (los molinos eran accionados por ruedas hidráulicas o por el viento), éstas tenían que separarse una distancia mayor. La piedra de la parte superior se elevaba por medio de un dispositivo llamado tendedor de elevación, el cual aplicaba la fuerza de dos pesas esféricas de plomo que giraban alrededor del eje vertical y se elevaban horizontalmente cuando estaban en movimiento y descendían al detenerse. Al descender, las esferas elevaban un poco la piedra superior a través de un sistema de varillaje. Los constructores de molinos también utilizaban el regulador o péndulo centrífugo para regular la velocidad de los molinos de viento. Thomas Mead patentó el regulador centrífugo para los molinos de viento en 1787, un año antes de que Watt construyera el suyo para máquinas de vapor. El regulador automático de Watt se recuerda porque se construyeron muchos y operaban eficazmente. La máquina de Watt causó sensación y el regulador centrífugo era su sello distintivo. Dicha máquina se extendió rápidamente por toda Europa y sustituyó a la vieja máquina de Newcomen, más lenta y menos eficiente. Al principio, el regulador automático fue mantenido en secreto para protegerlo, ya que entre los planes de la firma Boulton & Watt no estaba patentarlo. (Boulton aportó el financiamiento y era socio mayoritario. Watt inventaba máquinas.) En dos décadas todo el mundo de la ingeniería conocía el regulador de Watt, y el nombre de este inventor se asocia ahora en todo el mundo con la invención del control de la velocidad. Seis dispositivos de retroalimentación que se citan aquí antes que el de Watt son mucho más originales, pero han permanecido en la oscuridad a causa principalmente de que no se produjeron en grandes cantidades. A Watt se le puede considerar el padre del control por retroalimentación, debido a que sus reguladores centrífugos difundieron por todo el mundo el concepto de retroalimentación. En el Smithsonian Institute de Washington, DC, se conserva una máquina de vapor con regulador centrífugo que aún funciona</p>

Tabla 34-1. Cronología del desarrollo del control automático desde la antigüedad hasta la Primera Guerra Mundial (continuación)

Año	Dispositivo	Inventor o creador; lugar	Descripción
1830 d.C.	Termostato de par bimetálico en fleje	Andrew Ure; Glasgow, Escocia	Ure acuñó el término "termostato" con el objeto de describir "un aparato para regular la temperatura en procesos de vaporización, destilación y otros", y patentó este dispositivo en 1830. El termostato de fleje plano de Ure se utiliza en termostatos de calefacción doméstica modernos, aunque ahora el fleje suele estar arrollado como un resorte de reloj grande. Esto se hace para que un fleje bimetálico más largo, y por tanto más sensible, se ajuste en un pequeño compartimiento
1858	Dirección hidráulica auxiliada por vapor	Isambard Kingdom Brunel; Portsmouth, Inglaterra	Brunel fue el ingeniero que diseñó puentes de suspensión para ferrocarril, y posteriormente barcos para incrementar el radio de acción del ferrocarril Great Western, la empresa para la cual trabajaba. Su primer barco, el "Great Western" (1838), fue el primer buque de vapor construido para realizar cruceros transatlánticos de forma regular. Su segundo barco, el "Great Britain" (1845), fue el vapor más grande que navegara en su tiempo, y también fue el primer buque de vapor de hierro de grandes dimensiones, así como el primero en utilizar la hélice como medio de propulsión. Su tercer barco, llamado "Great Eastern", era tan grande que requería dirección hidráulica. El "Great Eastern" desplazaba 18 914 toneladas brutas y tenía seis palos, motores de paletas de agua construidos por Russell & Co. y motores de hélice construidos por James Watt & Co. Se hizo famoso por su hazaña de tender un cable transatlántico. Muy poca gente conoce su otra gran hazaña, la aplicación del mecanismo de dirección hidráulica controlado por retroalimentación. En este sistema de control de la posición se utilizaba una válvula de control que puede considerarse precursora de la moderna válvula de carrete hidráulica y del sistema de dirección hidráulica vehicular que se utiliza en la actualidad. Se dice que la válvula de control de la dirección hidráulica del "Great Eastern" fue ideada por Humphrey Potter en 1713, cuyo trabajo consistía en abrir y cerrar en el momento justo válvulas que admitían y expulsaban vapor de la máquina de bombeo de Newcomen controlada manualmente. Se dice también que Potter advirtió que se requería admisión de vapor siempre que el pistón estaba en una posición específica y que el impedimento de la entrada se necesitaba cuando el pistón estaba en otra, y esto le empujó a concebir el movimiento del pistón por varillaje para controlar válvulas. Si la historia es verídica, quizá Potter haya sido el primer individuo que perdió su trabajo por culpa de la automatización ⁸
1869	Freno de aire (primer sistema de control neumático importante)	George Westinghouse; Central Bridge, Nueva York	El freno de aire de Westinghouse no es un sistema de control automático de ciclo cerrado, sino un sistema de control manual en el que el operario cierra el ciclo de control detectando el error y realizando la función de control. El sistema del freno de aire es un amplificador neumático de ciclo abierto, que aplica grandes fuerzas de frenado en muchas ruedas al mismo tiempo, en

Tabla 34-1. Cronología del desarrollo del control automático desde la antigüedad hasta la Primera Guerra Mundial (continuación)

Año	Dispositivo	Inventor o creador; lugar	Descripción
1872	Servo, servomecanismo	Joseph Farcot; Francia	respuesta a una fuerza de control relativamente insignificante. La fuerza de control del operario abre la válvula de aire, lo cual permite que circule aire a presión en cilindros de aire remotos que se mueven en respuesta a la presión del aire y aplican la fuerza de frenado. Los frenos de aire aún se utilizan en los ferrocarriles y en muchos autotransportes grandes. Como el fluido de trabajo es aire, las pequeñas fugas no plantean problemas serios, como en los sistemas hidráulicos. El líquido de frenos hidráulicos de un automóvil puede agotarse debido a una fuga pequeña, pero al tren no se le termina el aire por esta razón; además, los vagones pueden desconectarse fácilmente, así como los remolques de camiones, sin que se derrame fluido hidráulico. Las pequeñas fugas de aire no provocan problemas ni accidentes. También es factible utilizar controles neumáticos en atmósferas combustibles, ya que se pueden diseñar de modo que no generen descargas eléctricas. Por estas razones, a partir del freno de aire los controles neumáticos han evolucionado explosivamente hasta las modernas válvulas neumáticas de control de procesos, que se utilizan en grandes cantidades en la industria y en la mayor parte de los automóviles construidos en las décadas de 1970 y 1980
1914-1919	Primeros sistemas de control giroscópico	Elmer Ambrose Sperry; Cortlandt, Nueva York	Farcot inventó otro mecanismo de dirección asistida alimentado por vapor. Al describirlo, dijo: "Creímos necesario dar un nombre nuevo y característico a este novedoso mecanismo, y lo hemos llamado SERVO o motor esclavizado". Así, Farcot acuñó los términos "servo" y "servomotor" en 1872, que aún se aplican para describir un controlador de posición asistido
			Aunque el trompo giroscópico se conocía desde la antigüedad, Sperry lo desarrolló como un dispositivo de control que actualmente se conoce como giroscopio direccional de Sperry. En 1911 se instaló el primero de estos dispositivos en el barco de guerra "Delaware" de Estados Unidos. A partir de esta aplicación se generó un área totalmente nueva de control, puntería y guía de proyectiles, barcos, torpedos, aeronaves y, con el tiempo, aunque ya después de fallecido Sperry, misiles y vehículos espaciales. Los cruceros modernos navegan suavemente gracias al estabilizador giroscópico de Sperry, que es un sistema de control automático del balanceo, y se mantiene en curso por medio del timonel mecánico de Sperry, un sistema de control automático de guiñada o dirección

^a Ref. 2, págs. 11 a 16.^b Se conservan más de cien manuscritos, todos elaborados después del siglo XII, según Mayr².^c "Un sistema de control con retroalimentación es un sistema de control que tiende a mantener la relación prescrita de una variable del sistema con otra mediante la comparación de las funciones de estas variables y utilizando la diferencia como medio de control." Definición de 1951. American Institute of Electrical Engineers, "Símbolos y términos propuestos de sistemas de control por retroalimentación".^d Referencia bibliográfica 2, págs. 36 a 64.^e La dilatación diferencial fue empleada por John Harrison en un péndulo de relojes compensado por temperaturas diseñado en 1726³.^f Referencia bibliográfica 4.^g Referencia bibliográfica 5.

Tabla 34-2. Orígenes del control

Era de la primera aparición	Tipo de control	Ejemplos
300-200 a.C.	Mecánico	Reguladores de presión, reguladores de velocidad mecánicos, válvulas de flotador, control neumático e hidráulico, reguladores de temperatura
Siglo XIX	Eléctrico	Relevadores, motores, resistores de cursor, interruptores, sistemas autosincrónicos, termostatos, presostatos
Siglo XX	Electrónico	Servoamplificadores (de bulbos o transistores), fotoceldas, transductores electrónicos, pilotos automáticos, servos de guiamento, robótica
Finales del siglo XX	Digital	Motores paso a paso, convertidores A/D y D/A, computadoras digitales, filtros digitales, control digital directo, control numérico de máquinas herramienta, robótica digital, sistemas de control con entrada visual

Q_w sobre cierto intervalo limitado. En este intervalo, Q_w es proporcional a θ_i y se puede describir por medio de la ecuación lineal:

$$Q_w = K \cdot \theta_i$$

donde Q_w = salida del sistema = gasto del agua, gal/min

θ_i = entrada del sistema = ángulo de la llave del agua, rad

K = constante de proporcionalidad, ganancia o función de transferencia

Éste es el sistema de ciclo abierto más simple, con una ganancia o función de transferencia constante en el intervalo para el cual el sistema es lineal.

El intervalo lineal es muy pequeño para una válvula de regadera doméstica estándar (ducha) y a menudo no tiene un ángulo mayor de 1 rad, mientras que, con frecuencia, la llave de la válvula puede hacerse girar docenas de radianes. Sin embargo, suele utilizarse un

modelo lineal de la válvula (como en la figura 34-1) aunque ésta sea no lineal, ya que el modelo lineal puede someterse a un análisis matemático lineal y las ecuaciones diferenciales lineales se resuelven sin dificultad en forma cerrada. La función de transferencia de la transformada de Laplace es la herramienta más común que utiliza el ingeniero de control para resolver ecuaciones diferenciales lineales. No se puede aplicar en general para resolver ecuaciones diferenciales no lineales. Las ecuaciones diferenciales no lineales por lo general no se pueden resolver en absoluto en forma cerrada. Por tanto, antes de la era de la computadora se daba gran importancia a la obtención de modelos de sistemas linealizados, aunque el sistema fuese no lineal. De hecho, todos los sistemas físicos se vuelven no lineales a medida que llegan a sus límites respectivos de momento torsional, aceleración, temperatura, voltaje u otro parámetro físico.

Todos los modelos lineales de sistemas físicos son aproximaciones. Cualquier modelo que se analice con el método de la función de transferencia de la transformada de Laplace es una aproximación. A medida que se aproximan los límites, estos modelos fallan.

Sistema de control de ciclo cerrado. La característica distintiva de un sistema de control de ciclo cerrado es una comparación entre el valor deseado de alguna variable del sistema y el valor físico real de esa variable. La diferencia entre estos dos valores se denomina error. Después se aplica la señal de error como entrada a ciertos componentes del sistema configurados de manera que esa señal tienda a cero. Conforme se reduce el error, se aproxima el valor deseado de la variable del sistema seleccionada. Con mayor frecuencia el valor que se desea de la variable es la salida del sistema. En la figura 34-2 se ilustra un sistema de ciclo abierto que se utiliza para dar calefacción a una casa.

Los **sistemas de ciclo cerrado** pueden diseñarse de modo que sean muy exactos, a fin de reducir los efectos de las variaciones de los componentes internos y de las perturbaciones aleatorias. Ésta es su ventaja principal. Su desventaja es que puede ser inestable, aunque todos sus componentes sean individualmente estables.

Los sistemas que se acaban de exponer tienen entradas y salidas únicas. Ejemplos de estos sistemas son el control termostático de un horno doméstico (sistema de ciclo cerrado) o el control del gasto de un grifo de agua (sistema de ciclo abierto).

Los sistemas de entradas y salidas múltiples se analizan en la sección 33.8.

34.3 REPRESENTACIONES DE LOS SISTEMAS CLÁSICOS DE CONTROL*

Se aplican tres métodos para describir un sistema de control automático lineal invariante en el tiempo:

*Ogata⁶, Kuo⁷ y Shinnars⁸ abarcan en forma integral las representaciones de los sistemas de control clásicos. La cobertura que hace Ogata de las gráficas de flujo de señales es particularmente lúcida.

Tabla 34-3. Áreas de control existentes

Tipo de control	Ejemplos
Reguladores ^a , reguladores automáticos, controladores de punto de fijación	Temperatura, presión, humedad, aforo, gasto, peso específico, velocidad ^b , aceleración ^b , posición ^b , voltaje, corriente, frecuencia, fase, nivel de iluminación, nivel de sonido, densidad de flujo magnético, momento de torsión, fuerza
Servos ^c , servomecanismos, control de persecución	El sistema de control generalizado opera con las mismas variables que el sistema regulador, pero la entrada y la salida suelen ser funciones que varían en el tiempo. Las variables de control típicas son las mismas que se citaron para los reguladores
Control numérico ^d , control de máquinas herramienta	Torno de revólver; taladradora de plantillas; prensa taladradora de husillos múltiples; torno vertical; fresadora de tres ejes; soldadora por puntos; cortadora de metal por llama de gas (oxi-corte) de dos ejes; cortadora de telas, cortadora de metales y cincelador de madera de rayo láser de dos ejes; cepillo limador; cambiadores de herramientas o de brocas; líneas de transferencia, control de pailas o plataformas
Control digital directo ^e	Línea de montaje automatizada, control de procesos químicos, control de plantas de energía eléctrica, sistemas de control de tránsito
Control por operador humano ^f	Vuelo pilotado de una aeronave "por instrumentos" o "vuelo a ciegas"; conducción de cualquier vehículo con respecto a una referencia visual de señal de mando, por ejemplo, el conductor de un automóvil que mantiene el auto centrado en un carril de un camino accidentado o el timonel de un submarino que mantiene el rumbo observando el marcador de proa

^a La entrada de un sistema de control con retroalimentación del tipo regulador es una constante, el punto de fijación. El objetivo de un regulador es mantener constante la variable controlada.

^b Unidades lineales o angulares.

^c La entrada de un servomecanismo o sistema de control generalizado es una variable. La variable controlada debe seguir a la variable de entrada en forma lineal, salvo para un cambio de coordenadas o unidades. Por tanto, la entrada puede ser un ángulo o un voltaje, mientras que la salida puede ser una velocidad o una posición.

^d El control numérico se refiere a máquinas controladas de manera automática que son autosuficientes con su propia fuente de señales de control, ya sea a través de cinta de papel perforado, memoria electrónica interna u otra información almacenada.

^e El control digital directo se refiere a un sistema distribuido que contiene muchas máquinas o componentes que responden a un controlador digital central (por lo común una microcomputadora) o se comunican con él.

^f El control por operador humano se refiere a un sistema de control de ciclo cerrado en el cual uno o más elementos constan de un operador humano.

1. Ecuaciones matemáticas; ecuaciones integro-diferenciales en el dominio del tiempo o funciones de transferencia de la transformada de Laplace en el dominio de la frecuencia.
2. Diagramas de bloques.
3. Gráficas de flujo de señales.

grales. Para poner un ejemplo, considérese la red simple pasabajas o de retraso de fase o cuasiintegrante que se muestra en la figura A de la tabla 34-5. A partir de la figura A y de la ley de los voltajes de Kirchhoff:

$$V_{\text{ent}}(t) = R \cdot I(t) + \frac{1}{C} \int_0^t I(t) dt = R \cdot I(t) + V_{\text{sal}}(t) \quad (34-1)$$

$$V_{\text{sal}}(t) = \frac{1}{C} \int_0^t I(t) dt \quad (34-2)$$

34.3.1 Ecuaciones integrodiferenciales

Estas ecuaciones permiten describir el comportamiento físico de un sistema en términos de la variable de entrada del sistema, la variable de salida del sistema y diversas derivadas o integrales de estas variables respecto al tiempo. Con mayor frecuencia, las integrales son eliminadas por una elección idónea de variables o por diferenciación de una ecuación que contenga inte-

grales. Cuando se diferencia la ecuación 34-2 con respecto a t para eliminar la integral se obtiene la siguiente expresión:

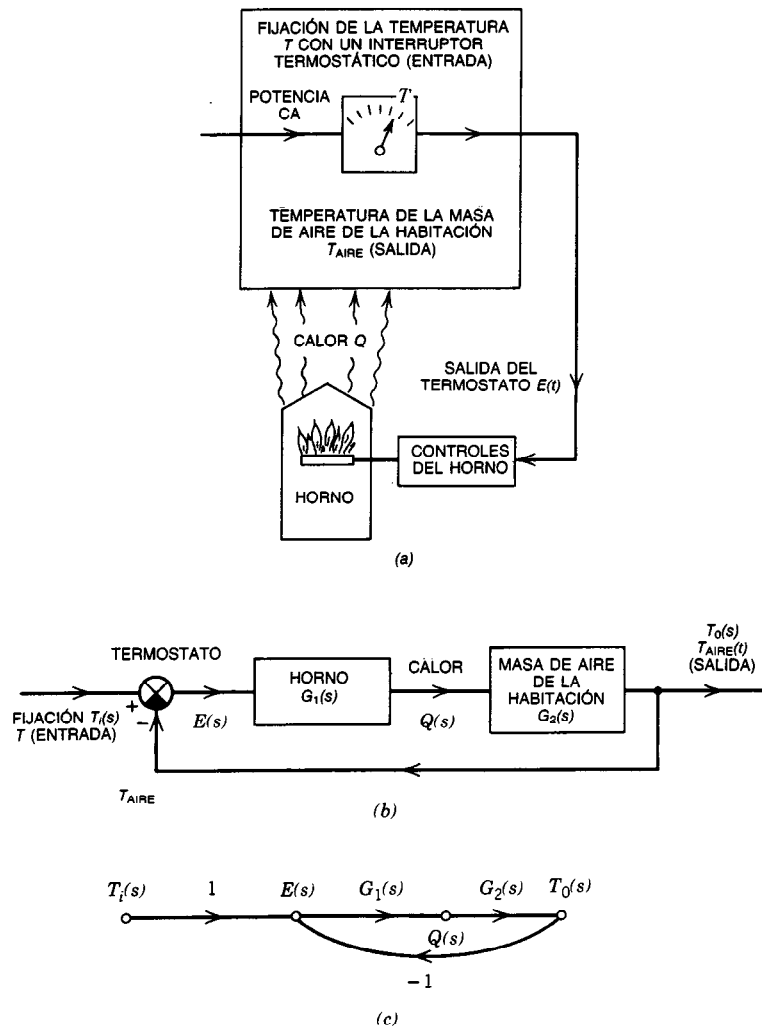


Fig. 34-2. Sistema de control de ciclo cerrado; sistema de calefacción doméstica: a) esquema del sistema físico; b) diagrama de bloques; c) diagrama de flujo de señales. $E(t)$ = señal de conmutación relacionada con el error de temperatura, donde $E(t)$ = "encendido" si $T_{\text{AIRE}} < T - \delta$ y $E(t)$ = "apagado" si $T_{\text{AIRE}} > T - \alpha$; δ = temperatura diferencial de encendido del termostato, en $^{\circ}\text{F}$, típicamente de 1 a 5 $^{\circ}\text{F}$; α = temperatura anticipadora de apagado del termostato en $^{\circ}\text{F}$, típicamente de 0 a 5 $^{\circ}\text{F}$; T_{AIRE} = temperatura ambiente (aire) de la habitación, en $^{\circ}\text{F} \Rightarrow T_o(s)$; T = fijación de la temperatura del termostato, en $^{\circ}\text{F} \Rightarrow T_i(s)$; Q = calor BTU/h; $T_o(s)$ = temperatura de salida, transformada de Laplace de $T_{\text{AIRE}}(t)$; $T_i(s)$ = temperatura de entrada, transformada de Laplace de $T(t)$.

$$\frac{d}{dt} [V_{\text{sal}}(t)] = \frac{1}{c} I(t) \quad (34-3)$$

En notación escalar:

$$V_{\text{ent}} = RC V_{\text{sal}} + V_{\text{sal}} \quad (34-6)$$

Reordenando la ecuación 34-3:

$$I(t) = C \frac{d}{dt} [V_{\text{sal}}(t)] \quad (34-4)$$

Sustituyendo la ecuación 34-4 en la 34-1:

$$V_{\text{ent}}(t) = RC \frac{d}{dt} [V_{\text{sal}}(t)] + V_{\text{sal}}(t) \quad (34-5)$$

La ecuación 34-6, que describe la entrada del sistema $V_{\text{ent}}(t)$ y la salida $V_{\text{sal}}(t)$, es una ecuación diferencial de primer orden que deriva de las ecuaciones elementales. A medida que el sistema crece en complejidad, aumenta el orden o número de diferenciaciones sucesivas de la variable dependiente.

La ecuación 34-6 es una ecuación diferencial lineal de primer orden con coeficientes constantes. Las ecua-

Tabla 34-4. Áreas de control en evolución

Área	Ejemplos
Control económico	Control monetario internacional, mercados regulados, matrices de entrada/salida, dinámica mundial, control monetario federal
Control fisiológico	Marcapasos, inyectores de hormonas programables, inyectores de insulina, control mioeléctrico de miembros artificiales, interfaz computadora-mente para el estímulo o la recepción nerviosos directos o inducidos
Control biológico	Control de predadores y plagas, control del ciclo ecológico, administración de las tierras y la vida silvestre
Control de sistemas multidimensionales o de gran escala	Redes nacionales de distribución de energía, redes internacionales (planetarias) de comunicación, control del sistema espacial, control del tráfico aéreo
Operador humano	Sistema de localización visual para el piloto de un helicóptero, control con la punta del dedo (normal) de vehículos espaciales, control mioeléctrico de no movimiento, controladores operados por la voz
Control probabilístico incierto, confuso	Guiamiento por radar, guiamiento y control de armas, control del clima, control del mercado de valores, control de la población, minimización de ruido o perturbaciones, juegos de guerra, guiamiento por sonar, guiamiento por rayos infrarrojos, control de navegación y correlación
Robótica	Dispositivo automatizado de manufactura y carga de materiales que usa servomecanismos, microprocesadores y dispositivos sensores

ciones diferenciales son el método más general de descripción de sistemas y pueden ser no lineales, variantes en el tiempo y de orden elevado. La teoría clásica del control se encarga principalmente de ecuaciones diferenciales lineales de diversos órdenes con coeficientes constantes.

34.3.2 Funciones de transferencia

Las **funciones de transferencia** son simplemente las transformadas de Laplace de las ecuaciones integro-diferenciales que relacionan las variables de entrada y salida de un sistema. Las funciones de transferencia se formulan como la razón de la salida entre la entrada, de manera que representen una función de ganancia. En el cálculo de una función de transferencia, las condiciones iniciales se fijan en cero. Esto garantiza que la salida del sistema sea igual a cero cuando el valor inicial de la entrada sea cero. La razón principal de usar funciones de transferencia en el dominio de la frecuencia de la transformada de Laplace es que esto hace posible la combinación algebraica de los elementos del sistema (p. ej., dos sistemas conectados en serie se pueden sustituir por un nuevo sistema cuya función de transferencia sea simplemente el producto de las dos funciones de transferencia de los componentes). Esto constituye una simplificación espectacular en comparación con las manipulaciones que se requieren para producir la ecuación diferencial compuesta que se obtiene a partir de dos sistemas en cascada descritos por ecuaciones diferenciales. La desventaja principal de las funciones de transferencia es que están limitadas a ecuaciones diferenciales lineales (o sistemas lineales) por las restricciones matemáticas de la transformada de Laplace.

La **transformada inversa de Laplace de una función de transferencia** es una función del tiempo, a menudo denominada función de ponderación, y está dada por la integral de convolución de las funciones de ponderación componentes. Esto se resume en la tabla 34-5, donde también se presenta una lista de los diversos métodos de ecuaciones diferenciales, transformadas de Laplace y funciones de transferencia para la representación de sistemas. En la tabla 34-6 se muestran transformadas de Laplace de funciones del tiempo comunes, y en la tabla 34-7 se presentan ciertas propiedades de las transformadas de Laplace.

34.3.3 Diagramas de bloques y gráficas de flujo de señales

Son las representaciones gráficas de las funciones de transferencia interconectadas. Cada bloque de un diagrama de bloques contiene una función de transferencia. La información viaja en una sola dirección por un bloque. La dirección del recorrido se indica por medio de flechas. Se supone que los bloques no interactúan y que los bloques conectados en cascada o en paralelo no descargan o afectan la función de transferencia de otros bloques. Si los bloques interactúan o se descargan entre sí, no se pueden combinar por medio de las leyes de simplificación de diagramas de bloques.

Tabla 34-5. Ecuaciones diferenciales y funciones de transferencia

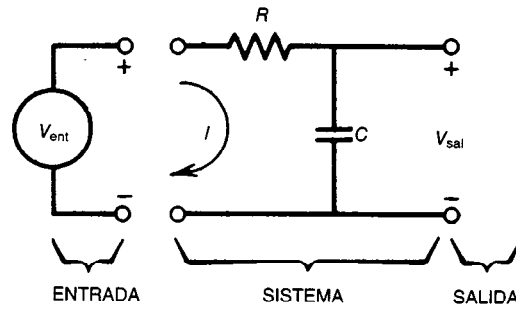


Fig. A. Red pasabajas de retraso de fase o cuasi integratoria

R = resistencia, una constante, Ω
 C = capacitancia, una constante, F
 V_{ent} = fuente de voltaje de entrada con impedancia interna cero, V
 V_{sal} = voltaje de salida, que se entrega a la carga de impedancia infinita, V
 s = variable de la transformada de Laplace, s^{-1}
 t = tiempo, s
 I = corriente de entrada, A

Tipo	Ecuación
Ecuación diferencial	$V_{ent}(t) = RC \frac{d}{dt} [V_{sal}(t)] + V_{sal}(t)$
Transformada de Laplace de la ecuación diferencial	$V_{ent}(s) = RC[s \cdot V_{sal}(s)] + V_{sal}(s)$ $V_{ent}(s) = V_{sal}(s) * (RCs + 1)$
Función de transferencia o ganancia $G(s)$	$\frac{V_{sal}(s)}{V_{ent}(s)} = \frac{1}{RCs + 1} = G(s)$
Función de ponderación $W(t)$ o transformada inversa de Laplace de la función de transferencia (L^{-1} = operador de la transformada inversa de Laplace)	$W(t) = L^{-1} \left\{ \frac{V_{sal}(s)}{V_{ent}(s)} \right\} = L^{-1} \{G(s)\}$ $W(t) = \frac{1}{RC} e^{-t/RC} \quad \text{para } t \geq 0$
Dos sistemas en serie, funciones de transferencia en cascada	$\overrightarrow{V_{ent}(s)} \boxed{G_1(s)} \rightarrow \boxed{G_2(s)} \overrightarrow{V_{sal}(s)} = \overrightarrow{V_{ent}(s)} \boxed{G_3(s)} \overrightarrow{V_{sal}(s)} \quad G_1(s)G_2(s) = G_3(s)$
Dos sistemas en serie, funciones de ponderación en cascada	$\overrightarrow{V_{ent}(t)} \boxed{W_1(t)} \rightarrow \boxed{W_2(t)} \overrightarrow{V_{sal}(t)} = \overrightarrow{V_{ent}(t)} \boxed{W_3(t)} \overrightarrow{V_{sal}(t)}$ <p>donde $W_3(t) = \int_0^t W_1(\tau)W_2(t - \tau) d\tau$ = integral de convolución, τ = variable muda</p> <p>o bien $W_3(t) = \int_0^t W_1(t - \tau)W_2(\tau) d\tau$ = integral de convolución equivalente</p>

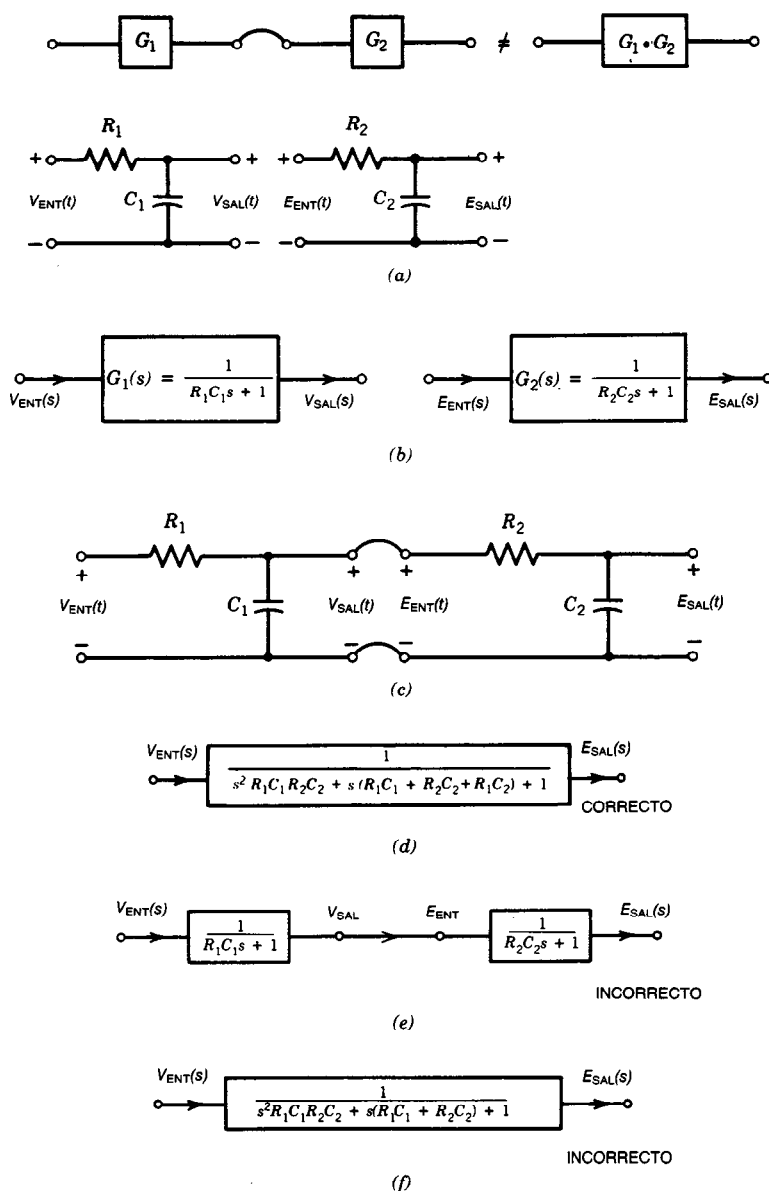


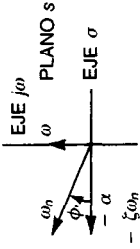
Fig. 34-3. Ejemplo de dos funciones de transferencia interactivas que no se pueden multiplicar simplemente:

- a) Dos redes de retraso de fase. $V_{ent}(t)$ = entrada de la red 1, $E_{ent}(t)$ = entrada de la red 2, $V_{sal}(t)$ = salida de la red 1, $E_{sal}(t)$ = salida de la red 2.
- b) Funciones de transferencia de dos redes de retraso de fase, deducidas para una impedancia de fuente cero e impedancia de carga infinita.
- c) Sistema en cascada: $V_{sal}(t)$ se conecta a $E_{ent}(t)$. La red 2 descarga la red 1 con una impedancia de carga no infinita; por tanto, las funciones de transferencia se modifican y no se permite la conexión de los bloques. Debe deducirse una nueva función de transferencia.
- d) Función de transferencia correcta de la red que se muestra en (c), considerando la carga o la interacción de la red. Compárese el resultado que se obtiene aquí con la cascada incorrecta que resultaría si se multiplicaran entre sí las dos funciones de transferencia de originales b.
- e) Cascada incorrecta de funciones de transferencia interactivas [que se multiplican en (f)]. El efecto de la carga invalida las funciones de transferencia individuales.
- f) Cascada incorrecta de diagramas de bloque interactivos que se multiplican. Obsérvese el término faltante $R_1 C_2$, que corresponde a la interacción de las dos redes.

Tabla 34-6. Tabla breve de transformadas de Laplace^a

Transformada de Laplace $F(s)$	Función del tiempo $f(t)$	Comentario
$F(s + a)$	$e^{-at}f(t)$	Decaimiento exponencial multiplicativo
$e^{-as}F(s)$	$f(t - a)U_s(t - a)$	$U_s(t - a)$ = escalón unitario retardado; retardo
$aF(as)$	$f(t/a)$	Escala de tiempo
$sF(s) - \lim_{t \rightarrow 0+} f(t)$	$(d/dt)f(t) = f'(t) = \dot{f}(t)$	Derivada con respecto al tiempo
$s[sF(s) - \lim_{t \rightarrow 0+} f(t)] - \lim_{t \rightarrow 0+} f'(t)$	$(d^2/dt^2)f(t) = f''(t) = \ddot{f}(t)$	Segunda derivada
$(1/s)F(s)$	$\int_0^t f(T)dT$	Integración en el dominio del tiempo, $f(t) = 0$, para $t < 0^+$
$F_1(s)F_2(s)$	$\int_0^t f_1(t-T)f_2(T)dT = \int_0^t f_2(t-T)f_1(T)dT$	Integral de convolución
$\lim_{s \rightarrow \infty} sF(s)$	$\lim_{t \rightarrow 0+} f(t)$	Teorema del valor inicial
$\lim_{s \rightarrow 0} sF(s)$ [$F(s)$ no tiene polos en el eje $J\omega$ o en el semiplano derecho]	$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t)$	Teorema del valor final [si no existe el límite, $sF(s)$ puede producir un resultado finito, lo cual es erróneo]
1	$\delta(t)$	Función delta de Dirac, $\delta(0) \rightarrow \infty$, $\delta(t) = 0$, $t \neq 0$
$1/s$	$U_s(t)$	Función escalón unitario
e^{-as}	$\delta(t - a)$	Función delta de Dirac retardada
K/s	K	Constante
$1/(s + a)$	e^{-at}	Decaimiento exponencial
$1/s^2$	t	Rampa unitaria
$1/s^3$	$t^2/2$	Parábola unitaria (obsérvese el 1/2)
$1/s^n$	$t^{n-1}/(n-1)!$	Potencia de t

Tabla 34-6. Tabla breve de transformadas de Laplace^a (continuación)

Transformada de Laplace $F(s)$	Función del tiempo $f(t)$	Comentario
$\omega/(s^2 + \omega^2)$	$\text{sen}(\omega t)$	Sinusoide pura
$s/(s^2 + \omega^2)$	$\cos(\omega t)$	Cosinusoide pura
$(\omega_n^2)/(s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2)$ cuadrática normalizada simple	$(\omega_n/\sqrt{1-\zeta^2})e^{-\zeta\omega_n t}\text{sen}(\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}t)$	Sinusoide amortiguada
Cuadrática factorizada, forma general de la cuadrática anterior: $(A + jB)/(s + \alpha + j\omega) + (A - jB)/(s + \alpha - j\omega)$ o bien $(M/\theta)/(s + \alpha + j\omega) + \text{conjugado}$ (θ = ángulo del término + $j\omega$)	$2Me^{-\alpha t}\text{sen}(\omega t + 90^\circ - \theta^\circ)$ Nota: $\omega = \omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$ $\alpha = \zeta\omega_n$ $\omega_n^2 = \alpha^2 + \omega^2$ $\zeta = \cos \phi$ = factor de amortiguamiento; esto se deduce igualando: $s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2 = (s + \alpha)^2 + \omega^2$	Sinusoide amortiguada defasada
		
$M = \sqrt{A^2 + B^2}$ = magnitud $\theta^\circ = \tan^{-1}(B/A)$		
Las dos últimas entradas se relacionan, y el desarrollo en fracciones parciales produce: $A = 0, B = \omega_n^2/2\omega, M = \omega_n^2/2\omega$ $\theta = 90^\circ, 2M = \omega_n^2/\omega = \omega_n^2/\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$ o bien $2M = \omega_n/\sqrt{1-\zeta^2}, \alpha = \zeta\omega_n,$ $\omega = \omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$	$2Me^{-\alpha t}\cos(\omega t - \theta^\circ)$ $-2Me^{-\alpha t}\cos(\omega t \pm 180^\circ - \theta^\circ)$ $-2Me^{-\alpha t}\text{sen}(\omega t - 90^\circ - \theta^\circ)$	Formas equivalentes de la sinusoide amortiguada defasada
(La cuadrática normalizada simple es un caso especial de la cuadrática factorizada)		Es necesario asegurarse de convertir grados en radianes cuando se evalúan sinusoides

^a Después de 42 años, la tabla de transformadas de Laplace que se prefiere es la de Gardner y Barnes⁹.^b Véase la nota al pie de la tabla 34-10, donde se presenta $\hat{f}(t)$ para el tiempo negativo.^c En la tabla 34-14 se hace una evaluación paso a paso de residuos complejos $A + jB$ a fin de hallar la sinusoide defasada negativamente amortiguada $C_4(t)$ de la tabla 34-13.

Tabla 34-7. Propiedades selectas de las transformadas de Laplace, comentadas

Título	$f(t)$	$F(s)$	Comentarios
Linealidad	$af(t)$	$aF(s)$	a y b son constantes o variables independientes de t y s
	$af_1(t) \pm bf_2(t)$	$aF_1(s) \pm bF_2(s)$	
Cambio de escala	$f(t/a)$	$aF(as)$	a es una constante positiva o variable independiente positiva de t y s
Traslación real	$f(t-a)U(t-a)$	$e^{-as}F(s)$	$U(t-a)$ = función escalón unitario; por ejemplo: $U(t-a)=0, t < a$ $U(t-a)=1, t > a$
	$f(t+a)U(t+a)$	$e^{+as}F(s)$	
Traslación compleja, caso general de linealidad	$e^{-at}f(t)$	$F(s+a)$	a es un número complejo con parte real no negativa; es decir, real ($a > 0$); típicamente, a es real puro
	$e^{+at}f(t)$	$F(s-a)$	
Diferenciación real de n -ésimo orden	$(d^n/dt^n)f(t)$	$s^n F(s) - \sum_{k=1}^n s^{n-k} \frac{d^{k-1}}{dt^{k-1}} f(t) _{t=0}$	
Diferenciación compleja	$-tf(t)$	$(d/ds)F(s)$	
Diferenciación respecto a la segunda variable independiente	$(\partial/\partial a)f(t,a)$	$(\partial/\partial a)F(s,a)$	
Integración compleja	$(1/t)f(t)$	$\int_s^\infty F(s)ds$	
Integración respecto a la segunda variable independiente	$\int_{a_1}^{a_2} f(t,a)da$	$\int_{a_1}^{a_2} F(s,a)da$	a es la segunda variable independiente de t y s
Conmutatividad de las transformadas de Laplace sobre partes reales e imaginarias de $f(t)$ o $F(s)$	Real $\{f(t)\}$	\Leftrightarrow	Real $\{F(s)\}$
	Imag $\{f(t)\}$	\Leftrightarrow	Imag $\{F(s)\}$

Si hay interacción, se debe determinar una nueva función de transferencia de las ecuaciones diferenciales básicas que describen los sistemas interactuantes. En la figura 34-3 se da un ejemplo de dos funciones de transferencia en interacción.

En la tabla 34-8 se presentan relaciones básicas de diagramas de bloques y en la tabla 34-9 se ilustra la simplificación de estos diagramas. Todos los diagramas de bloques que se presentan tienen una sola salida. Contienen una función de transferencia que es la razón de la salida del bloque dividida entre la entrada (en el dominio de la transformada de Laplace). En la práctica, cada bloque corresponde a un componente físicamente identificable de un sistema. Las señales que entran y salen del bloque algunas veces no están a disposición física (p. ej., no son observables), sino que son internas a un componente físico representado por medio de un modelo con dos o más bloques.

En la tabla 34-10 se definen estas señales junto con otros términos y símbolos comunes de los diagramas de bloques. Las transformadas de Laplace (tablas 34-6 y 34-7) se utilizan junto con el análisis de diagramas de

bloques. En la tabla 34-11 se presentan seis reglas comunes que se aplican en la aritmética de los diagramas de bloques o de las transformadas de Laplace, en formas escalar y matricial. Por último, en la tabla 34-12 se presentan las reglas de simplificación de las gráficas de flujo de señales y se ejemplifica la evaluación de la fórmula de ganancia de Mason en relación con la función de transferencia de una gráfica de flujo de señales. Los diagramas de bloques y las gráficas de flujo de señales son representaciones intercambiables, donde un bloque corresponde a una flecha o rama dirigida de una gráfica de señales de flujo (tabla 34-8).

34.4 ANÁLISIS Y COMPENSACIÓN DE SISTEMAS CLÁSICOS DE CONTROL

Las respuestas de un sistema de control varían con la forma matemática del modelo del sistema y la señal de entrada específica que se aplique. Con el método de la transformada de Laplace se calculan las respuestas de escalón, rampa y aceleración, y se presentan aquí en

forma gráfica para diversos modelos matemáticos de sistemas de control que se describen como sistemas de tipo 0, 1 o 2.

Después se describen los errores del sistema de control en términos de los coeficientes de error clásicos, que se deducen por el teorema del valor final de la transformada de Laplace, ya que son los métodos clásicos que se aplican para determinar la estabilidad del sistema de control, entre ellos la prueba de Routh-Hurwitz, la gráfica de Nyquist, la gráfica de Bode y la gráfica del lugar geométrico de la raíz. Por último, se cubre la compensación del sistema.

34.4.1 Orden y tipos de sistemas de control y sus respuestas

Considérese el sistema de control que se ilustra en la figura 34-4. Su función de transferencia de sistema de ciclo cerrado $C(s)/R(s)$ está dada por:

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)} \quad (34-7)$$

La ecuación característica del sistema de control por retroalimentación general se obtiene igualando a cero el denominador:

$$1 + G(s)H(s) = 0 \quad (34-8)$$

El orden de un sistema de control se refiere al orden de la ecuación característica del sistema, dada por la ecuación 34-8. Si la ecuación característica se multiplica y se expresa en forma de polinomio, la potencia más alta de s que figure en el polinomio es el orden del sistema de control. (Más adelante, en la tabla 34-19, se ilustran sistemas de primero, segundo, tercero y cuarto orden.) El error se define como $E(s) = R(s) - H(s)C(s)$ (fig. 34-4). En el caso de que haya retroalimentación unitaria, $H(s) = 1$ y $E(s) = R(s) - C(s)$.

El tipo de un sistema de control se refiere a la potencia más elevada de s factorizable del denominador de $G(s)H(s)$. La forma general de $G(s)H(s)$ es:

$$G(s)H(s) = \frac{(s + Z_1)(s + Z_2)\dots}{s^n(s + P_1)(s + P_2)\dots} \quad (34-9)$$

donde Z_i y P_i son constantes que pueden ser números complejos. Z se refiere a los ceros y P a los polos de $G(s)H(s)$.

El tipo del sistema de control que describe la ecuación 34-9 es numéricamente igual a n . Los sistemas tipos 0 y 1 son generalmente estables, y se encuentran a menudo en la práctica. Los sistemas tipo 2 son en general difíciles de estabilizar, especialmente para ganancias globales mayores que la unidad en un intervalo de frecuencia amplio; sin embargo, se emplean en ocasiones porque pueden seguir una entrada de aceleración (con error finito) y pueden producir un error de estado estable cero para una entrada de velocidad (con error finito) y un error de estado estable cero para una entrada de posición. Los sistemas tipo 0 pueden seguir una entrada de posición (con error finito). Los siste-

mas tipo 3 y superiores no suelen encontrarse en la práctica, ya que resultan extremadamente difíciles de estabilizar.

El tipo de un sistema tiene una interpretación intuitiva o matemática. Un sistema tipo n integra la señal de error n veces. Por ejemplo, un sistema tipo 1 no puede tener un error finito de posición de estado estable, ya que en este estado la salida es constante. Si hubiese un error de posición, aunque fuera pequeño, la integración uno de ese error produciría una rampa de salida creciente, lo cual contradice el requisito de una salida constante de estado estable. La única señal cuya primera integral es una constante es una señal cero. Por tanto, el error de una integración uno o de un sistema tipo 1 debe ser cero en el estado estable para una entrada constante. En la tabla 34-13 se presentan las respuestas de los sistemas tipo 0, 1 y 2 a entradas de escalón, rampa, y aceleración (parabólica). El examen de esta tabla revela varios hechos importantes. Primero, la respuesta de escalón unitario de un sistema tipo 0 siempre exhibe un error de estado estable. En la tabla, el error es dos veces más grande que la salida real. Es decir, la señal de salida es $1/3$ de unidad y la señal de error es $2/3$ de unidad. (Más adelante se estudia el cálculo del error del sistema de control.) Un sistema práctico tipo 0 tendría una ganancia hacia adelante mucho mayor que la unidad, lo que reduciría el error una cantidad correspondiente.

La respuesta de escalón unitario $C_3(t)$ del sistema tipo 1 de la tabla 34-13 presenta un error de estado estable cero, mientras que la respuesta rampa unitaria $C_5(t)$ del sistema tipo 1 tiene un error de estado estable constante de 2 unidades. (Estos resultados se calculan más adelante en las tablas 34-15 y 34-20.) Los sistemas tipo 1 se utilizan muy frecuentemente en la práctica cuando se necesita un error de estado estable cero (como en un sistema de posicionamiento mecánico) o la capacidad de seguir una función de rampa (o velocidad, como en un sistema de dirección de tiro de un arma). El error de rampa de estado estable constante se compensa agregando un adelanto suficiente en el sistema de dirección de tiro (del mismo modo en que un cazador de aves silvestres adelanta el punto de mira de la escopeta). En estos dos sistemas de puntería, la función rampa es una rampa de azimut o ángulo, que aumenta en forma continua conforme se sigue el objetivo.

El sistema tipo 2 de la tabla 34-13 parece benigno, con $G(s) = 1/s^2(s+2)$. No obstante, su respuesta de ciclo cerrado es inestable en todas las entradas. Como ya se dijo, los sistemas tipo 2 son difíciles de estabilizar, y el sistema tipo 2 que se ilustra es inestable. Sin

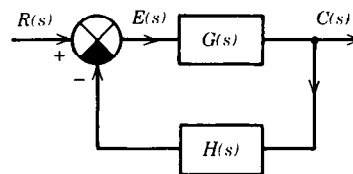


Fig. 34-4. Sistema de control por retroalimentación general.

Tabla 34-8. Relaciones básicas del diagrama de bloques con gráficas de flujo de señales equivalentes (cantidades escalares)

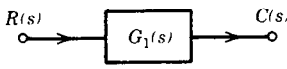
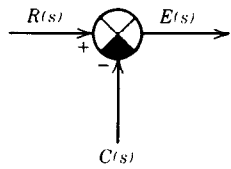
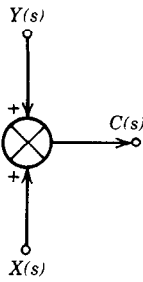
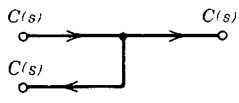
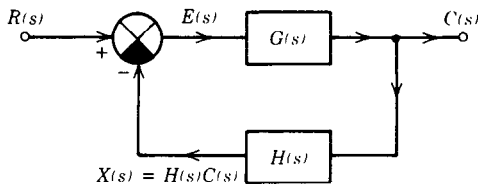
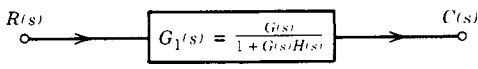
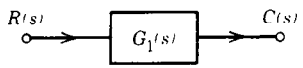
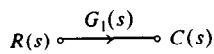
Diagrama de bloques	Fórmula(s)
Básico	
	$G_1(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = \text{función de transferencia} = \frac{\text{salida(s)}}{\text{entrada(s)}}$ $G_1(s) = \frac{A_ms^m + \dots A_2s^2 + A_1s + A_0}{B_ns^n + \dots B_2s^2 + B_1s + B_0}$
Combinaciones de señales	
	$E(s) = R(s) - C(s)$ <p>(sustractor)</p>
	$C(s) = X(s) + Y(s)$ <p>(sumador)</p>
	$C(s) = C(s) = C(s)$ <p>(salidas equivalentes)</p>
Ciclo básico de retroalimentación negativa, reducido a $G_1(s)$	
	$E(s) = R(s) - X(s)$ $X(s) = H(s)C(s)$ $E(s) = R(s) - H(s)C(s)$ $C(s) = G(s)E(s) \text{ o bien } E(s) = \frac{C(s)}{G(s)}$
	$\frac{C(s)}{G(s)} = R(s) - H(s)C(s)$ $C(s) = G(s)R(s) - G(s)H(s)C(s)$ $C(s) + G(s)H(s)C(s) = G(s)R(s)$ $C(s)[1 + G(s)H(s)] = G(s)R(s)$
	$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)} = G_1(s)$

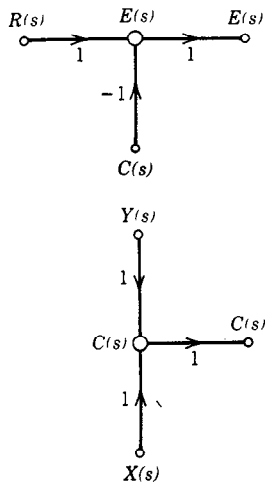
Tabla 34-8. Relaciones básicas del diagrama de bloques con gráficas de flujo de señales equivalentes (cantidades escalares) (continuación)

Gráfica de flujo
de señales equivalentes

Valores



$A, B = \text{constantes}$
 $s = \text{variable de la transformada de Laplace, } 1/s$
 $m = \text{orden del polinomio numerador}$
 $n = \text{orden del polinomio denominador}$
 Para una respuesta acotada sin pulsos infinitos:
 $n > m$

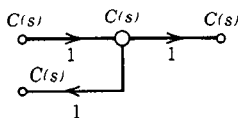


$$E(s) = R(s) - C(s)$$

(sustractor)

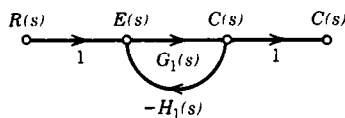
$$C(s) = X(s) + Y(s)$$

(sumador)



$$C(s) = C(s) + C(s)$$

(salidas equivalentes)



$R(s) = \text{señal de entrada de referencia}$
 $C(s) = \text{señal de salida controlada}$
 $E(s) = \text{señal de error}$
 $X(s) = \text{señal de retroalimentación (sólo en el diagrama de bloques)}$
 $G(s) = \text{función de transferencia de la planta o ganancia hacia adelante, ciclo abierto}$

$$G_1(s) = \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)}$$

$R(s) \rightarrow C(s)$

$H(s) = \text{función de transferencia o ganancia de retroalimentación}$
 $s = \text{variable de la transformada de Laplace}$
 $G(s)H(s) = \text{ganancia del ciclo}$
 $1 + G(s)H(s) = \text{ecuación característica}$
 $G_1(s) = \text{función de transferencia o ganancia de ciclo cerrado}$

$$R(s) \xrightarrow{G_1(s)} C(s)$$

Tabla 34-9. Simplificación de diagramas de bloques (cantidades escalares)

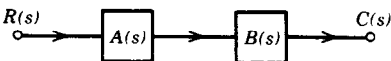
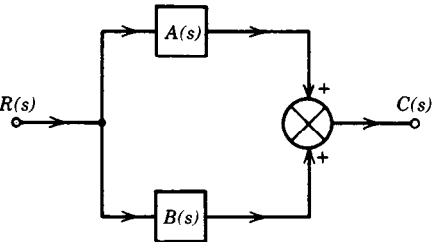
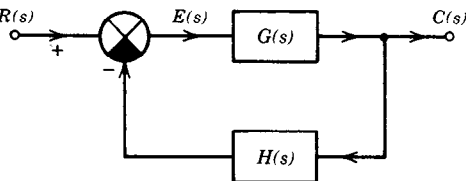
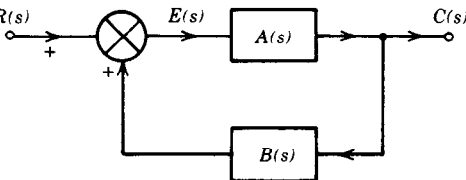
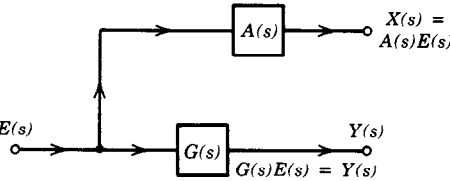
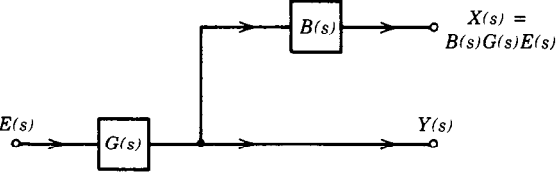
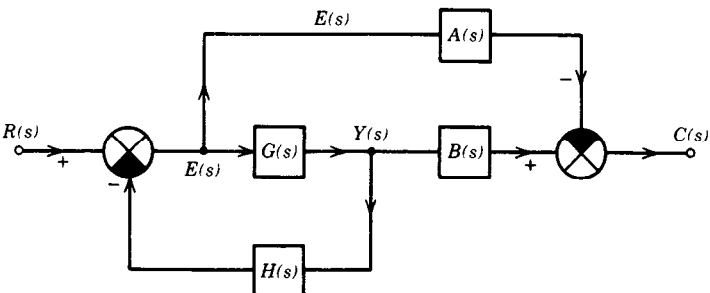
Proceso	Antes
Combinación de bloques en serie	
Combinación de bloques en paralelo	
Simplificación del ciclo básico de retroalimentación negativa	
Simplificación del ciclo básico de retroalimentación positiva	
Desplazamiento hacia adelante del punto de conexión de señales	
Desplazamiento hacia atrás del punto de conexión de señales	
Simplificación del sistema dado 1. Crear el ciclo de una sola entrada y una sola salida	

Tabla 34-9. Simplificación de diagramas de bloques (cantidades escalares) (continuación)

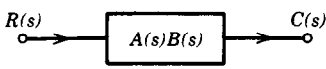
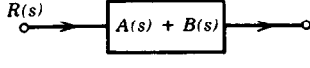
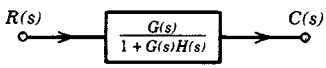
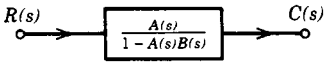
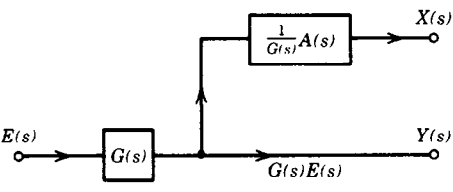
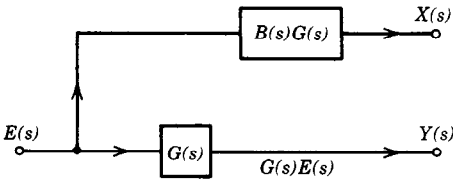
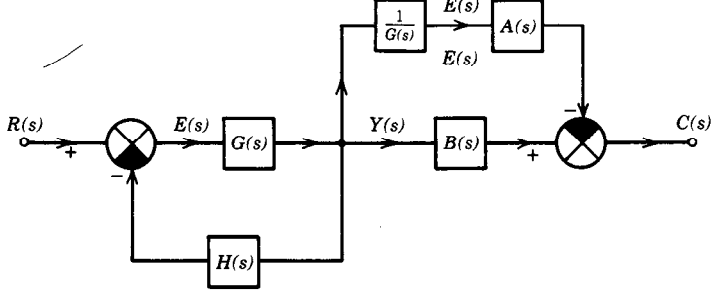
Después	Relación
	$C(s) = R(s)[A(s) \cdot B(s)]$
	$C(s) = R(s)[A(s) + B(s)]$
	$C(s) = R(s) \left[\frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)} \right]$
	$C(s) = R(s) \left[\frac{A(s)}{1 - A(s)B(s)} \right]$
	$X(s) = G(s) \frac{1}{G(s)} A(s)$ o bien $X(s) = E(s)A(s) = A(s)E(s)$ [método: dividir entre $G(s)$]
	$X(s) = B(s)G(s)E(s)$ [método: multiplicar por $G(s)$]
	Cambiar la entrada a $A(s)$ del interior del ciclo GH en el punto $E(s)$, hacia el exterior del ciclo en el punto $Y(s)$; $E(s) = \frac{1}{G(s)} Y(s)$

Tabla 34-9. Simplificación de diagramas de bloques (cantidades escalares) (continuación)

Proceso	Antes	Después	Relación
Simplificación del sistema dado (cont.)			
2. Simplificar el ciclo GH de una sola entrada y una sola salida	Ver en "Después" el resultado del paso 1	$Y(s) = \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)} R(s)$	
3. Combinar los términos en serie y en paralelo; ver los dos procesos anteriores	Ver en "Después" el resultado del paso 2	$C(s) = B(s)Y(s) - \frac{1}{G(s)} A(s)Y(s)$ o bien $C(s) = \left[B(s) - \frac{A(s)}{G(s)} \right] Y(s)$	
4. Introducir el denominador común aritmético y combinar los términos de la serie	Ver en "Después" el resultado del paso 3	$C(s) = \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)} \cdot \frac{B(s)G(s) - A(s)}{G(s)} R(s)$	
5. Resultado: simplificación final	Ver en "Después" el resultado del paso 4	$C(s) = \frac{G(s)B(s) - A(s)}{1 + G(s)H(s)} R(s)$	$\frac{G(s)}{\text{DEN}(s)} \cdot \frac{\text{NUM}(s)}{G(s)} = \frac{\text{NUM}(s)}{\text{DEN}(s)}$ NUM = numerador = $G(s)B(s) - A(s)$ DEN = denominador = $1 + G(s)H(s)$ o bien $\frac{G(s)}{G(s)} = \frac{1}{1} = 1$, se cancela $G(s)$

Tabla 34-10. Simplificación de diagramas de bloques y definición de términos

Símbolo	Ejemplo arbitrario	Definición
$R(s)$	$R_a(s) = \frac{\omega_0}{s^2 + \omega_0^2}$	Entrada al sistema de control en notación de la transformada de Laplace. A menudo se denomina entrada de referencia
$C(s)$	$C_a(s) = \frac{(s + \omega_0)}{s^2(s^2 + \omega_1^2)(s + \omega_2)}$	Salida del sistema de control en notación de la transformada de Laplace. Con frecuencia recibe el nombre de salida controlada
$G(s)$	$G_a(s) = \frac{1}{s(s + \omega_0)}$	Ganancia del elemento o bloque del sistema, generalmente en sentido hacia adelante de la entrada a la salida. A menudo se denomina función de transferencia de la planta, ganancia de la planta o ganancia hacia adelante; se expresa en el dominio de Laplace. $\omega_0, \omega_1, \omega_2$ son constantes de frecuencia angular (rad/s)
$H(s)$	$H_a(s) = \frac{1}{s}$ [para la retroalimentación unitaria $H(s) = 1$]	Ganancia del elemento o bloque del sistema, generalmente en dirección inversa o de retroalimentación, de la salida a la entrada. A menudo se llama ganancia de retroalimentación o función de transferencia de retroalimentación. Se expresa en el dominio de Laplace
$E(s)$	$E_a(s) = R_a(s) - C_a(s)$	Error del sistema de control por retroalimentación unitaria, en el dominio de Laplace. Diferencia entre la entrada de referencia deseada $R(s)$ y la salida controlada real $C(s)$. Cuando $H_a(s)$ no es la unidad, la entrada a $G(s)$ sigue llamándose $E(s)$, pero $E_a(s)$ es ahora $R_a(s) - H_a(s)C_a(s)$, que ya no es la diferencia (o error) entre R_a y C_a . Para la retroalimentación no unitaria, $E(s)$ se relaciona con el error pero no es idéntica a éste
$A(s)$	$A_a(s) = s^2 + \omega_0^2$	Ganancia del elemento del sistema, o amplificación en sentido hacia adelante, en el dominio de Laplace. Analogía exacta de $G(s)$ utilizando un símbolo diferente, común al análisis de la electrónica. ω_0 = frecuencia (rad/s)
$B(s)$	$B_a(s) = \frac{s + 1/T_1}{s + 1/T_2}$	Ganancia de la función de transferencia del elemento o bloque del sistema, en el dominio de Laplace. T_1, T_2 = constantes del tiempo (s)
$X(s)$ $Y(s)$		Variables, señales, salidas intermedias o entradas internas que existen en el sistema; se expresan en el dominio de Laplace
$r(t)$		Transformada inversa de Laplace de $R(s)$. Entrada al sistema de control en el dominio del tiempo
$c(t)$		Transformada inversa de Laplace de $C(s)$. Salida del sistema de control en el dominio del tiempo

Tabla 34-10. Simplificación de diagramas de bloques y definición de términos (continuación)

Símbolo	Ejemplo arbitrario	Definición
$f(t)$	$\frac{1}{2\pi j} \int_{C_0-j\infty}^{C_0+j\infty} F(s)e^{st} ds$ $= \sum \text{residuos } F(s)e^{st} _{\text{polos de } F(s)}$	Transformada inversa de Laplace de $F(s)$ en la región en la cual existe convergencia. C_0 = constante, a menudo igual a cero
$F(s)$	$F(s) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt$	Transformada unilateral de Laplace de $f(t)$ en la región para la cual la integral converge
s		Operador de Laplace. s = variable s de la transformada de Laplace como operador; corresponde a la diferenciación en el dominio del tiempo, ya que $sF(s) - f(t) _{t=0}$ es la transformada de Laplace de la derivada de $f(t)$. $1/s$ como operador corresponde a la integración en el dominio del tiempo, ya que $F(s)/s$ es la transformada de Laplace de $\int_0^t f(t)dt^a$

^a Cuando $f(t)$ existe para t menor que cero, la expresión de la transformada de Laplace de $\int f(t)dt$ se convierte en:

$$\frac{F(s)}{s} + \frac{\int_{-\infty}^0 f(t)dt}{s} = \text{transformada de Laplace de } \int f(t)dt$$

Si $f(t)$ contiene un pulso en $t = 0$, existen dos resultados diferentes, uno para $t = 0^-$, y otro para $t = 0^+$.

Tabla 34-11. Reglas básicas de la aritmética de diagramas de bloques o de la transformada de Laplace

Reglas para cantidades escalares	Reglas para cantidades matriciales
$A(s)B(s) = B(s)A(s)$	$A(s)B(s) \neq B(s)A(s)$
$A(s) + B(s) = B(s) + A(s)$	$A(s) + B(s) = B(s) + A(s)$
$A(s)[X(s) + Y(s)] = A(s)X(s) + A(s)Y(s)$	$A(s)[X(s) + Y(s)] = A(s)X(s) + A(s)Y(s)$
$A(s)[X(s) + Y(s)] = X(s)A(s) + Y(s)A(s)$	$A(s)[X(s) + Y(s)] \neq X(s)A(s) + Y(s)A(s)$
$[X(s) + Y(s)]A(s) = X(s)A(s) + Y(s)A(s)$	$[X(s) + Y(s)]A(s) = X(s)A(s) + Y(s)A(s)$
$C(s) = R(s) \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)} = \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)} R(s)^a$	$C(s) = [I + G(s)H(s)]^{-1}G(s)R(s)$ con términos en este orden y sólo en este orden. I = matriz identidad; $[Matriz]^{-1}$ = inversa de la matriz. La matriz debe ser cuadrada y tener un determinante distinto de cero

^a El diagrama del ciclo básico de retroalimentación negativa de la tabla 34-8 ilustra esta regla.

embargo, esto no quiere decir que todos los sistemas de este tipo lo sean. En este caso se puede aplicar uno de los métodos abreviados para predecir la estabilidad del sistema. La ecuación característica de $G(s) = 1/s^2 (s + 2)$, con $H(s) = 1$, es $s^3 + 2s^2 + 0s + 1$. El coeficiente cero, o término faltante en la ecuación característica, indica de inmediato inestabilidad. Esto se corrobora factorizando $s^3 + 2s^2 + 1 = 0$ con una calculadora HP-41c y el programa de soluciones de polinomios *Mathematics Application Pac* (paquete de aplicaciones matemáticas). Los factores son:

$$(s + 2.205569)(s - 0.102785 + j0.665457)$$

$$(s - 0.102785 - j0.665457) = 0$$

Los dos polos complejos tienen partes reales positivas; es decir, $+0.102785$. Esta parte real positiva produce una envolvente de respuesta exponencial, que tiende a infinito a la velocidad $e^{+0.102785t}$. Recuérdese que si $(s - A)$ es un factor de un polinomio, entonces $+A$ es una raíz de ese polinomio.

En la tabla 34-14 se ilustra la técnica que se utiliza para determinar la respuesta de sistemas tipo 0, 1 y 2 por el método de fracciones parciales de la transformada de Laplace. La tabla incluye las soluciones de la salida $c(t)$ para las respuestas de escalón, rampa y parabólica de un sistema tipo 0, $c_0(t)$, $c_1(t)$ y $c_2(t)$, respectivamente.

En la tabla 34-15 se presentan soluciones de salida de una respuesta de escalón y otra de rampa del siste-

ma tipo 1, $c_3(t)$ y $c_4(t)$, respectivamente, y la respuesta de escalón inestable del sistema tipo 2, $c_5(t)$. Todas estas respuestas se grafican en la tabla 34-13.

Es importante insistir en que no todos los sistemas tipo 2 son inestables, y que un sistema estable de este tipo tiene la virtud de tener un error de estado estable cero a las entradas de escalón y de rampa, y un error de seguimiento finito a una entrada de aceleración (parabólica). Esto se analiza con más detalle en la siguiente sección.

34.4.2 Errores del sistema de control

El objetivo de un sistema de control es controlar con exactitud ciertas variables, tales como la temperatura, posición o velocidad. Una manera de juzgar el desempeño de un sistema de control consiste en determinar (p. ej., medir, simular o calcular) el error del sistema en respuesta a diversos tipos estándares de señales de entrada. Si las entradas de prueba estándar (p. ej., escalón, rampa, aceleración) son idénticas a las entradas operacionales reales, estas pruebas de error de la salida al sistema pueden aplicarse directamente para juzgar los errores de desempeño del sistema real. Sin embargo, si las entradas operacionales reales no se parecen a las entradas de prueba estándar, los resultados de tales pruebas no son aplicables directamente para juzgar los errores reales de desempeño del sistema. En muchos casos prácticos, los errores de las entradas de prueba estándar sirven como una excelente guía para estimar los errores de desempeño del sistema real.

Por lo general, los errores de los sistemas reales son mayores que los producidos por la entrada de prueba estándar más simple, la entrada de escalón unitario, debido a que las entradas reales contienen otras componentes que se suman al escalón, inclusive ruido. Por tanto, si la respuesta determinística al error de escalón unitario del sistema es insatisfactoria, su respuesta de error a entradas reales del sistema que contengan entradas determinísticas y estocásticas suele ser peor, y el sistema resulta inaceptable.

Por tanto, en general debe considerarse que las entradas de prueba estándar proporcionan un estándar de desempeño de error mínimo. Una excepción evidente a esta regla ocurre cuando las entradas reales del sistema son radicalmente diferentes en el espectro de frecuencia respecto a las entradas de prueba estándar. En los casos en que el espectro de frecuencia real es de banda limitada es posible que un sistema genere errores operacionales, aceptablemente pequeños, aunque los errores de las entradas de prueba estándar que contengan todo el espectro de frecuencia (p. ej., una entrada de escalón) sean inaceptablemente grandes. Un ejemplo de este comportamiento se da en sistemas de control de aeronaves de alto rendimiento, en los que la entrada del piloto normal puede visualizarse como una señal aleatoria de banda limitada con contenido máximo de frecuencia en la vecindad de 1 Hz. Una entrada de escalón de quizá un tercio de la carrera máxima de la palanca de control desde su punto medio produciría, en general, una respuesta transitoria inaceptable además de errores inaceptablemente grandes

debido a que la señal de entrada de escalón unitario tiene un espectro de frecuencia que contiene todas las frecuencias. La mayor parte de las aeronaves de alto rendimiento filtran cualesquiera señales de alta frecuencia introducidas en su ciclo de control. Este filtrado se produce en forma electrónica en una aeronave controlada por cables o por electricidad, o en formas mecánica, hidráulica o neumática por medio de filtros pasabajas adecuados. Los cables de control flexibles, superficies de control torsionalmente elásticas y elementos estructurales flexibles tienden a redondear la esquina aguda de la respuesta de escalón, lo que reduce el contenido de alta frecuencia de la señal. Además, el piloto tiende a actuar como un filtro pasabajas, con respuesta a la frecuencia en la vecindad de 1 Hz.

La definición de error del sistema es diferente para los sistemas de retroalimentación unitaria y no unitaria. En base a la tabla 34-16 para el caso de la retroalimentación no unitaria, el error se toma como la salida del comparador (o sustractor), que compara la entrada de referencia $R(s)$ con la señal de retroalimentación $X(s)$. Por tanto, el error $E(s)$ es:

$$E(s) = R(s) - X(s) \quad (34-10)$$

o bien:

$$E(s) = R(s) - H(s)C(s) \quad (34-11)$$

El error definido por la ecuación 34-11 no es la diferencia entre la entrada y la salida del sistema, que es la definición usual del caso de retroalimentación unitaria de la tabla 34-16, sino que es la diferencia entre la entrada y la señal de retroalimentación.

Es posible que dos sistemas tengan funciones de transferencia de ciclo cerrado idénticas y errores diferentes para entradas y salidas idénticas. Esto ocurrirá si un sistema tiene diferentes ganancias hacia adelante y de retroalimentación respecto al otro sistema. Considérese el sistema de retroalimentación unitaria estándar que se ilustra en la tabla 34-16. Para un sistema de retroalimentación unitaria, el error $E_1(s)$ es:

$$E_1(s) = R(s) - X_1(s) \quad (34-12)$$

o bien:

$$E_1(s) = R(s) - C(s) \quad (34-13)$$

Obsérvese que la ecuación 34-13 difiere de la 34-11. Si $R(s)$ y $C(s)$ son idénticos en ambos casos y $H(s)$ no es la unidad, entonces $E(s)$ diferirá de $E_1(s)$. Esto se demuestra en la tabla 34-17, que ilustra las respuestas de entrada, salida, retroalimentación y error en función del tiempo de dos sistemas con las mismas funciones de transferencia, pero cuyas ganancias hacia adelante y funciones de transferencia de retroalimentación son diferentes. En esta tabla las entradas y salidas son idénticas pero los errores son distintos.

Las entradas de prueba estándar son las entradas de escalón, rampa y parabólica unitarios. Cuando estas

Tabla 34-12. Simplificación de la gráfica de flujo de señales (cantidades escalares)

Proceso	Antes	Después
Combinación de ramas en serie		
	$C(s) = [A(s)B(s)]R(s)$	
Combinación de ramas en paralelo		
	$C(s) = [A(s) + B(s)]R(s)$	
Simplificación del ciclo de retroalimentación negativo básico		
	$C(s) = \{G_1(s)/[1 + G_1(s)H_1(s)]\}R(s) = G(s)R(s)^a$	
Fórmula de la ganancia de Mason		
	$G(s) = \sum \frac{P_k \Delta_k}{\Delta} = \frac{P_1 \Delta_1 + P_2 \Delta_2}{\Delta}$ <p>Todas las trayectorias progresivas k Para dos trayectorias progresivas</p>	
	<p>TRAYECTORIA PROGRESIVA P_1</p> <p>TRAYECTORIA PROGRESIVA P_2</p>	
	$G(s) = \frac{A + G_1 G_2}{1 + G_1 H_1 + G_1 G_2 H_2 + A H_2}$ <p>(la notación s se sobreentiende)</p>	
	$P_1 = A$ $P_2 = G_1 G_2$	

Tabla 34-12. Simplificación de la gráfica de flujo de señales (cantidades escalares) (continuación)

Deducción de la $G(s)$ inmediatamente anterior, usando la fórmula de la ganancia de Mason:

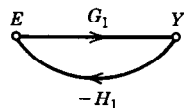
Definición de ciclos

L_i = todos los ciclos individuales, L_1, L_2, L_3

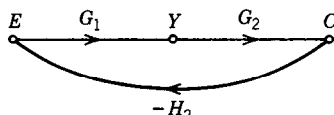
$L_i L_j$ = todas la combinaciones de dos ciclos que *no* tengan nodos comunes; es decir, ciclos que no se toquen. Aquí son cero

$L_i L_j L_k$ = todas las combinaciones de tres ciclos que no se toquen. Aquí son cero

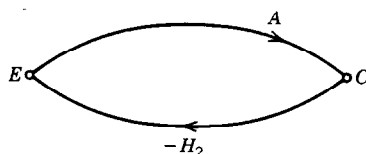
Ciclo 1 = $\underline{L_1 = -G_1 H_1}$



Ciclo 2 = $\underline{L_2 = -G_1 H_2 H_2}$



Ciclo 3 = $\underline{L_3 = -A H_2}$



$L_1 L_2 = L_2 L_3 = L_1 L_3 = 0$, ya que todos estos ciclos se tocan entre sí en el nodo E

$L_1 L_2 L_3 = 0$, porque todos estos ciclos se tocan entre sí en el nodo E

Definición de Δ (=determinante de la gráfica), Δ_k (subdeterminante)

$$\Delta = 1 - \sum_i L_i + \sum_{ij} L_i L_j - \sum_{ijk} L_i L_j L_k \dots$$

$$\Delta = 1 - \sum_i (L_1 + L_2 + L_3) + \sum_{ij} (0) - \sum_{ijk} (0) \dots$$

$$\Delta = 1 - (-G_1 H_1 - G_1 G_2 H_2 - A H_2) + 0 - 0 + \dots$$

$$\Delta = \underline{1 + G_1 H_1 + G_1 G_2 H_2 + A H_2} = \text{determinante de la gráfica}$$

$\Delta_k = \Delta$, donde todos los términos que contienen un elemento o rama cualquiera que toca la trayectoria P_k se eliminan por completo. Es decir, el término de la ganancia del ciclo $G_1 G_2 H_2$ se elimina por completo si uno o dos de los tres elementos tocan la trayectoria P_k . Para el ejemplo que se muestra, dados $K = 1$, $P_k = P_1 = A$ y

$$\Delta_1 = 1 + \cancel{G_1 H_1} + \cancel{G_1 G_2 H_2} + \cancel{A H_2} \quad \text{o bien} \quad \underline{\underline{\Delta_1 = 1}}$$

Se eliminan tres términos, debido a que los tres tocan la trayectoria $P_1 = A$ en el nodo E. Obsérvese que el ciclo $G_1 H_1$ se elimina aunque no contenga ninguna rama de $P_1 = 1 \cdot A \cdot 1$; basta un toque en el nodo E. Análogamente $\underline{\underline{\Delta_2 = 1}}$, $P_2 = G_1 G_2$, por la misma razón, o sea, todos los ciclos tocan la trayectoria P_2 en el nodo E.

$$P_1 \Delta_1 = A \cdot 1 = \underline{\underline{A}}$$

$$P_2 \Delta_2 = G_1 G_2 1 = G_1 G_2$$

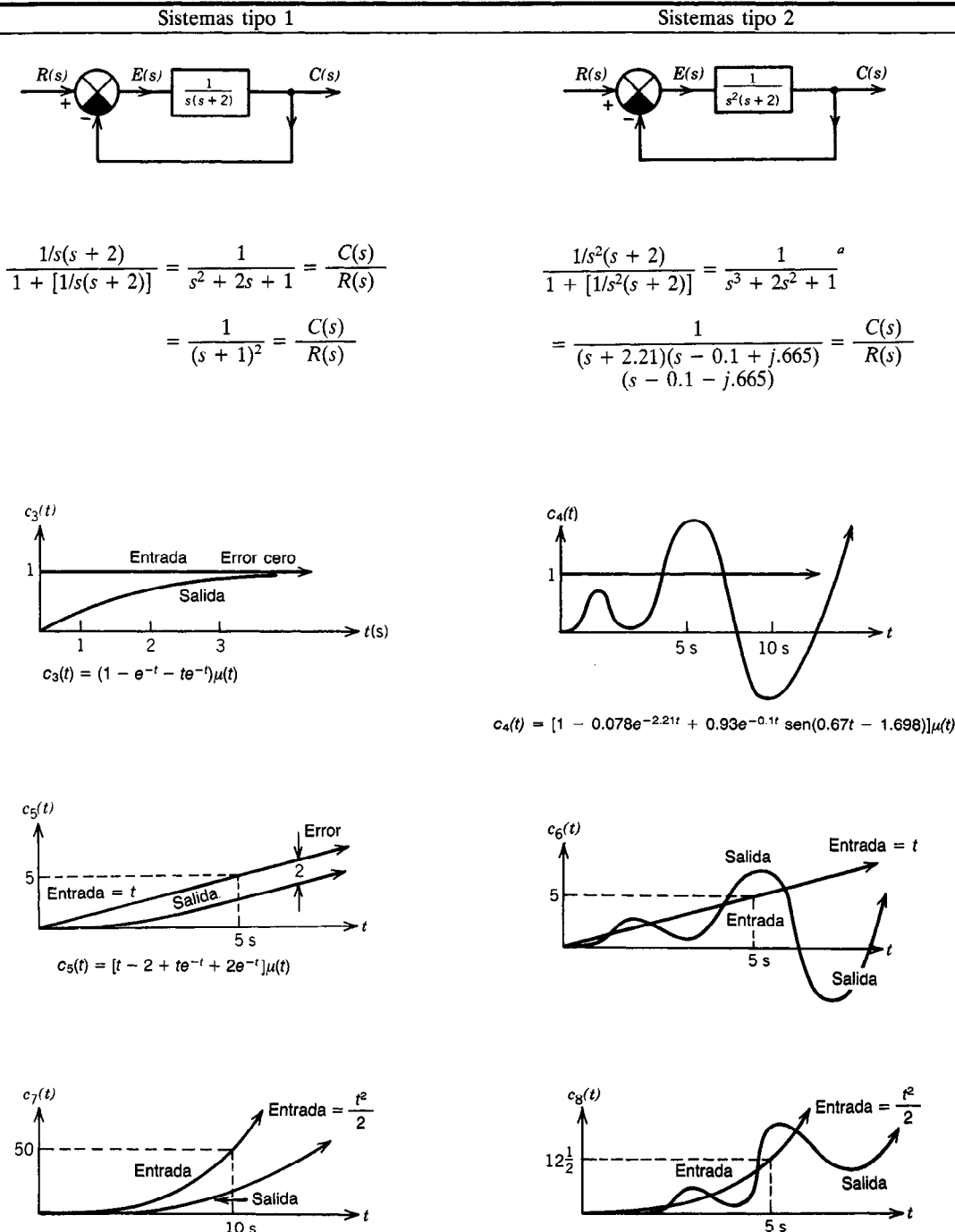
^a Esta simplificación no suele emplearse; más bien se incorpora en la fórmula de la ganancia de Mason.

^b Se requiere la ganancia dirigida de la unidad entre $R(s)$ y $E(s)$. Su omisión es una fuente de error común, que transforma los ciclos que no se tocan en ciclos que sí se tocan. Referencia bibliográfica 6, K. Ogata, *Modern Control Engineering*, págs. 124 a 128.

Tabla 34-13. Diagrama de bloques, función de transferencia y respuestas de sistemas tipo 0, 1 y 2 a entradas de escalón, de rampa y parabólica

Variable	Sistemas tipo 0
Diagrama de bloques	
Función de transferencia	$\frac{1/(s+2)}{1 + 1/(s+2)} = \frac{1}{s+3}$ $= \frac{C(s)}{R(s)}$
Respuesta de escalón unitario $r(t) = \mu(t)$	$c_0(t) = \frac{1}{3} (1 - e^{-3t})\mu(t)$
Respuesta de rampa unitaria $r(t) = t$	$c_1(t) = \left[\frac{t}{3} - \frac{1}{9} (1 - e^{-3t}) \right] \mu(t)$
Respuesta parabólica unitaria $r(t) = t^2/2$	$c_2(t) = \left[\frac{t^2}{6} - \frac{t}{9} + \frac{1}{27} (1 - e^{-3t}) \right] \mu(t)$

Tabla 34-13. Diagrama de bloques, función de transferencia y respuestas de sistemas tipo 0, 1 y 2 a entradas de escalón, de rampa y parabólica (continuación)



^aFalta el término s^1 , por tanto es inestable

Tabla 34-14. Cálculo de la solución de la salida $c(t)$ a las entradas de escalón, de rampa y parabólica unitarias del sistema tipo 0^a

Sistema tipo 0, entrada de escalón	Sistema tipo 0, entrada de rampa	Sistema tipo 0, entrada parabólica
$C_0(s) = R(s) \frac{1}{s+3}$, $R(s) = \frac{1}{s}$ = escalón unitario	$C_1(s) = R(s) \frac{1}{s+3}$, $R(s) = \frac{1}{s^2}$ = rampa unitaria	$C_2(s) = R(s) \frac{1}{s+3}$, $R(s) = \frac{1}{s^3}$ = parábola unitaria = $\frac{t^2}{2}$
$C_0(s) = \frac{1}{s} \frac{1}{s+3} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s+3}$ desarrollo en fracciones parciales	$C_1(s) = \frac{1}{s^2(s+3)} = \frac{A}{s^2} + \frac{B}{s} + \frac{D}{s+3}$	$C_2(s) = \frac{1}{s^3(s+3)} = \frac{A}{s^3} + \frac{B}{s^2} + \frac{D}{s} + \frac{E}{s+3}$
$A = sC_0(s) _{s=0} = \frac{1}{s+3} _{s=0} = \frac{1}{3}$	$A = s^2C_1(s) _{s=0} = \frac{1}{s+3} _{s=0} = \frac{1}{3}$	$A = s^3C_2(s) _{s=0} = \frac{1}{s+3} _{s=0} = \frac{1}{3}$
$B = (s+3)C_0(s) _{s=-3} = \frac{1}{s} _{s=-3} = -\frac{1}{3}$	$B = \frac{1}{1!} \frac{d}{ds} [s^2C_1(s)] _{s=0} = \frac{1}{1!} \frac{d}{ds} \left[\frac{1}{s+3} \right] _{s=0}$	$B = \frac{1}{1!} \frac{d}{ds} [s^3C_2(s)] _{s=0} = \frac{d}{ds} \left[\frac{1}{s+3} \right] _{s=0}$
$C_0(s) = \frac{1/3}{s} + \frac{-1/3}{s+3}$	$B = 1 \left[\frac{-1}{(s+3)^2} \right] _{s=0} = -\frac{1}{3^2} = -\frac{1}{9}$	$B = \left[\frac{-1}{(s+3)^2} \right] _{s=0} = -\frac{1}{3^2} = -\frac{1}{9}$
Transformando mediante la tabla 34-6	$D = (s+3)C_1(s) _{s=-3} = \frac{1}{s^2} _{s=-3} = -\frac{1}{9}$	$D = \frac{1}{2!} \frac{d^2}{ds^2} [s^3C_2(s)] _{s=0} = \frac{1}{2} \frac{d^2}{ds^2} \left[\frac{1}{s+3} \right] _{s=0}$
$c_0(t) = \frac{1}{3}u(t) - \frac{1}{3}e^{-3t}u(t)^b$	$C_1(s) = \frac{1/3}{s^2} + \frac{-1/6}{s} + \frac{1/6}{s+3}$	$D = \frac{1}{2} \frac{(-1)(-1)2(s+3)}{(s+3)^4} _{s=0} = \frac{1}{(s+3)^3} _{s=0} = \frac{1}{27}$
Respuesta	Transformando mediante la tabla 34-6	$E = (s+3)C_2(s) _{s=-3} = \frac{1}{s^3} _{s=-3} = -\frac{1}{27}$
$c_0(t) = \frac{1}{3}(1 - e^{-3t})u(t)$	$c_1(t) = \frac{1}{3}tu(t) - \frac{1}{6}u(t) + \frac{1}{6}e^{-3t}u(t)$	$C_2(s) = \frac{1/3}{s^3} + \frac{-1/6}{s^2} + \frac{1/27}{s} + \frac{-1/27}{s+3}$
Para $t \gg 0$, $c_0(t) = \frac{1}{3}$	Respuesta	Transformando mediante la tabla 34-6
Verificación	$c_1(t) = \frac{1}{3}tu(t) - \frac{1}{6}(1 - e^{-3t})u(t)$	Respuesta
$c_0(t) _{t=0} = 0?$	Verificación	$C_2(t) = \left[\frac{t^2}{6} - \frac{t}{9} + \frac{1}{27} - \frac{1}{27}e^{-3t} \right] u(t)$
$c_0(0+) = \frac{1}{3}(1 - e^{0+})u(0+) = \frac{1}{3}(1 - 1)(1) = 0$	$c_1(0+) = \frac{1}{3}(0+)(1) - \frac{1}{6}(1 - 1)(1) = 0V$	Verificación
		$c_2(0+) = \frac{1}{3} - \frac{1}{6} + \frac{1}{27} - \frac{1}{27}e^0 = \frac{1}{27} - \frac{1}{27} = 0V$

^a En los tres casos, $G(s) = 1/(s+2)$ y $C(s)/R(s) = 1/s+3$, como se muestra en la tabla 34-13, línea uno.

^b $u(t)$ = función de escalón unitario. $u(t) = 0$, $t < 0$. $u(t) = 1$, $t > 0$.

Tabla 34-15. Cálculo de la solución de salida $c(t)$ a las entradas de escalón y de rampa del sistema tipo 1 $G(s) = 1/(s+2)$ y $C(s)/R(s) = 1/(s+1)^2$ y a la entrada de escalón del sistema tipo 2 $G(s) = 1/s^2(s+2)$, $H(s) = 1$

Sistema tipo 1, entrada de escalón, $G(s) = \frac{1}{s(s+1)}$, $H(s) = 1$	Sistemas tipo 1, entrada de rampa, $G(s) = \frac{1}{s^2(s+2)}$, $H(s) = 1$
$\frac{C_3(s)}{R(s)} = \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)}$	$C_5(s) = R(s) \frac{1}{(s+1)^2}$, $R(s) = \frac{1}{s^2}$ rampa unitaria $\Rightarrow \frac{1}{s^2} \Rightarrow t$
$\frac{C_3(s)}{R(s)} = \frac{1}{s^2 + 2s + 1} = \frac{1}{(s+1)^2}$	$C_5(s) = \frac{1}{s^2} \frac{1}{(s+1)^2} = \frac{A}{s^2} + \frac{B}{s} + \frac{D}{(s+1)^2} + \frac{E}{s+1}$ (desarrollo en fracciones parciales)
$C_3(s) = R(s) \frac{1}{(s+1)^2}$, $R(s) = \frac{1}{s}$	$A = s^2 C_5(s) _{s=0} = \frac{1}{(s+1)^2} _{s=0} = \frac{1}{1} = 1$
$C_3(s) = \frac{1}{s} \frac{1}{(s+1)^2} = \frac{A}{(s+1)^2} + \frac{B}{s+1} + \frac{D}{s}$	$B = \frac{1}{1!} \frac{d}{ds} [s^2 C_5(s)] _{s=0} = \frac{d}{ds} \left[\frac{1}{(s+1)^2} \right] _{s=0} = \frac{-2}{(s+1)^3} _{s=0} = \frac{-2}{1} = -2$
$A = (s+1)^2 C_3(s) _{s=-1} = \frac{1}{s} _{s=-1} = -1$	$D = (s+1)^2 C_5(s) _{s=-1} = \frac{1}{s^2} _{s=-1} = \frac{1}{1} = 1$
$B = \frac{1}{1!} \frac{d}{ds} [(s+1)^2 C_3(s)] _{s=-1} = \frac{d}{ds} \left[\frac{1}{s} \right] _{s=-1}$	$E = \frac{1}{1!} \frac{d}{ds} [(s+1)^2 C_5(s)] _{s=-1} = \frac{d}{ds} \left[\frac{1}{s^2} \right] _{s=-1} = \frac{-2}{s^3} _{s=-1} = \frac{-2}{-1} = +2$
$B = \frac{-1}{s^2} _{s=-1} = -1$	$C_5(s) = \frac{1}{s^2} + \frac{-2}{s} + \frac{1}{(s+1)^2} + \frac{2}{s+1}$
$D = s C_3(s) _{s=0} = \frac{1}{(s+1)^2} _{s=0} = 1$	Invirtiendo mediante la tabla 34-6
$C_3(s) = \frac{-1}{(s+1)^2} + \frac{-1}{s+1} + \frac{1}{s}$	Respuesta
Transformando mediante la tabla 34-6	$C_5(t) = (t - 2 + te^{-t} + 2e^{-t})u(t)$
Respuesta	Verificación
$c_3(t) = [-te^{-t} - e^{-t} + 1]u(t)$	$C_5(+0) = 0?$
Verificación	$C_5(0+) = (0 - 2 + 0 + 2) = 0 \checkmark$
$c_3(t) _{t=0+} = 0?$	Para $t \gg 0$,
$c_3(0t) = [-(-0)e^0 - e^0 + 1] = 0 - 1 + 1 = 0 \checkmark$	$C_5(t) = t - 2$
Para $t \gg 0$, $c_3(t) = 1$	

Tabla 34-15. Cálculo de la solución de salida $c(t)$ a las entradas de escalón y de rampa del sistema tipo 1 $G(s) = 1/(s + 2)$ y $C(s)/R(s) = 1/(s + 1)^2$ y a la entrada de escalón del sistema tipo 2 $G(s) = 1/s^2(s + 2)$, $H(s) = 1$ (continuación)

Sistema tipo 2, entrada de escalón, $G(s) = \frac{1}{s^2(s + 2)}$, $H(s) = 1$, $R(s) = \frac{1}{s}$

$$C_4(s) = R(s) \frac{1}{s^3 + 2s^2 + 1} = R(s) \frac{1}{(s + 2.21)(s - 0.1 + j0.665)(s - 0.1 - j0.665)} \text{ se usan raíces aproximadas}$$

$$\frac{C_4(s)}{R(s)} = \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)}$$

$$\frac{C_4(s)}{R(s)} = \frac{1}{s^3 + 2s^2 + 1}$$

$$C_4(s) = \frac{1}{s} \frac{1}{(s + 2.21)(s - 0.1 + j0.67)(s - 0.1 - j0.67)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s + 2.21} + \frac{M/\theta}{s - 0.1 + j0.67} + \frac{M/\theta}{s - 0.1 - j0.67} \text{ (término conjugado)}$$

$$A = sC_4(s)|_{s=0} = \frac{1}{s^3 + 2s^2 + 1} \Big|_{s=0} = \frac{1}{1} = 1 \text{ [Nota: } (s - 0.1 + j0.67)(s - 0.1 - j0.67) \approx s^2 - 0.206s + 0.453]$$

$$B = (s + 2.21)C_4(s) \Big|_{s=-2.21} = \frac{1}{s(s^2 - 0.206s + 0.453)} \Big|_{s=-2.21} = \frac{1}{-12.8} = -0.078$$

$M \angle \theta$ = magnitud en el ángulo θ del residuo complejo del polo $s = 0.1 - j0.67$

$$M \angle \theta = (s - 0.1 + j0.67)C_4(s) = \frac{1}{s(s + 2.21)(s - 0.1 - j0.67)} \Big|_{s=0.1-j0.67}$$

$$M \angle \theta = \frac{1}{(0.1 - j0.67)(2.31 - j0.67)(-j1.34)} = \frac{1}{0.677 \angle -81.5^\circ \cdot 2.41 \angle -16.2^\circ \cdot 1.34 \angle -90^\circ}$$

Esquemas de conversiones polares

$$M \angle \theta = 0.465 \angle 187.3^\circ \quad \begin{array}{c} 0.1 \\ \nearrow \\ -j0.67 \end{array} \quad \begin{array}{c} 2.31 \\ \nearrow \\ -j0.67 \end{array} \quad \begin{array}{c} 2.41 \angle -16.2^\circ \\ \nearrow \\ -j1.34 \end{array}$$

Tabla 34-15. Cálculo de la solución de salida $c(t)$ a las entradas de escalón y de rampa del sistema tipo 1 $G(s) = 1/s(s+2)$ y $C(s)/R(s) = 1/(s+1)^2$ y a la entrada de escalón del sistema tipo 2 $G(s) = 1/s^2(s+2)$, $H(s) = 1$ (continuación)

Al insertar A , B y $M \angle \theta$ en $C_4(s)$ se produce:

$$C_4(s) = \frac{1}{s} + \frac{-0.078}{s+2.21} + \frac{0.465 \angle 187.3^\circ}{s-0.1+j0.67} + \text{conjugado}$$

(Obsérvese que $M \angle \theta$ es el numerador del término $+j\omega$, con denominador de $s-0.1+j0.67$, que tiene un polo en $s = +0.1-j0.67$). El término conjugado no se usa. Transformando mediante la relación:

$$\frac{M \angle \theta}{s + \alpha + j\omega} + \text{conj.} \Rightarrow [2Me^{-\alpha t} \sin(\omega t + 90^\circ - \theta^\circ)] \mu_s(t)$$

donde: $\alpha = -0.1$

$$\omega = 0.67$$

$$2M = 2(0.465) = 0.93$$

$$\theta^\circ = 187.3^\circ$$

$$90^\circ - \theta^\circ = -97.3^\circ$$

$$-97.3^\circ = -1.698 \text{ rad}$$

$$\frac{1}{s} \Rightarrow 1\mu_s(t)$$

$$\frac{K}{s+\beta} \Rightarrow Ke^{-\beta t} \mu_s(t)$$

Respuesta

$$C_4(t) = [1 - 0.078e^{-2.21t} + 0.93e^{0.1t} \sin(0.67t - 1.698 \text{ rad})] \mu_s(t)^b$$

Verificación

$$C_4(0+) = 0?$$

$$C_4(0+) = 1 - 0.078e^0 + 0.93e^0 \sin(-97.3^\circ) = 1 - 0.078 + 0.93(-0.99) \approx 0.00 \checkmark$$

Valores tabulados de $C_4(t)$, que se grafican en la tabla 34-13

t	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
$C_4(t)$	0.0	0.11	0.60	0.02	2.15	2.5	2.2	1.3	-0.03	-1.1	-1.4	-0.6	1.2	3.3	4.7	4.7

^a Como falta el término s^1 en la ecuación característica de $C_4(s)$, $C_4(t)$ sería inestable, como lo indica la parte real negativa de las raíces complejas (-0.1) , lo que produciría una respuesta exponencial creciente $e^{+0.1t}$.

^b La función multiplicativa $\mu_s(t)$ indica que $C_4(t) = 0$ para $t < 0$.

entradas se aplican a un sistema tipo 0, 1 o 2, los errores de estado estable se encuentran sin dificultad aplicando el teorema del valor final de la transformada de Laplace [$\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sE(s)$]. En base a la tabla 34-16:

$$E(s) = R(s) \frac{1}{1 + G(s)H(s)} \quad (34-14)$$

Por tanto, para una entrada de escalón unitario (entrada de posición) $r_p(t) = u(t)$ (o bien $R_p(s) = 1/s$), y $E(s)$ se convierte en:

$$E_p(s) = \frac{1}{s} \frac{1}{1 + G(s)H(s)} \quad (34-15)$$

El valor final de $e(t)$, cuando t tiende a infinito, está dado entonces por:

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} e(t) &= e_{ss}(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot E_p(s) = \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s}{s} \cdot \frac{1}{1 + G(s)H(s)} \end{aligned}$$

o bien:

$$\lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{1 + G(s)H(s)} = \frac{1}{1 + \lim_{s \rightarrow 0} G(s)H(s)} \quad (34-16)$$

donde $e_{ss}(t)$ = error de estado estable cuando $t \rightarrow \infty$.

La constante de error en posición K_p se define directamente a partir de la ecuación 34-16 como:

$$K_p = \lim_{s \rightarrow 0} G(s)H(s) \quad (34-17)$$

Por tanto, la ecuación 34-16 puede expresarse así:

$$e_{ss}(t) = \frac{1}{1 + K_p} \text{ para la entrada de escalón unitario} \quad (34-18)$$

De manera análoga, es posible determinar el error de una entrada de rampa o velocidad unitaria $r_v(t) = tu(t)$ (o bien $R_v(s) = 1/s^2$) y una entrada parabólica o de aceleración unitaria $r_a(t) = (t^2/2)u(t)$ [o bien $R_a(s) = 1/s^3$]*. Para estos errores, se definen una constante de error de velocidad K_v y una constante de aceleración K_a . Estas definiciones y los errores resultantes se resumen en la tabla 34-18.

La fuente de error más común al utilizar constantes de error es la omisión u olvido de que una entrada parabólica unitaria es $(1/2)t^2$. El olvido del término $1/2$ lleva a un factor extra de 2 en el error resultante. Las ecuaciones de la tabla 34-18 se aplican a 11 sistemas de tipos 0 al 3 y de órdenes 1 al 4 en la tabla 34-19. Se tabulan las constantes de error y los errores de estado estable resultantes, junto con el orden, tipo y función de transferencia de ciclo cerrado de cada sistema.

*Para detalles leer, por ejemplo, Kuo⁷.

Para ilustrar los procedimientos que se utilizan, los errores de $C_0(t)$, $C_3(t)$ y $C_5(T)$ de la tabla 34-13 se calculan en la tabla 34-20.

Es importante insistir en que un sistema debe ser estable para que estas constantes de error tengan significado. Si un sistema tiene raíces en la mitad derecha del plano s o bien sobre el eje $j\omega$ (p. ej., si las raíces de la ecuación característica del sistema tienen partes reales positivas), entonces las constantes de error carecen de significado (aunque tengan valores perfectamente razonables).

A título ilustrativo, en la tabla 34-19 se presentan dos sistemas en los que $G(s) = 1/s^2(s + 2)$ y cuyos errores son infinitos debido a que los sistemas son inestables; no obstante, los errores de estado estable predichos son finitos o cero.

34.4.3 Estabilidad del sistema de control

Existen muchos métodos para analizar o predecir la estabilidad de los sistemas de control por retroalimentación, en base al examen de ciertas características de un modelo o ecuación matemáticos que describan el sistema.

Algunos de los métodos de aplicación más común son intuitivamente satisfactorios; se pueden entender examinando el modelo muy común de un sistema de control por retroalimentación de ciclo único que se presenta en la figura 34-5. Ambas figuras son equivalentes y producen la misma expresión matemática de la ganancia, o función de transferencia, del sistema de ciclo cerrado:

Función de transferencia

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)} \quad (34-19)$$

donde s = variable de la transformada de Laplace

$$s = \sigma + j\omega$$

$$E = \text{error} = R(s) + H(s)C(s)$$

La ecuación 34-19 se deduce en la tabla 34-8 para la reducción de diagramas de bloques, y en la tabla 34-12 para las gráficas de flujo de señales.

Concepto básico de predicciones de la estabilidad

El concepto básico de predicción de la estabilidad implica el examen de $G(s)H(s)$ en el denominador de la ecuación 34-19. A $G(s)H(s)$ se le llama ganancia del ciclo o ganancia de ciclo abierto.

Si para algún valor de s , por ejemplo $s = s_0$, el valor numérico de $G(s)H(s)$ se convierte en el número real menos uno, entonces la ecuación 34-19 se transforma en:

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)} \Big|_{s=s_0} = \frac{G(s_0)}{1 - 1} = \frac{G(s_0)}{0}$$

No definida, inestable o infinita (34-20)

Por tanto, si la cantidad $G(s)H(s)$ llega a tomar el valor -1 , los sistemas de control por retroalimentación

Tabla 34-16. Error de sistemas con retroalimentación no unitaria y unitaria

Sistema y diagrama de bloques	Cálculo del error
Sistemas con retroalimentación no unitaria	
<p style="text-align: center;">$X(s) = H(s)C(s)$</p>	$C(s) = E(s)G(s)$ $E(s) = \text{Error} = C(s) \frac{1}{G(s)}$ $E(s) = R(s) - X(s)$ $E(s) = R(s) - H(s)C(s)$ <p>Asimismo</p> $\frac{E(s)}{R(s)} = \frac{C(s)}{R(s)} \cdot \frac{1}{G(s)} = \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)} \cdot \frac{1}{G(s)}$ $\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)}$ $\frac{E(s)}{R(s)} = \frac{1}{1 + G(s)H(s)}$ $E(s) = \frac{R(s)}{1 + G(s)H(s)}$
Sistema con retroalimentación unitaria	
<p style="text-align: center;">$X_1(s) = C(s)$</p>	$C(s) = E_1(s)G(s)$ $E_1(s) = R(s) - X_1(s)$ $E_1(s) = R(s) - C(s)$ $E_1(s) = C(s) \cdot \frac{1}{G(s)}$ <p>Asimismo</p> $\frac{E_1(s)}{R(s)} = \frac{C(s)}{R(s)} \cdot \frac{1}{G(s)} = \frac{G(s)}{1 + G(s)} \cdot \frac{1}{G(s)}$ $= \frac{1}{1 + G(s)}$ $\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{G(s)}{1 + G(s)}$ $E_1(s) = \frac{R(s)}{1 + G(s)}$

Tabla 34-17. Diferentes errores producidos por dos sistemas con idénticas funciones de transferencia

Variable	Error de retroalimentación no unitaria, entrada de escalón unitario	Error de retroalimentación unitaria, entrada de escalón unitario
Diagrama de bloques		
Función de transferencia de ciclo cerrado	$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{G}{1+GH} = \frac{1/s}{1+2/s} = \frac{1}{s+2}$ $G = 1/s, H = 2$	$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{G}{1+GH} = \frac{1/(s+1)}{1+[1/(s+1)]} = \frac{1}{s+2}$ $G = \frac{1}{s+1}, H = 1$
Entrada $r(t)$		
Salida $c(t)$		

Tabla 34-17. Diferentes errores producidos por dos sistemas con idénticas funciones de transferencia (*continuación*)

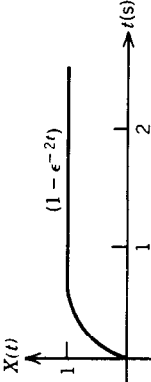
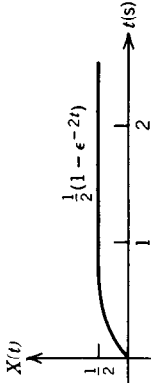
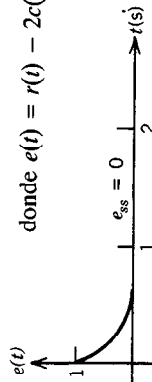
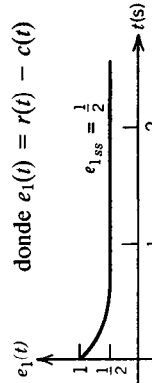
Variable	Error de retroalimentación no unitaria, entrada de escalón unitario	Error de retroalimentación unitaria, entrada de escalón unitario
Retroalimentaciones $x(t)$		
Error $e(t) = r(t) - x(t)$		
Constante de error de posición	$K_p = \lim_{s \rightarrow 0} G(s)H(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{2s} = \infty$	$K_p = \lim_{s \rightarrow 0} G(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{s+1} = 1$
Error de estado estable de la entrada de escalón unitario	$e_{ss} = \frac{R}{1 + K_p} = \frac{1}{1 + \infty} = 0$	$e_{ss} = \frac{R}{1 + K_p} = \frac{1}{1 + 1} = \frac{1}{2}$

Tabla 34-18. Constantes de error de entradas de escalón, de rampa y parabólica

Entrada	Función del tiempo de entrada	Transformada de Laplace de entrada	Constante de error	Errores de estado estable en el dominio del tiempo
Escalón o posición	$Ru_s(t)^a$	R/s	$K_p = \lim_{s \rightarrow 0} G(s)H(s)$	$e_{ss}(t) = \frac{R}{1 + K_p}$
Rampa o velocidad	$Rtu_s(t)$	R/s^2	$K_v = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot G(s)H(s)$	$e_{ss}(t) = \frac{R}{K_v}$
Parábola o aceleración	$\frac{Rt^2}{2} u_s(t)$	$\frac{R}{s^3}$	$K_a = \lim_{s \rightarrow 0} s^2 G(s)H(s)$	$e_{ss}(t) = \frac{R}{K_a}$

^a R es una constante que indica la amplitud de las diversas funciones de entrada. Para una entrada de escalón, de rampa o parabólica unitarias, $R = 1$. Para un escalón de altura 206.3, $R = 206.3$, $u_s(t)$ = función de escalón unitario, $u_s(t) = 0$ para $t < 0$ y $u_s(t) = 1$ para $t > 0$. Según la aplicación, $u_s(t)$ para $t = 0$ se toma en diversas formas como 0, 1/2 o 1. A menudo se verá $u(0+) = 1$ o $u(0-) = 0$. El valor de 1/2 se obtiene promediando los límites $u_s(0+)$ y $u_s(0-)$ y se denomina valor principal.

que se ilustran en la figura 34-5 presentan una respuesta no acotada. Dado que la estabilidad de un sistema lineal se define como una salida acotada para una entrada acotada, los sistemas se vuelven inestables. En tres de las técnicas para analizar la estabilidad de un sistema de control por retroalimentación se emplea la ecuación $G(s)H(s) = -1$; tales técnicas son el método de la gráfica de Bode, la técnica de Nyquist y el método del lugar geométrico de la raíz.

Las técnicas de Bode y Nyquist son métodos del dominio de la frecuencia, donde la variable general de Laplace $s = \sigma + j\omega$ se sustituye por la variable imaginaria pura $j\omega$ (donde ω representa la frecuencia real, medida en radianes por segundo, y j es la raíz cuadrada de -1).

En la técnica del lugar geométrico de la raíz se utilizan las partes real (σ) e imaginaria ($j\omega$) de la variable de Laplace s .

Los métodos de Bode, Nyquist y del lugar geométrico de la raíz determinan la estabilidad de los sistemas de ciclo cerrado mediante el examen de la ganancia de ciclo abierto $G(s)H(s)$. Ésta constituye una simplificación muy importante, ya que las ecuaciones del sistema de ciclo abierto a menudo están en forma factorizada, mientras que las ecuaciones del sistema de ciclo cerrado con frecuencia se encuentran en forma no factorizada. Resulta mucho más sencillo trabajar con las ecuaciones factorizadas, lo que explica en parte la popularidad de estos tres métodos.

Técnica de Bode. En la técnica de Bode se emplean dos gráficas logarítmicas de $G(s)H(s)$. La primera es una gráfica de $20 \log |G(j\omega)H(j\omega)|$ en función de $\log \omega$. Por lo general se utiliza una escala logarítmica para el eje ω , de manera que en realidad no se necesita evaluar logaritmos. A partir de estas dos gráficas, resulta relativamente fácil determinar si es posible que se produzca la condición $G(j\omega)H(j\omega) = -1$ (0 dB en un ángulo $\pm 180^\circ$).

La aplicación real de la técnica de la gráfica de Bode implica una multitud de contingencias analizadas por Ogata⁶, Kuo⁷, Shinnars⁸, y D'Azzo y Houpis¹⁰, y en otros libros normales en que se aborda el tema de la teoría clásica del control. Los procedimientos para construir una gráfica de Bode se especifican a continuación:

1. Se reduce un sistema complejo a un sistema de retroalimentación de ciclo único equivalente, con ganancia hacia adelante $G(s)$ y ganancia de retroalimentación $H(s)$.
2. Se forma la ganancia de ciclo $G(s)H(s)$ y se factorizan el numerador y el denominador en un término real de primer orden y un término cuadrático de segundo orden, más una constante de ganancia y un término s^n . Por ejemplo:

$$G(s)H(s) = \frac{740(s + 2)}{s(s + 15)(s^2 + 6s + 25)}$$

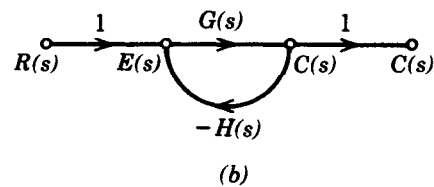
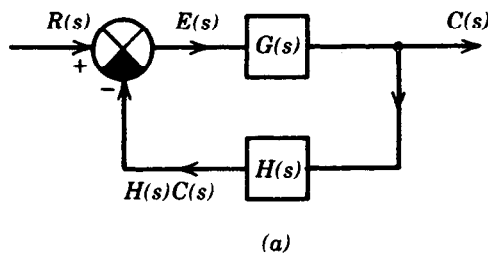


Fig. 34-5. Sistema de ciclo cerrado: a) diagrama de bloques; b) gráfica de flujo de señales.

Tabla 34-19. Tipo, orden, coeficientes de error y errores de estado estable de un sistema de control

Ganancia en sentido directo $G(s)$	Ganancia de retroalimentación $H(s)$	Función de transferencia de ciclo cerrado $\frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)}$	Orden de $1 + G(s)H(s)$	Tipo de $G(s)H(s)$	$\lim_{s \rightarrow 0} \frac{K_p}{s} G(s)H(s)$
$\frac{1}{s}$	2	$\frac{1}{s+2}^d$	1	1	∞
$\frac{1}{s+1}$	1	$\frac{1}{s+2}^d$	1	0	1
$\frac{1}{s+2}$	$\frac{1}{s}$	$\frac{s}{s^2+2s+1}$	2	1	∞
$\frac{10}{s^2}$	1	$\frac{10}{s^2+10}$	2	2	∞
$\frac{1}{s(s+2)}$	$\frac{3}{s+4}$	$\frac{s+4}{s^3+6s^2+8s+3}$	3	1	∞
$\frac{1}{(s+1)(s+2)}$	$\frac{s+10}{s+20}$	$\frac{s+20}{s^3+23s^2+63s+50}$	3	0	$\frac{1}{4}$
$\frac{1}{s^2(s+2)}$	s	$\frac{1}{s^3+2s^2+s}$	3	1	∞
$\frac{1}{s^2(s+2)}$	1	$\frac{1}{s^3+2s^2+1}^e$	3	2	∞
$\frac{1}{s^2(s+2)}$	$\frac{1}{s}$	$\frac{s}{s^4+2s^3+1}^e$	4	3	∞
$\frac{1}{s+2}$	1	$\frac{1}{s+3}$	1	0	$\frac{1}{2}$
$\frac{1}{s(s+2)}$	1	$\frac{1}{s^2+2s+1} = \frac{1}{(s+1)^2}$	2	1	∞

^a R = constante (amplitud de entrada), a menudo 1.

^b $\mu(t)$ = función de escalón unitario.

^c $[t^2/2]\mu(t)$ se transforma en $1/s^2$.

^d En la tabla 34-17 se explica la generación de dos errores diferentes por funciones de transferencia idénticas.

^e Sistema inestable; los resultados carecen de significado. Los errores son infinitos. Los errores *no* son cero, como lo predicen los coeficientes de error^f, o $2R^f$. Todos los errores son infinitos.

^f $C_0(t)$, $C_3(t)$ y $C_5(t)$ se grafican en la tabla 34-13. $R/1.5$, 0 y $2R$ son valores finales del error.

3. Se determinan los polos y los ceros de $G(s)H(s)$ mediante una inspección de los términos de primer orden. Para los términos de segundo orden se utiliza la ecuación:

$$(s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2)$$

donde ω_n = frecuencia natural del polo (o cero) de segundo orden y ζ = factor de amortiguamiento.

Por tanto, para la ganancia $G(s)H(s)$ dada:

Ceros de primer orden	Polos de primer orden	Polos de segundo orden
$\omega = 2 \text{ rad/s}$	$\omega = 0$	$\omega_n = \sqrt{25} = 5 \text{ rad/s}$
	$\omega = 15 \text{ rad/s}$	$\zeta = 6/2\omega_n =$
		$= 6/(2)(5) = 0.6$

Un sistema de control

$\lim_{s \rightarrow \infty} s G(s) H(s)$ K_v	$\lim_{s \rightarrow 0} s^2 G(s) H(s)$ K_a	Error de escalón ^a $r(t) = R\mu(t)$ $e_{ss} = R/(1 + K_p)$	Error de rampa ^b $r(t) = Rt\mu(t)$ $e_{ss} = R/K_v$	Error parabólico ^c $r(t) = [Rt^2(2)\mu(t)]$ $e_{ss} = R/K_A$
2	0	0 ^d	$\frac{R}{2}$	∞
0	0	$\frac{R^d}{2}$	∞	∞
$\frac{1}{2}$	0	0	$2R$	∞
∞	10	0	0	$\frac{R}{10}$
$\frac{1}{6}$	0	0	$\frac{8}{3} R$	∞
0	0	$\frac{4}{5} R$	∞	∞
$\frac{1}{2}$	0	0	$2R$	∞
∞	$\frac{1}{2}$	e	e	f
∞	∞	e	e	e
0	0	$\frac{R}{1.5} = 1 - C_0(t) _{t \rightarrow \infty}$	∞	∞
$\frac{1}{2}$	0	$0 = 1 - C_3(t) _{t \rightarrow \infty}$	$2R = t - C_5(t) _{t \rightarrow \infty}$	∞

Tabla 34-20. Cálculos de constantes de error para ciertas respuestas de escalón y de rampa que se muestran en la tabla 34-13^a

Respuesta	Cálculo de la constante de error
$C_0(t)$ para $G(s) = \frac{1}{s+2}$, $H(s) = 1$	$K_p = \lim_{s \rightarrow 0} G(s)H(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{s+2} = \frac{1}{2}$
Entrada de escalón unitario $R = 1$	$e_{ss}(t) = \frac{1}{1 + K_p} = \frac{1}{1 + \frac{1}{2}} = \frac{2}{3} = \frac{1}{1.5} \rightarrow \left(0 \frac{R}{1.5}\right)$
$C_3(t)$, para $G(s) = \frac{1}{s(s+2)}$, $H(s) = 1$	$K_p = \lim_{s \rightarrow 0} G(s)H(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{s(s+2)} = \infty$
Entrada de escalón unitario $R = 1$	$e_{ss}(t) = \frac{1}{1 + K_p} = \frac{1}{1 + \infty} = 0 \rightarrow (0 \cdot 0 \cdot R)$
$C_5(t)$ para $G(s) = \frac{1}{s(s+2)}$, $H(s) = 1$	$K_v = \lim_{s \rightarrow 0} sG(s)H(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{s+2} = \frac{1}{2}$
Entrada de rampa unitaria $R = 1$	$e_{ss}(t) = \frac{1}{K_v} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2 \rightarrow (0 \cdot 2 \cdot R)$

^a $C_0(t)$, $C_3(t)$ y $C_5(t)$ se grafican en la tabla 34-13, y ahí también se muestran los valores finales de los errores. Estos valores se calculan aquí directamente a partir de los coeficientes de error. Asimismo se tabulan en los dos últimos renglones de la tabla 34-19.

Obsérvese que s se sustituye por $j\omega$ y después se elimina j cuando se hace referencia a una frecuencia angular ω , en radianes por segundo (no hertz o ciclos por segundo). Si más adelante se desean unidades en hertz o ciclos por segundo, se utiliza $\omega = 2\pi f$, donde f = frecuencia en hertz. Para el ejemplo que se da no hay ceros de segundo orden, meramente con fines de simplificación.

- Se calcula la magnitud de $G(j\omega_0)H(j\omega_0)$ a una frecuencia ω_0 que sea igual a o menor que cualquiera de las frecuencias finitas de polo o cero. Esto se logra simplemente eliminando todos los términos menos las constantes y la potencia de s , o término s_n . Por ejemplo, se elige $\omega_0 = 1$ rad/s, que es menor que $\omega = 2$, $\omega = 5$, $\omega = 25$ para la ganancia $G(s)H(s)$ dada. Por tanto:

$$\begin{aligned} \text{Mag} &= |G(s)H(s)|_{s=j\omega_0} = \left| \frac{740(2)}{s(15)(25)} \right|_{s=j\omega_0=j1} = \\ &= \frac{740(2)}{(1)(15)(25)} = 3.95 \end{aligned}$$

Este procedimiento funciona debido a que la gráfica de magnitud de la línea recta de Bode aproxima un término como $(j1 + 2)$ a exactamente (2). El valor 3.95 que se calculó es un valor exacto en la gráfica de la línea recta de Bode. La gráfica de la línea recta de Bode calcula en forma aproximada los valores exactos o reales de $G(s)H(s)$, donde $s = j\omega$.

- Se convierte esta magnitud a decibels (dB) mediante:

$$\text{dB} = 20 \log[|G(j\omega)H(j\omega)|] \quad \text{a } \omega = \omega_0$$

Por tanto, para el ejemplo dado se tiene:

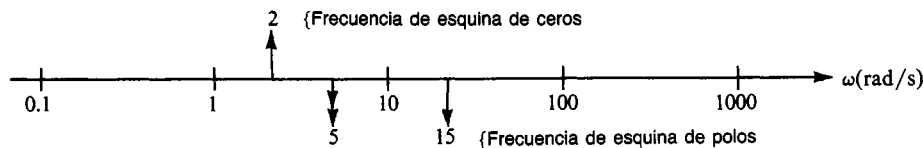
$$\text{Mag} = 20 \log(3.95) = 20(0.5962) = 11.9 \text{ dB}$$

$$\text{o Mag} \cong 12 \text{ dB} \quad \text{a } \omega_0 = 1 \text{ rad/s}$$

Éste será el punto de partida de la gráfica de magnitud de Bode de $G(s)H(s)$ y es el único cálculo que se requiere. Con fines de comparación, el valor exacto de $G(s)H(s)$ calculado por computadora evaluado en $s = j1$ es 12.9657 dB a un ángulo de -81.2853° . El valor exacto de 12.9657 es mayor que la gráfica de la línea recta de 11.9 dB, debido al efecto del término cero $(s + 2)$. Los términos de polos, como el $(s + 15)$, tienen el efecto contrario, ya que hacen que el valor exacto sea menor que el valor de la gráfica de la línea recta de Bode. Los errores máximos ocu-

rren exactamente a frecuencias de esquina y son +3 dB para ceros únicos y -3 dB para polos únicos. A un octavo (factor de 1/2 o 2) de la esquina, el error se reduce a ± 1 dB, que corresponde a la diferencia entre 12.96 y 11.9 dB que se acaba de analizar. Los términos de segundo orden también se desvían de la gráfica de la línea recta en la proximidad de la frecuencia de esquina. Los errores varían con el factor de amortiguamiento ζ y, por lo general, pueden despreciarse para $0.5 < \zeta < 0.7$. Para $\zeta \cong 1.0$, simplemente se utiliza el doble del error para un término de polo único, o -6 dB en la esquina, -2 dB en los puntos octavos. En $\zeta = 0.7$, el error es -3 dB. En $\zeta = 0.5$, el error es 0 dB, mientras que en $\zeta = 0.3$ el error es aproximadamente 4 dB y en $\zeta = 0.2$, aproximadamente 8 dB. En forma analítica, el error en la esquina de un término de magnitud cuadrática de Bode está dado por $20 \log(1/2\zeta)$. Obsérvese que si ζ tiende a cero, el error tiende a infinito (el término resuena a la frecuencia de esquina). En la figura 34-6 se ilustra el comportamiento de un factor de polo cuadrático, próximo a la frecuencia de esquina, mientras que en la figura 34-7 se presenta la gráfica de Bode con un factor de polo cuadrático.

- Se establece una escala de frecuencia logarítmica con papel semilog. Se eligen las frecuencias de 10 en 10 de manera que se incluyan todas las frecuencias de polos y ceros, más una decena arriba y abajo de estas frecuencias. Para el ejemplo dado, $\omega = 2, 15$ y 25 rad/s, de modo que el eje seleccionado ω sería de 0.1 a 1 000 rad/s, o cuatro decenas. En una pulgada se podrían utilizar dos decenas, es decir, de 1 a 100 rad/s, pero no se podría trazar la gráfica de fase completa, que se extiende una decena completa arriba y abajo de cada frecuencia de esquina. Para la gráfica de magnitud no se necesitan estas ampliaciones de decenas extra.
- Se establece una escala de magnitud vertical en decibels sobre el eje semilogarítmico lineal, en general con divisiones mayores de 10 o 20 decibels. Como mínimo, la escala debe extenderse de +20 a 0 a -20 dB. Una escala en decibels típica podría ir de +40 a -60 dB. La región en torno a 0 dB es de la mayor importancia.
- En la escala de frecuencia logarítmica se trazan pequeñas flechas ascendentes en cada frecuencia de cero y pequeñas flechas descendentes en cada frecuencia de polo. Para un factor cuadrático se traza una flecha de doble cabeza. Cada flecha significa una variación en la pendiente de magnitud de la recta de 20 dB por decena, en la dirección de la flecha. Así, para el sistema dado se tiene:



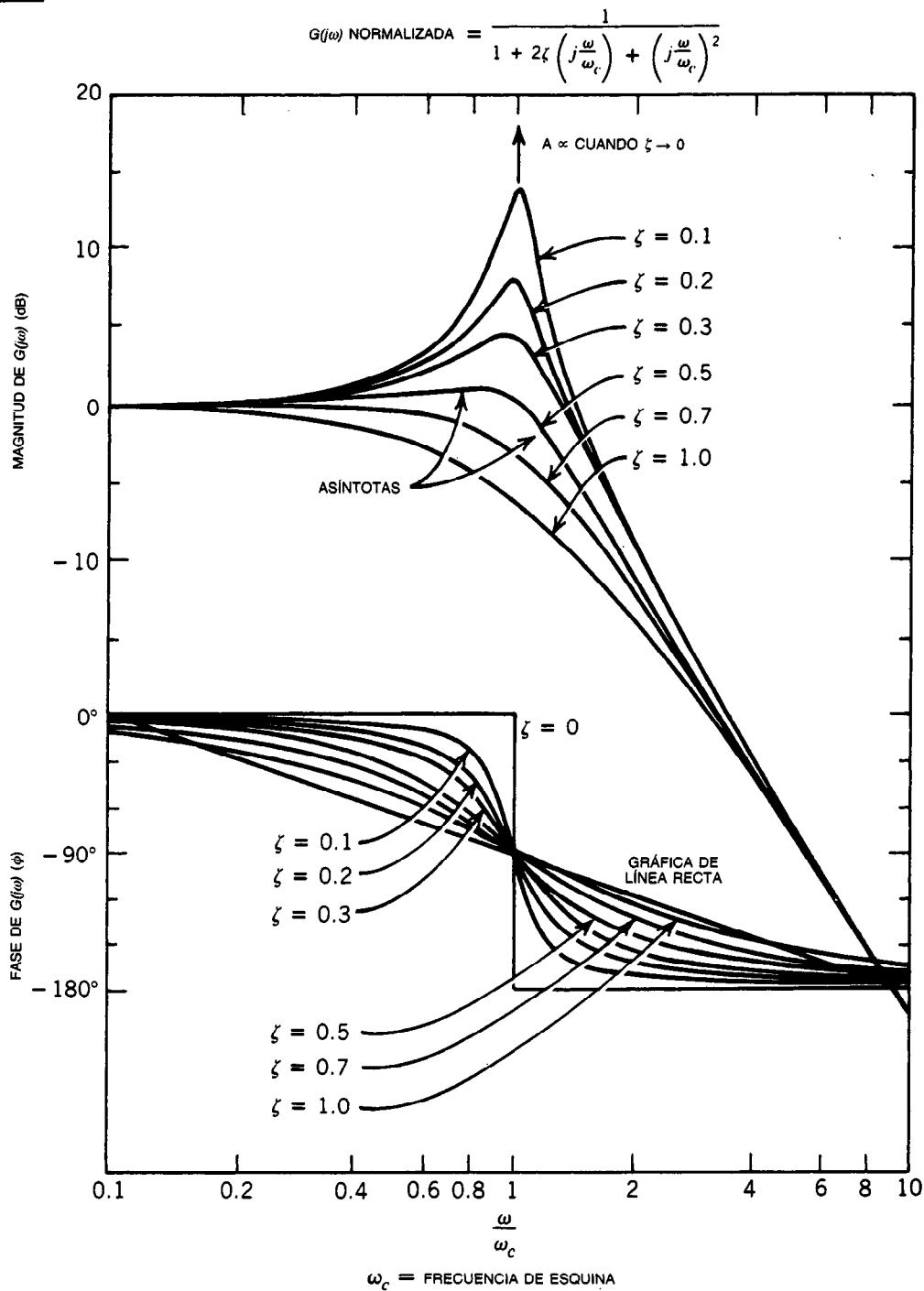


Fig. 34-6. Gráficas normalizadas de magnitud y fase de Bode para corregir errores en la proximidad de la esquina de un polo cuadrático de segundo orden. $s = j\omega$ (es decir, s sustituye a $j\omega$), ω = variable de frecuencia en radianes, ξ = razón de amortiguación ($0 < \xi < 1$) para polos complejos, ω_n = frecuencia natural o resonante o frecuencia de esquina en radianes por segundo, una constante. Obsérvese que si $\xi > 1$, el término cuadrático puede factorizarse en dos términos de polos reales. El cuadrático se denomina sobreamortiguado. Si ξ es negativo, el término cuadrático exhibe un comportamiento inestable, con una envolvente de la respuesta de escalón que aumenta exponencialmente hacia el infinito. $G(s) = \omega_n^2 / (s^2 + 2\zeta\omega_n s + (\omega_n)^2)$; $G(j\omega) = (\omega_n)^2 / ((j\omega)^2 + 2\zeta\omega_n(j\omega) + (\omega_n)^2)$. Tomado de Ogata⁶, reproducido con permiso.

9. Usando el punto de partida calculado $G(j1)$ $H(j1) = 11.9 \approx 12$ dB, se puede dibujar de inmediato la gráfica de magnitud de la recta trazando una recta de pendiente $-20(n)$ dB/decena que pase por el punto de partida, hasta la primera flecha, donde se cambia la pendiente como se indica.

El factor n corresponde al exponente del término del polo s^n , y para el ejemplo dado es $n = 1$. Por tanto, la gráfica del ejemplo comienza en una pendiente de -20 dB/decena, va hacia $\omega = 2$ y después cambia a $-20 + 20 = 0$ dB/decena. La pendiente de 0 dB/decena se dirige a $\omega = 5$ y cambia a $-20 \cdot 2 = -40$ dB/decena, lo cual se des-

plaza a $\omega = 15$ la pendiente cambia a $-40 + -20 = -60$ dB/decena y se dirige sin cambio hacia el infinito.

La gráfica de magnitud completa se muestra en la figura 34-7.

10. Para construir la gráfica de fase se trazan dos flechas opuestas, separadas por dos decenas, con centro en la frecuencia de esquina. La primera flecha apunta hacia arriba para ceros y hacia abajo para polos. Cada flecha indica una variación en la pendiente de la gráfica de fase de 45° /decena, en la dirección de la flecha.

Por consiguiente, para el sistema dado se tiene la siguiente gráfica:

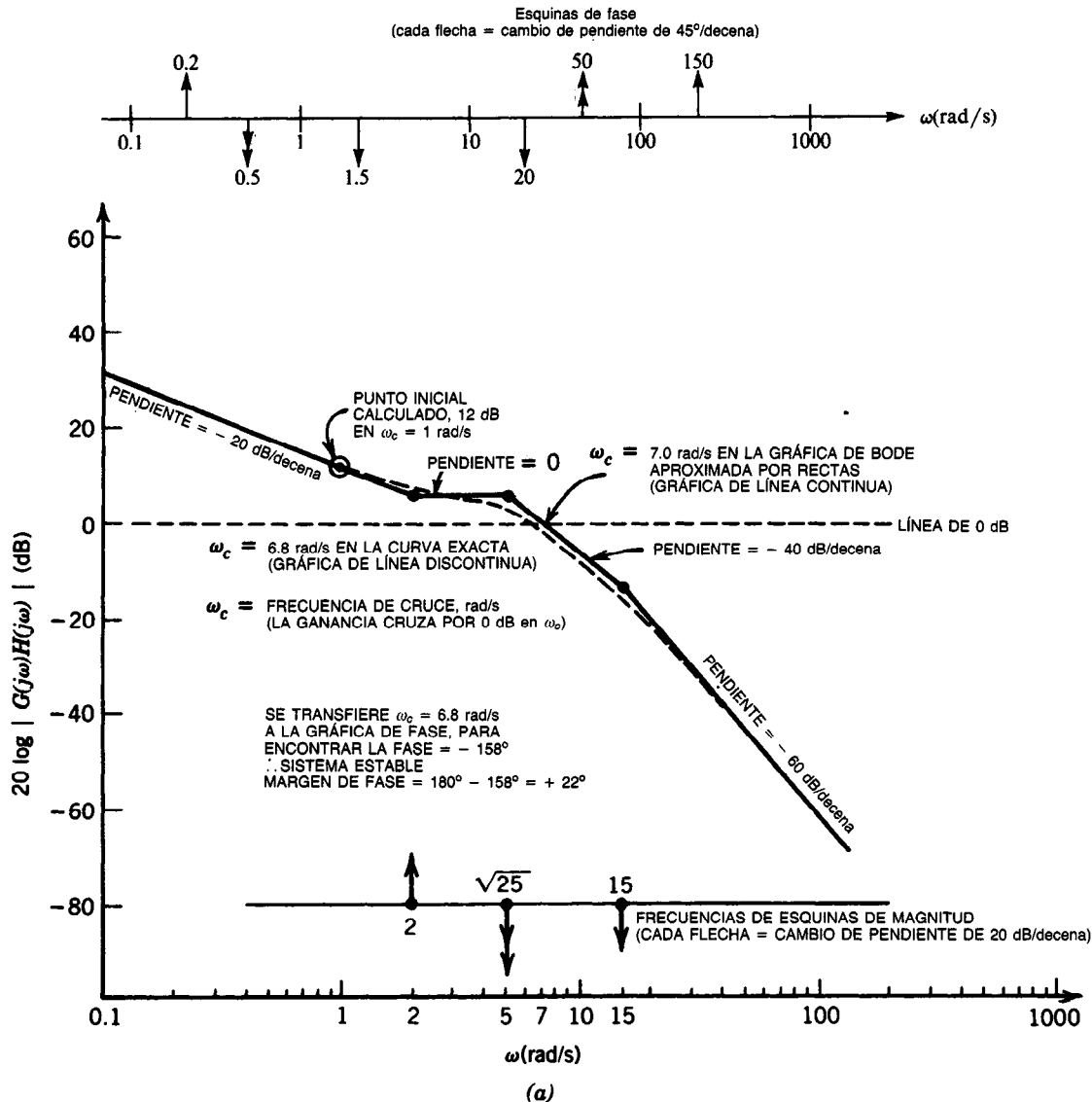


Fig. 34-7. a) Gráfica de magnitud.

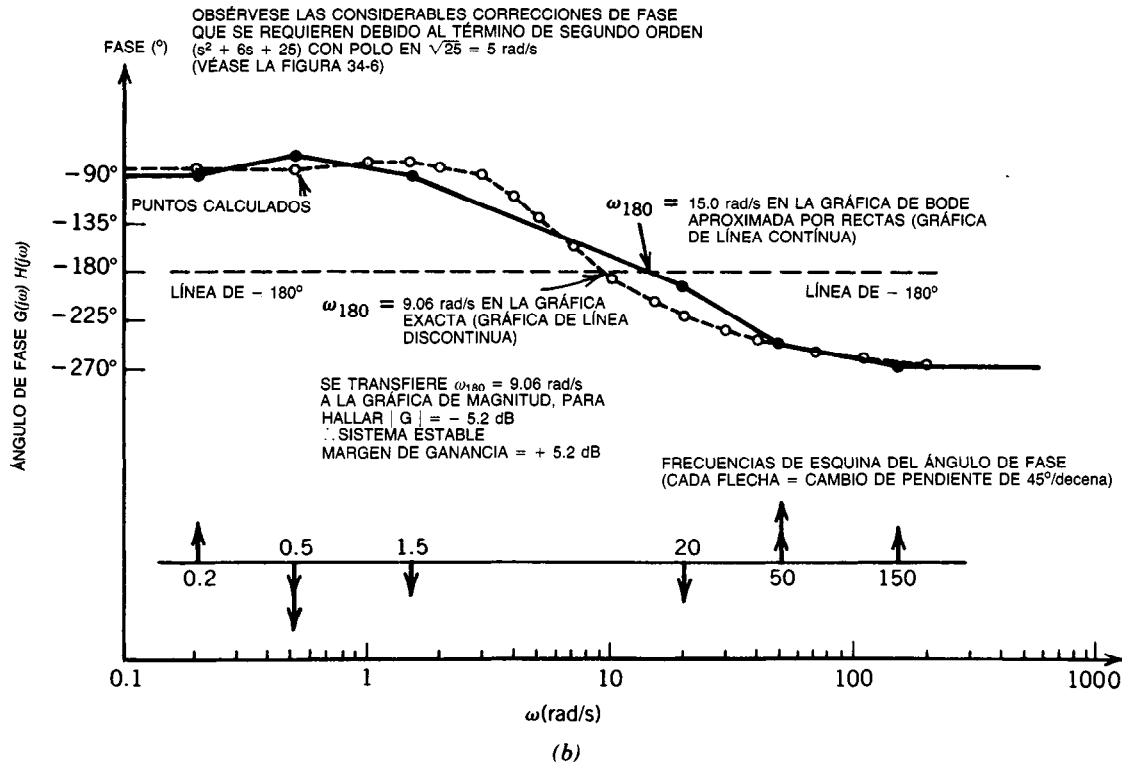


Fig. 34-7 (cont.). b) Gráfica de fase de Bode de $G(s)H(s) = 740(s+2)/[s(s+15)(s^2+6s+25)]$.

11. Se calcula el ángulo de fase $G(s)H(s)|_{s=j\omega}$ cuando ω tiende a cero y después a infinito. Por tanto, para la ganancia $G(s)H(s)$ dada (donde el símbolo $j0$ denota una cantidad imaginaria pequeña, mientras que $j\infty$ representa una cantidad imaginaria arbitrariamente grande) se tiene:

$$\begin{aligned}\text{Ángulo } G(j0)H(j0) &= \text{ángulo } \frac{740(j0+2)}{(j0)(j0+15)[(j0)^2+6j0+25]} = \text{ángulo } \frac{740(2)}{(j0)(15)(25)} \\ &= \text{ángulo } \frac{0^\circ + 0^\circ}{90^\circ + 0^\circ + 0^\circ} = \frac{0^\circ}{90^\circ} = -90^\circ\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{Ángulo } G(j\infty)H(j\infty) &= \text{ángulo } \frac{740(j\infty+2)}{j\infty(j\infty+15)[(j\infty)^2+6j\infty+25]} = \text{ángulo } \frac{740(\infty)}{(j\infty)(j\infty)(j\infty)^2} \\ &= \text{ángulo } \frac{0^\circ + 90^\circ}{90^\circ + 90^\circ + 180^\circ} = \frac{90^\circ}{360^\circ} = -270^\circ\end{aligned}$$

12. Se inicia la gráfica de fase a una pendiente constante de $0^\circ/\text{decena}$ con un valor del ángulo de $G(j0)H(j0)$, que es de -90° para el ejemplo dado. Se traza la gráfica de fase mediante la aplicación del método de las flechas que se expuso para la gráfica de la magnitud. La gráfica de fase terminada se muestra también en la figura 34-7.

13. Con fines de verificación, se observa si la pendiente constante final de $0^\circ/\text{decena}$ de la gráfica de fase tiene un valor de fase igual a $G(j\infty)H(j\infty)$, que es -270° en el ejemplo dado. Una gráfica de fase correcta se "cierra" en un ángulo de $\pm 90 \cdot K^\circ$, $K = 0, 1, 2, 3, \dots$

14. Si una frecuencia de esquina de fase ocurre dentro de un octavo de la frecuencia a la cual la gráfica de magnitud cruza por 0 dB (la "frecuencia de cruce"), se calcula el valor exacto de la curva de fase a esta frecuencia, ya que son probables errores de fase significativos. Las gráficas de Bode de magnitud de línea recta suelen ser

exactas a unos cuantos decibels, mientras que las gráficas de fase de línea recta de Bode suelen ser inexactas y requieren una corrección (de 10 a 30°) importante cuando dos o tres polos y términos cero están dentro de un intervalo de una decena (o hasta de dos decenas), como se ilustra en la figura 34-7. Los factores cuadráticos, con ζ pequeño (ζ menor de 0.3) complican la gráfica de fase de Bode del ejemplo dado, que se muestra en la figura 34-7. Para $\zeta = 1$, la gráfica de fase del factor cuadrático cambia de fase en 180° en dos decenas, o tiene pendiente lineal de $2 \cdot 45^\circ/\text{decena}$ o $90^\circ/\text{decena}$. Cuando ζ tiende a cero, este cambio de fase de 180° ocurre en cero decenas; es decir, la fase tiende a cambiar en 180° en un intervalo de frecuencia muy pequeño con centro en la frecuencia de esquina ω_n , para valores bajos de ζ . Sin embargo, para $\zeta > 0.3$, la gráfica de fase de línea recta es adecuada, en tanto no ocurra el cruce de ganancia de 0 dB dentro de un octavo de ω_n . Esto se ilustra en la figura 34-6, que presenta gráficas de fase normalizadas para diversos valores de ζ .

15. Se determina el margen de fase y el margen de ganancia. A partir de las curvas de la gráfica de Bode (fig. 34-7) se obtiene la tabla:

Por tanto:

- El margen de ganancia es aquel incremento en la ganancia que se puede sumar a un ángulo de fase de -180° , de manera que el resultado sea 0 dB. Por tanto, si se suma 5.2 dB a -5.2 dB, el resultado es 0 dB, y el margen de ganancia es $-G(\omega_{180}) = -(5.2) = +5.2$ dB. Para un sistema estable el margen de ganancia debe ser positivo.
- El margen de fase es el decremento o incremento negativo en el ángulo de fase que se puede sumar a una ganancia de 0 dB, de manera que el ángulo de fase resultante sea -180° . Por tanto, si -158° se reduce en 22° , se produce un ángulo de fase de -180° . Así, el margen de fase es $+22^\circ$. Debe tenerse precaución con los muchos signos negativos que intervienen. Margen de fase = $180^\circ + (\text{ángulo de fase a una ganancia de 0 dB}) = 180^\circ + \phi_c = 180^\circ + (-158^\circ) = 22^\circ$. Para un sistema estable el margen de fase debe ser positivo.

Las reglas para determinar la estabilidad a partir de una gráfica de Bode son las siguientes:

- Se encuentra e indica la frecuencia de cruce ω_c a la cual la gráfica de magnitud de la ganancia atravie-

Punto de cruce de ganancia	Punto de ángulo de fase de 180°
$ Ganancia = 0 \text{ dB}$	Ángulo de fase = -180°
Frecuencia = ω_c , por ejemplo, 6.8 rad/s	Frecuencia = ω_{180} , por ejemplo, 9.06 rad/s
Ángulo de fase = ϕ_c , por ejemplo, -158°	$ Ganancia = G(\omega_{180})$, por ejemplo, -5.2 dB
Margen de fase = $180^\circ - 158^\circ = 22^\circ$	Margen de ganancia = $+5.2 \text{ dB}$

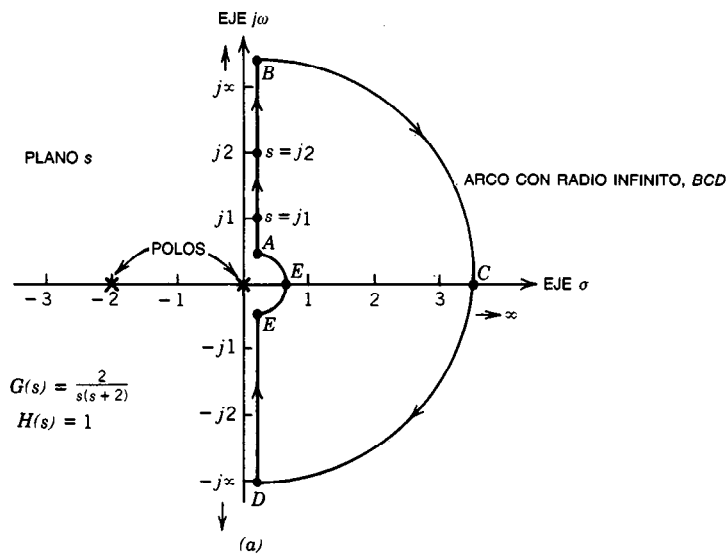
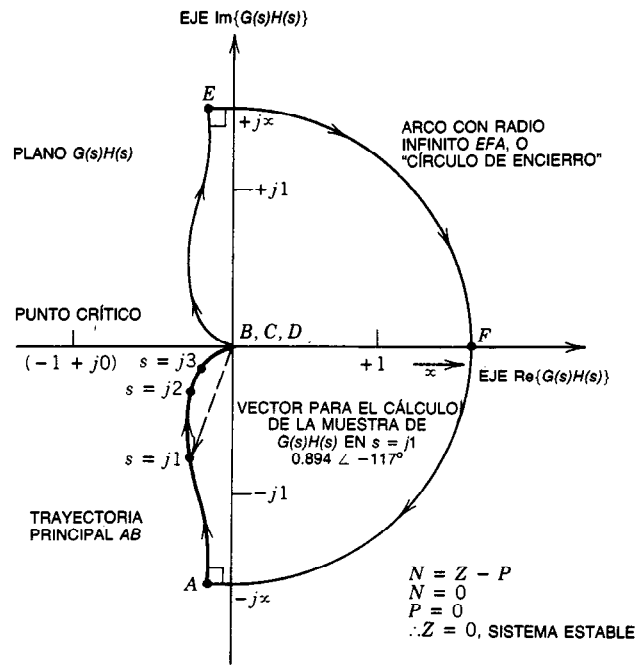


Fig. 34-8. Gráfica de Nyquist de $G(s)H(s) = 2/[s(s+2)]$. a) Lugar geométrico del plano s . El segmento AB es la trayectoria principal, donde $s = j\omega$, $0 < \omega < \infty$; trayectoria EFA = arco con radio pequeño, que rodea el o los polos en el origen o en el eje $j\omega$, de manera que no hay polos dentro del perímetro del plano s . Si $G(s)H(s)$ no tiene polos o ceros en el semiplano derecho s , sólo es necesario trazar la trayectoria principal $AB(s = j0 \rightarrow j\infty)$ en el plano $G(s)H(s)$.



(b)

Fig. 34-8 (cont.). Gráfica de Nyquist. b) Determinación de la estabilidad utilizando el caso I de la tabla 34-21. P = polos de $G(s)H(s)$ en el semiplano derecho = 0 [plano s de la parte (a) de la figura]. N = número de circundaciones horarias del punto crítico $(-1 + j0)$ en el plano $G(s)H(s)$ ($N = 0$). $N = Z - P$, criterio de Nyquist. Por tanto, $Z = 0$ y el sistema es estable. Sólo se necesita trazar la trayectoria principal, para ver si circunda o encierra el punto crítico $(-1 + j0)$. Z = ceros de $1 + G(s)H(s)$ = polos de $G(s)/[1 + G(s)H(s)]$. Para que haya estabilidad, $Z = 0$.

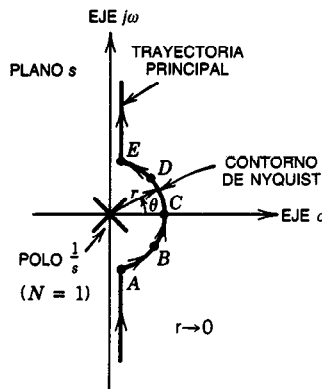
Punto	$G(s)H(s)$ en magnitud / ángulo
$s = j0 = A$	$\infty \angle -90^\circ = A$
$s = j0.5$	$1.94 \angle -104^\circ$
$s = j1.0$	$0.894 \angle -117^\circ = (*)^a$
$s = j2.0$	$0.354 \angle -135^\circ$
$s = j3.0$	$0.185 \angle -146^\circ$
$s = j5.0$	$0.074 \angle -158^\circ$
$s = j10.0$	$0.020 \angle -169^\circ$
$s = j100.0$	$0.0002 \angle -179^\circ$
$s = j\infty = B$	$0.0 \angle -180^\circ = B$
[parte (a) de la figura]	[parte (b) de la figura]

^a(*) = cálculo de la muestra para $s = j1.0$

$$G(j1)H(j1) = \frac{2}{s(s+2)} \Big|_{s=j1} = \frac{2}{(j1)(j1+2)}$$

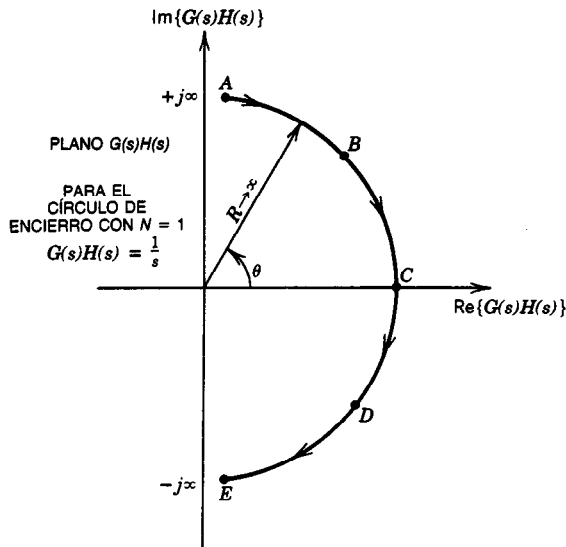
$$G(j1)H(j1) = \frac{2}{1 \angle 90^\circ 2.236 \angle 26.6^\circ} = \frac{2}{2.236 \angle 116.6^\circ} = 0.894 \angle -116.6^\circ$$

GRÁFICA DEL POLO DE ORIGEN DEL PLANO s



ARCO (ABCDE) = DESVIACIÓN SEMICIRCULAR EN TORNO AL POLO $1/s$ CON RADIO INFINITESIMAL r
SEA $s = re^{j\theta} = r \angle \theta$ DONDE $r \rightarrow 0$

CÍRCULO DE ENCIERRO DEL PLANO $G(s)H(s)$, $N = 1$



(c)

ARCO (ABCDE) = UN SEMICÍRCULO DE RADIO INFINITO R ; $R = 1/r$ PARA EL POLO $1/s$ $G(s)H(s)$
 $(s) = 1/s = 1/re^{j\theta} = R^{-j\theta} = R \angle \phi$
 $R = 1/r \rightarrow \infty$, $\phi = -\theta$
= UN SEMICÍRCULO, DIRECCIÓN INVERSA PARA EL POLO GENERAL DE n -ÉSIMO ORDEN $1/s^N$ $R = 1/r^N \rightarrow \infty$;
 $\phi = -N\theta = N$ SEMICÍRCULOS

Fig. 34-8 (cont.). Gráfica de Nyquist. c) Características de la gráfica (círculo envolvente) para $G(s)H(s) = K/s^N(s + P_1)(s + P_2) \dots (s + P_M)(s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2)$. El polo que está en el origen, $1/s^N$, producirá N semicírculos de radio infinito en el plano de $G(s)H(s)$, en sentido contrario al del insignificante pequeño rodeo en torno al polo en el plano s . Estos círculos, llamados circundantes del plano $G(s)H(s)$, cortan la parte principal del lugar geométrico $G(s)H(s)$ en ángulo recto.

sa el punto de 0 dB. Se busca el ángulo de fase ϕ_c que existe a la frecuencia de cruce ω_c . Para el ejemplo de la figura 34-7, $\omega_c = 6.8$ y $\phi_c = -158^\circ$.

2. Se encuentra e indica la frecuencia ω_{180} a la cual la gráfica del ángulo de fase cruza los -180° . Se busca la magnitud $|G(\omega_{180})|$ a ω_{180} . Para el ejemplo dado, $\omega_{180} = 9.06$, $|G(\omega_{180})| = -5.2$ dB.
3. Si sólo hay un valor para ω_c y uno para ω_{180} , la determinación de la estabilidad de la gráfica de Bode es inequívoca. Si existen dos o más valores, es mejor construir una gráfica de Nyquist a partir de los valores de magnitud y fase de la gráfica de Bode en función de la frecuencia. La gráfica de Nyquist puede emplearse para determinar sistemas condicionalmente estables en forma inequívoca simplemente verificando si el punto $-1 + j0$ está encerrado en la gráfica de Nyquist.
4. El sistema es estable si:

- a. A 0 dB, u $\omega = \omega_c$, el ángulo de fase es menos negativo que -180° (p. ej., -158°), y
- b. A un ángulo de fase de -180° , o $\omega = \omega_{180}$, la magnitud de la ganancia es menor que 0 dB (p. ej., -6 dB).

5. El sistema es inestable si:

- a. A 0 dB, u $\omega = \omega_c$, la pendiente de la gráfica de magnitud es igual o más negativa que -60 dB/decena. Para esta prueba sólo se necesita la curva de magnitud. Esta prueba es en realidad otra forma de la prueba a), ya que una pendiente de -60 dB/decena implica un desplazamiento de fase más negativo que -180° . Para el sistema dado, que se muestra en la figura 34-7, la pendiente de la gráfica de magnitud cerca de la ganancia a 0 dB es aproximadamente -40 dB/decena. Por tanto, no se ha demostrado que haya inestabilidad. Obsérvese que esta prueba no demuestra que haya estabilidad; sólo demuestra inestabilidad. Un sistema puede ser inestable con una pendiente de -40 dB/decena o de -20 dB/decena en la proximidad de la ganancia de 0 dB.

Otro método para trazar gráficas de Bode implica el uso de una calculadora programable para determinar el valor de $G(j\omega)$, magnitud y fase, como función de valores individuales de ω , como $\omega = 0.1, 0.3, 1, 3, 10, 30, 100$, etc. Después se pueden graficar estos datos.

Algunas calculadoras tienen graficadoras: la HP-41c, por ejemplo, puede trazar directamente gráficas de Bode. Desde luego, un sistema de computación grande también puede trazar gráficas de Bode en pantalla o en una graficadora digital.

Técnica de Nyquist. La técnica de Nyquist es muy semejante a la de Bode, salvo que en ella se hace una gráfica polar de ángulo de fase y magnitud de $G(j\omega)H(j\omega)$ como una función de la frecuencia en radianes ω . Por lo común se utiliza una escala radial lineal para la gráfica polar de Nyquist, en contraste con la escala de magnitud logarítmica o en decibeles que se utiliza en las gráficas de Bode. La gráfica de Nyquist se examina fácilmente para determinar si llega a ocurrir la condición $G(j\omega)H(j\omega) = -1$. La aplicación de la técnica de Nyquist también implica muchas contingencias, que se deducen del principio del argumento de Cauchy y las técnicas de mapeo de conformación, la base matemática del método de Nyquist. (Estas contingencias también son analizadas por Ogata⁶, Kuo⁷, Shinnars⁸, y D'Azzo y Houpis¹⁰.) En la figura 34-8 se presenta un ejemplo de gráfica de Nyquist con explicaciones detalladas.

En circunstancias típicas, $G(s)H(s)$ no tiene polos ni ceros en la mitad derecha del plano s . Esto implica que el sistema de ciclo abierto $G(s)H(s)$ sólo es estable. Sin embargo, el sistema de ciclo cerrado $G(s)/[1 + G(s)H(s)]$ puede ser inestable. El criterio principal que se emplea para determinar la estabilidad de un sistema de ciclo cerrado a través de la técnica de Bode o la de Nyquist no es simplemente la prueba de $G(j\omega)H(j\omega) = -1$, sino más bien una prueba de $|G(j\omega)H(j\omega)| \geq 1$, cuando el ángulo de fase de $G(j\omega)H(j\omega)$ es exactamente -180° [o los ángulos equivalentes $-180^\circ \pm N(360^\circ)$]. Por ejemplo, considérese el caso $G(j\omega_0) = -3$, $H(j\omega_0) = +1$. Los métodos de Nyquist y Bode predicen correctamente un sistema de ciclo cerrado inestable, no obstante, una sustitución formal en la ecuación 34-19 produce:

$$\frac{G(j\omega_0)}{1 + G(j\omega_0)H(j\omega_0)} = \frac{-3}{1 + (-3)(1)} = \frac{-3}{-2} = 1.5$$

Este resultado es incorrecto. El sistema no presenta una ganancia de 1.5, sino una ganancia sin límite. Una explicación intuitiva de este resultado contradictorio se deduce del examen de las condiciones transitorias que resultan cuando el sistema se enciende (conecta) por vez primera.

Antes del encendido, $G(s)$ es cero. Después, la magnitud de $G(s)$ aumenta de 0 a 3 para un ángulo de fase de 180° . Entre estos dos puntos la magnitud de $G(s)$ debe pasar por la unidad. En ese momento la ganancia de ciclo cerrado $G(s)/[1 + G(s)H(s)]$ se vuelve ilimitada.

En la práctica, el sistema se vuelve no lineal y las no linealidades limitan la respuesta del sistema a algún nivel grande pero acotado. La ganancia de ciclo abierto nunca llega a -3 . A una ganancia de -1 cesa la operación lineal. El signo negativo o desplazamiento de fase de 180° de $G(s)H(s) = -1$ corresponde a una

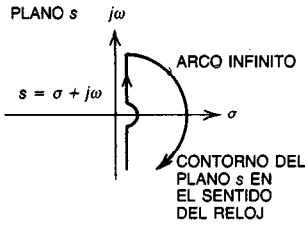
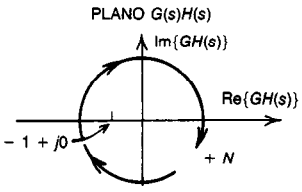
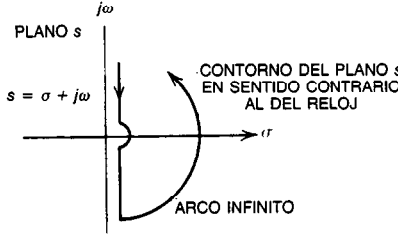
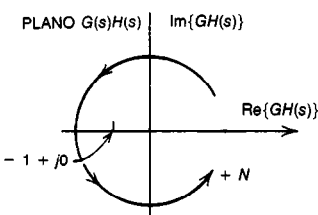
inversión de la pretendida retroalimentación negativa en positiva. La retroalimentación positiva produce la inestabilidad observada. Un ejemplo común de esto ocurre con los sistemas de altavoces para audiciones públicas, en los cuales parte de la salida de audio se retroalimenta a la entrada de audio. En este caso el amplificador de audio y el altavoz actúan como la ganancia de ciclo abierto $G(s)$, y la trayectoria de audio entre el altavoz y el dispositivo de entrada de audio, que suele ser un micrófono, actúa como la ganancia de retroalimentación $H(s)$. La magnitud de $H(s)$ suele ser mucho menor que uno, mientras que la magnitud de $G(s)$ es mayor que uno. Para alguna longitud específica de la trayectoria de retroalimentación de audio, el ángulo de fase de $G(s)H(s)$ será -180° . Si la magnitud de $G(s)H(s)$ en esta trayectoria llega a la unidad, el sistema de altavoces "aullará". El "aullido" es una respuesta de ciclo límite (oscilación no lineal) del amplificador, que se vuelve no lineal cuando se intenta elevar su salida sin límite. El remedio común consiste en reducir la ganancia, de manera que la ganancia de ciclo total sea menor que uno en el punto en que el ángulo de fase sea -180° .

En su sentido más general, la gráfica de Nyquist es una transformación de conformación de una trayectoria de ciclo cerrado en el plano s a una trayectoria de ciclo cerrado en el plano $G(s)H(s)$. Ambos planos son complejos, con ejes reales e imaginarios. "De conformación" significa que los ángulos se preservan pero las formas no. La trayectoria que se elige en el plano s encierra toda la mitad derecha de ese plano con el fin de probar la incidencia de algún polo de ciclo cerrado posible en relación con valores positivos de s . Los valores numéricos de s que están en esta trayectoria cerrada se insertan en la expresión de $G(s)H(s)$ y ésta se evalúa. Se grafican los valores reales e imaginarios resultantes de $G(s)H(s)$. Estos puntos, uno para cada valor de s , describen un lugar geométrico en el plano $G(s)H(s)$. En la figura 34-8 se da un ejemplo.

Una vez que se obtiene el lugar geométrico de la ganancia de ciclo abierto $G(s)H(s)$, se determina la estabilidad del sistema de ciclo cerrado que lo contiene aplicando las reglas de estabilidad de Nyquist (tabla 34-21).

El principio básico subyacente a las reglas de Nyquist emana del principio del argumento de Cauchy, el cual lleva a los resultados siguientes. Para todos y cada uno de los polos de $G(s)/[1 + G(s)H(s)]$ encerrados por el lugar geométrico del plano s , habrá un encerramiento N del punto $-1 + j0$ en el plano $G(s)H(s)$. Ambos encierros serán en la misma dirección. La dirección positiva de los encierros suele definirse como igual a la del reloj (horaria). Si esta definición se invierte (antihoraria), el criterio de estabilidad de Nyquist se mantiene sin cambio, mientras que la dirección de un encierro positivo se invierte. Funciona una definición o la otra. En la mayor parte de los casos, $G(s)H(s)$ no tiene polos de ciclo abierto en la mitad derecha del plano s y la regla de Nyquist se reduce a una simple prueba para ver si el punto $-1 + j0$ está encerrado en el plano $G(s)H(s)$, conforme s varía en su contorno cerrado. Si el punto -1 está encerrado en la

Tabla 34-21. Reglas de estabilidad del lugar geométrico de Nyquist

Caso	Diagrama	Comentarios
<p>I: $+N =$ circundación en el sentido del reloj del punto $-1 + j0$ en el plano $G(s)H(s)$</p>	<p>PLANO s</p>  <p>CRITERIO DE NYQUIST: $N = Z - P$</p> <p>PLANO $G(s)H(s)$</p> 	<p>$Z =$ ceros de $1 + G(s)H(s) =$ polos del sistema de ciclo cerrado en el semiplano derecho. Para un sistema de ciclo cerrado estable, $Z = 0$.</p> <p>$P =$ polos de $1 + G(s)H(s) =$ polos de $G(s)H(s)$ en el semiplano derecho. Para el sistema con comportamiento de ciclo abierto estable, $P = 0$.</p>
<p>II: $+N =$ circundación en sentido contrario al del reloj de punto $-1 + j0$ en el plano $G(s)H(s)$ (no como suele utilizarse en el caso I)</p>	<p>PLANO s</p>  <p>CRITERIO DE NYQUIST: $N = Z - P$</p> <p>PLANO $G(s)H(s)$</p> 	

Z y P permanecen sin cambio. Obsérvese que Z y P siempre son enteros positivos (o ceros), mientras que N puede ser un entero positivo, cero o un entero negativo.

gráfica $G(s)H(s)$, entonces $G(s)/[1 + G(s)H(s)]$ tiene un polo para algún valor de s contenido en el lugar geométrico del plano s , que incluye todos los valores de s con partes reales positivas. Este factor real positivo producirá una respuesta inestable del sistema de ciclo cerrado.

En realidad, las reglas de Nyquist se expresan en términos de los ceros Z de $1 + G(s)H(s)$. Estos ceros son los polos de $G(s)/[1 + G(s)H(s)]$, según se definen en la tabla 34-21, donde se establecen la regla o los criterios de Nyquist. En los dos casos de la tabla 34-21, la regla o criterio de Nyquist es el mismo; es decir:

$$N = Z - P$$

Para que haya estabilidad Z debe ser igual a cero, lo que indica que la ecuación $1 + G(s)H(s)$ no tiene ceros y que la función de transferencia de ciclo cerrado $G(s)/[1 + G(s)H(s)]$ no tiene polos.

Obsérvese que un sistema de ciclo abierto inestable $G(s)H(s)$ con $P \neq 0$ puede convertirse en un sistema de ciclo cerrado estable si $Z = 0$ o si $N = P$.

Cuando se construye una gráfica de Nyquist sin utilizar una computadora o calculadora, a menudo resulta más simple construir antes las gráficas de Bode de $|G(j\omega)H(j\omega)|$ en función de ω , y $\phi(\omega) =$ ángulo de fase de $G(j\omega)H(j\omega)$ en función de ω . Después, eligiendo valores de ω , se pueden obtener pares de puntos $|G(j\omega)H(j\omega)|$ en función de $\phi(\omega)$ para la gráfica de Nyquist.

Método del lugar geométrico de la raíz. El método del lugar geométrico de la raíz, creado por Evans¹¹, es una gráfica de ubicaciones de polos de ciclo cerrado de un sistema en el plano s a medida que se varía la constante de ganancia hacia delante, por lo general de $K = 0$ a $K = \infty$. La ganancia de planta hacia delante se toma como $KG(s)$, donde K es la constante de ganancia por elegir. La función de transferencia de ciclo cerrado correspondiente a partir de la tabla 34-8 [el ciclo de retroalimentación negativa básico, donde $G(s)$ se sustituye por $KG(s)$] es:

$$G_1(s) = \frac{KG(s)}{1 + KG(s)H(s)} \quad (34-22)$$

donde K = constante de ganancia de $G(s)$

$G(s)$ = ganancia o función de transferencia de planta hacia delante, ciclo abierto

$H(s)$ = ganancia o función de transferencia de retroalimentación

$G_1(s)$ = ganancia de ciclo cerrado

Los polos de $G_1(s)$ ocurren en los ceros o raíces de:

$$1 + KG(s)H(s) = 0 \quad (34-23)$$

o bien:

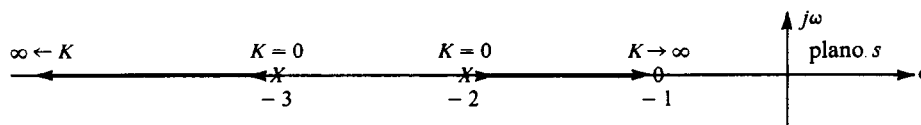
$$KG(s)H(s) = -1 = 1 / \pm 180^\circ \pm K360^\circ$$

$$K = 0, 1, 2, \dots \quad (34-24)$$

En la ecuación de las raíces interviene una cantidad compleja o vectorial $KG(s)H(s)$ que se iguala a una constante real -1 o en forma equivalente a 1 en un ángulo de $\pm 180^\circ$. Por tanto, existen dos requisitos para que un valor de s particular, por ejemplo s_0 , cumpla la ecuación del lugar geométrico de la raíz; es decir:

en la práctica se observan variaciones mayores. Ogata⁶, Kuo⁷ y Shinnars⁸ presentan ejemplos y exposiciones muy completas de las técnicas de construcción de una gráfica del lugar geométrico de la raíz. Las reglas para esta construcción son las siguientes:

- Lugares geométricos del eje real.** Se trazan los n polos de $KG(s)H(s)$ y los m ceros finitos de $KG(s)H(s)$. Los ceros en el infinito no se grafican. Los lugares geométricos de la raíz yacerán sobre el eje real, comenzando en un polo y terminando en un cero, cuando el número total de polos y ceros reales de $G(s)H(s)$ situados a la derecha de la sección de lugares geométricos sea impar, para $K > 0$. (Para los lugares geométricos de la raíz complementarios, para los cuales $K < 0$, se cambia de la derecha a la izquierda.) Si hay lugares geométricos sobre el eje real entre dos polos, entonces existe un punto de desprendimiento entre los polos; y si existen lugares geométricos entre dos ceros, entonces existe un punto de penetración entre los ceros. Si $G(s) = K(s+1)/[(s+2)(s+3)]$, los ceros son $Z_1 = -1$, $Z_2 = \infty$ y los polos son $P_1 = -2$, $P_2 = -3$. Los lugares geométricos se encuentran en el eje real entre $-\infty$ y -3 y entre -2 y -1 .
- Puntos inicial y final.** Se colocan flechas en los lugares geométricos a medida que se trazan. Las flechas indican una ganancia creciente K . Los lugares geométricos comienzan en los polos, con las flechas que apuntan hacia fuera, y $K = 0$ en el polo. Los lugares geométricos terminan en ceros, con $K = \pm \infty$, con las flechas que apuntan hacia cero. Suele haber ceros en el infinito, que se aproximan en forma asintótica. Si $G(s) = K(s+1)/[(s+2)(s+3)]$:



Condición de magnitud

$$|KG(s_0)H(s_0)| = |-1| = 1 \quad (34-25)$$

Condición de ángulo

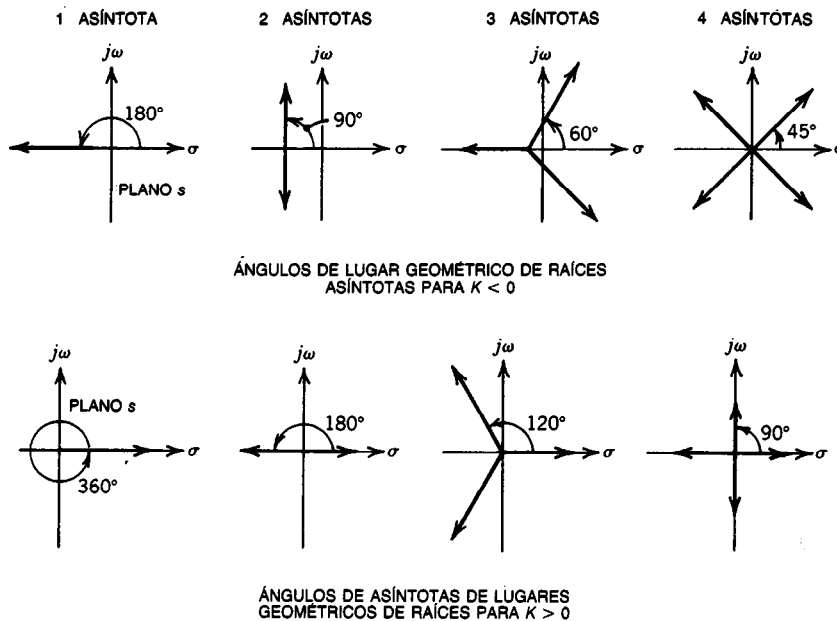
$$\text{Ángulo } [KG(s_0)H(s_0)] = \text{ángulo } [G(s)H(s)] =$$

$$= \pm 180^\circ(2k + 1) \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (34-26)$$

En casi todos los casos, para la condición de ángulo se emplea el ángulo -180° , y no los ángulos equivalentes de, por ejemplo, $+180^\circ$ o -540° . Esto ocurre debido a que el desplazamiento de fase de la mayor parte de los sistemas reales varía entre 0° y -270° , aunque

- Números de lugares geométricos.** Un lugar geométrico comienza en cada polo. Existen por tanto n lugares geométricos, donde n es el número de polos o el orden de $G(s)H(s)$. Si $G(s)H(s) = K(s+1)/[s^2(s+2)(s+3)]$, hay cuatro lugares geométricos.

- Ángulo de asíntotas.** Para $K > 0$, el primer ángulo = $180^\circ/\text{número de asíntotas} = 180^\circ/(n - m)$. Para $K < 0$, el primer ángulo = $360^\circ/\text{número de asíntotas} = 360^\circ/(n - m)$, donde n = número de polos finitos y m = número de ceros finitos: las asíntotas restantes siempre están equiespaciadas en ángulo; por ejemplo, para tres asíntotas, éstas están separadas 120° ($360^\circ/3$). Véase, para ello, la página siguiente:



5. **Intersección de asíntotas.** Las asíntotas siempre se cortan o intersectan en el eje real, en un punto $\sigma = \sigma_A$:

$$\sigma_A = \frac{\sum P - \sum Z}{n - m}$$

donde P = valor de s en el polo de $G(s)H(s)$
 Z = valor de s en el cero de $G(s)H(s)$
 n = número de polos (finito)
 m = número de ceros (finito)

$$\text{Si } G(s) = \frac{K(s+1)}{s^2(s+2)(s+3)},$$

$$\sigma_A = \frac{\sum(0 + 0 - 2 - 3) - \sum(-1)}{4 - 1}$$

$$\sigma_A = \frac{-5 + 1}{3} = \frac{-4}{3}$$

6. **Número de asíntotas.** El número de asíntotas es igual a $n - m$, el exceso de polos y ceros, que también es el número de ceros en el infinito.
7. **Puntos de desprendimiento y penetración.** Primero, se estima la ubicación de cualquier punto de desprendimiento, ya que la ecuación que sigue es una condición necesaria mas no suficiente. Es decir, por lo general se determinan varios valores posibles, y algunos o ninguno de ellos son en realidad puntos de desprendimiento del lugar geométrico que se está graficando. Todos los puntos de desprendimiento para $K > 0$ y $K < 0$ se obtienen determinando las raíces de:

$$\frac{d}{ds} \left[\frac{1}{G(s)H(s)} \right] = 0 \quad \text{o bien} \quad \frac{d}{ds} [G(s)H(s)] = 0$$

Algunos autores afirman que $dk/ds = 0$, que se deduce de:

$$kG(s)H(s) = -1$$

$$|K| = \left| \frac{1}{G(s)H(s)} \right|$$

$$\frac{dk}{ds} = \frac{d}{ds} \left| \frac{1}{G(s)H(s)} \right|$$

El signo de magnitud se puede eliminar, ya que si $x(s) = 0$, entonces $x(s) = 0$.

8. **Intersección con el eje $j\omega$.** La intersección con el eje $j\omega$ puede obtenerse a partir de la ecuación auxiliar sobre un renglón de ceros en el arreglo de Routh-Hurwitz, como se analiza en el ejemplo 34-2, figura 34-12.
9. **Cálculo de K en los lugares geométricos.** La magnitud de K en un punto cualquiera $s = s_K$ en los lugares geométricos de la raíz puede determinarse a partir de:

$$|K| = \left| \frac{1}{G(s)H(s)} \right|_{s=s_K}$$

10. **Ángulos de partida y llegada.** Estos ángulos se pueden encontrar eligiendo un punto de prueba muy próximo al polo o cero y aplicando la condición de ángulo, que produce:

Punto de prueba $s = s_T / G(s_T)H(s_T) = -180^\circ$

o bien $(2K + 1)\pi K = 0 \pm 1 \pm 2 \dots$

y:

$$\begin{aligned} \angle G(s_T)H(s_T) &= \angle \text{ceros} - \angle \text{polos} = \\ &= \sum_{i=1}^m \angle s + Zi - \sum_{j=1}^n \angle s + Pj = -180^\circ \end{aligned}$$

Todos los ángulos de los ceros y polos hasta el punto de prueba s_T pueden medirse con un transportador o bien determinarse en forma analítica, salvo para el ángulo del polo (o cero) que está muy próximo al punto de prueba. Este ángulo se llama θ y es el único ángulo incógnito en la condición de ángulo, de modo que se determina con facilidad. Para el lugar geométrico complementario de la raíz, la condición de ángulo de -180° cambia a 0° o 360° o bien $2K\pi$, $K = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

Gráfica de Nichols. La gráfica de Nichols se utiliza para convertir la ganancia de ciclo abierto y los datos de fase en una ganancia de ciclo cerrado y datos de fase de sistemas de control de retroalimentación unitaria. Convierte en forma gráfica $G(j\omega)$ en $G(j\omega)/[1 + G(j\omega)]$. La ganancia de ciclo abierto (en decibels) y la fase (en grados) se grafican en un sistema externo de coordenadas rectangulares. La ganancia y la fase de ciclo cerrado correspondientes a este punto se toman de un sistema interno de coordenadas curvilíneas. Las coordenadas externas 0 dB a fase de -180° corresponden a decibels de ciclo cerrado infinito y al centro del sistema interno de coordenadas curvilíneas.

En la tabla 34-22 se presentan gráficas de Bode, de Nyquist, de Nichols y del lugar geométrico de la raíz para 12 funciones de transferencia comunes.

Otros métodos. Suelen emplearse otros métodos para determinar la estabilidad de un sistema manipulando la ecuación 34-19. En los métodos de Bode, Nyquist y del lugar geométrico de la raíz se emplea exclusivamente el término $G(s)H(s)$ de la ecuación 34-19 y se prueba si $G(s)H(s) = -1$. Los dos métodos restantes requieren que se multiplique $1 + G(s)H(s)$ y se exprese en la forma de un polinomio numerador $N(s)$ sobre un polinomio denominador $D(s)$. Las raíces de $N(s)$ son entonces los polos de la función de transferencia del sistema de ciclo cerrado:

$$\frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)} = \frac{G(s)}{N(s)/D(s)} = \frac{G(s)D(s)}{N(s)} \quad (34-27)$$

Por tanto, el numerador de la ecuación característica $1 + G(s)H(s)$ se convierte en el denominador de la función de transferencia del sistema de ciclo cerrado $G(s)/[1 + G(s)H(s)]$. Las raíces de $N(s)$ se denominan polos o valores característicos del sistema. Si alguna de estas raíces es un número real positivo o número complejo con parte real positiva, el sistema presentará una

respuesta escalón no acotada, producida por un término o factor de la forma $\exp(A \cdot t)$, donde A es la cantidad real positiva.

- **Método directo de Liapunov.** Es el método más simple que se aplica para determinar la estabilidad del sistema y consiste en factorizar el numerador $N(s)$ de la ecuación característica del sistema o, en forma equivalente, determinar las raíces de $N(s) = 0$. Si alguna de estas raíces tiene una parte real positiva, el sistema es inestable.
- **Método indirecto de Routh-Hurwitz.** Este método prueba la existencia de alguna raíz con parte real positiva, sin determinar en realidad las raíces. Este método recibe el nombre de prueba de Routh-Hurwitz. Routh y Hurwitz fueron matemáticos que compitieron por el premio Adams, que se ofrece por la solución de un problema de estabilidad en mecánica celeste. En 1877 Routh ganó el premio con su obra *Essay on the stability of a given state of motion*, en la cual creó un método de cálculo por medio de arreglos para verificar la existencia de alguna raíz de un polinomio con parte real positiva (fig. 34-9).

Al mismo tiempo, Hurwitz creó una prueba equivalente empleando un método matricial. Para un polinomio de n -ésimo orden, la matriz de Hurwitz es de $N \times N$. El primer renglón de la matriz de Hurwitz es el segundo renglón del arreglo de Routh, y viceversa. Todos y cada uno de los pares siguientes de renglones de Hurwitz se construyen a partir del par anterior mediante el desplazamiento de la pareja original una columna a la derecha y la inserción de un cero principal en cada renglón. Cualquier término que llegue a quedar fuera de la matriz de $N \times N$ se ignora. Las submatrices menores principales de 1×1 , 2×2 , 3×3 , ..., $N \times N$ se extraen de la matriz de $N \times N$ y se evalúan en sus determinantes, como se muestra en la figura 34-10. Si todos estos determinantes son positivos, el sistema es estable.

Ejemplo 34.1. Primer ejemplo del arreglo de Routh-Hurwitz, sistema estable. Dadas:

$$\begin{aligned} 1 + G_1(s)H_1(s) &= \frac{N_1(s)}{D_1(s)} = \\ &= \frac{(s+1)(s+2)(s+3)(s+4)}{D(s)} = \text{una ecuación estable} \end{aligned}$$

o bien:

$$N_2(s) = s(s+5)(s^2+s+4) + (s+1)(s+2)$$

$$N_2(s) = (s^4 + 2s^3 + 9s^2 + 20s) + (s^2 + 3s + 2)$$

$$N_2(s) = s^4 + 2s^3 + 10s^2 + 23s + 2 \quad (34-32)$$

Para probar si $N_1(s)$ tiene alguna raíz con una parte real positiva, se forma el arreglo de Routh, como se

muestra en la figura 34-9. El número de raíces con partes reales positivas es igual al número de cambios de signo entre los coeficientes de la primera columna del arreglo de Routh. Dado que todos estos coeficientes son positivos (1, 10, 30, 42, 24), el sistema es estable.

Las complejidades y casos especiales de la prueba de arreglos de Routh se ilustran con ejemplos de:

1. Un sistema inestable (ej. 34.2).
2. Un sistema que produce un renglón de ceros en el arreglo de Routh (ej. 34.3).
3. Un sistema que produce un coeficiente cero de la primera columna (ej. 34.4).

Ejemplo 34.2. Primer método de Liapunov y segundo ejemplo de los métodos de Routh-Hurwitz, sistema inestable. Dadas:

$$G(s) = \frac{s+1}{s(s^2+s+4)} \quad \text{y} \quad H(s) = \frac{s+2}{s+5} \quad (34-28)$$

como se muestra en la figura 34-11. En los métodos de Bode, Nyquist y del lugar geométrico de la raíz se utiliza la ganancia de ciclo abierto, $G(s)H(s)$, para predecir estabilidad:

$$\begin{aligned} G(s)H(s) &= \frac{s+1}{s(s^2+s+4)} \cdot \frac{s+2}{s+5} = \\ &= \frac{(s+1)(s+2)}{s(s+5)(s^2+s+4)} \end{aligned} \quad (34-29)$$

En el método de Routh-Hurwitz y en el primer método de Liapunov se utiliza el numerador de $1 + G(s)H(s)$, $N(s)$:

$$1 + G(s)H(s) = 1 + \frac{(s+1)(s+2)}{s(s+5)(s^2+s+4)} = \frac{N_2(s)}{D_2(s)} \quad (34-30)$$

$N_2(s)$ es el valor particular de $N(s)$ que se usa en este ejemplo. Combinando términos:

$$\begin{aligned} 1 + G(s)H(s) &= \\ &= \frac{s(s+5)(s^2+s+4) + (s+1)(s+2)}{s(s+5)(s^2+s+4)} = \frac{N_2(s)}{D_2(s)} \end{aligned} \quad (34-31)$$

Compárense las ecuaciones 34-29 y 34-31. Obsérvese que un solo término, 1, produce un gran número de términos en el numerador de $1 + G(s)H(s)$, en comparación con el numerador relativamente simple de $G(s)H(s)$:

$$\begin{aligned} N_2(s) &= s(s+5)(s^2+s+4) + (s+1)(s+2) \\ N_2(s) &= (s^4 + 2s^3 + 9s^2 + 20s) + (s^2 + 3s + 2) \\ N_2(s) &= s^4 + 2s^3 + 10s^2 + 23s + 2 \end{aligned} \quad (34-32)$$

La factorización de $N_2(s)$, como lo requiere el primer método de Liapunov, a menudo es complicada, en especial cuando aumenta el orden de $N(s)$. Mediante el uso de una calculadora HP-41c y un programa del paquete de matemáticas HP:

$$\begin{aligned} N_2(s) &= (s + 0.09045)(s + 2.1416) \\ (s - 0.1160 + j3.211)(s - 0.1160 - j3.211) \end{aligned} \quad (34-33)$$

Por tanto, las raíces de $N_2(s)$ y el numerador de la ecuación característica $1 + G(s)H(s)$ del sistema de ciclo cerrado son:

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= -0.09045 \quad \lambda_3 = 0.1160 - j3.211 \\ \lambda_2 &= -2.1416 \quad \lambda_4 = 0.1160 + j3.211 \end{aligned} \quad (34-34)$$

Es importante recordar que el numerador $N_2(s)$ de $1 + G(s)H(s)$ es el denominador de la función de transferencia del sistema de ciclo cerrado, como se ilustra en la figura 34-11. Por tanto, las raíces de $N(s)$ son los ceros de $1 + G(s)H(s)$, que a su vez son los polos de las funciones de transferencia de ciclo cerrado $G(s)/[1 + G(s)H(s)]$. Si alguna de estas raíces tiene una parte real positiva, el sistema presentará una respuesta ilimitada a una entrada limitada y se comportará en forma inestable, impulsado por un término o factor de la forma $e^{\lambda t}$, donde λ es la parte real positiva.

En relación con las cuatro raíces de $N_2(s)$ dadas por la ecuación 34-34, se observa que dos raíces tienen partes reales positivas; es decir:

$$\lambda_3 = 0.1160 - j3.211 \quad \text{y} \quad \lambda_4 = 0.1160 + j3.211$$

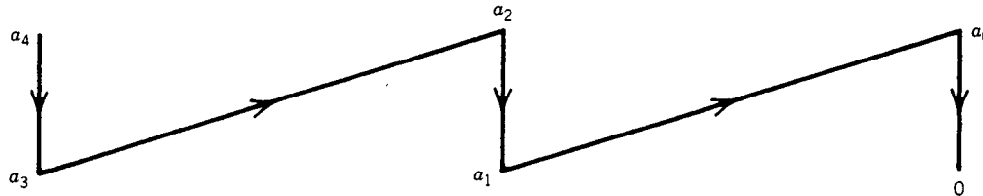
Por tanto, según el primer método de Liapunov, el sistema de control de ciclo cerrado descrito por la ecuación 34-28 es inestable, con dos polos del plano inestables (en la mitad derecha).

En el método de Routh-Hurwitz se utiliza el mismo término $N(s)$, o numerador de la ecuación característica $1 + G(s)H(s)$, que en el método directo de Liapunov. Al obtener $N_2(s)$ de la ecuación 34-32 se escriben los dos primeros renglones de la tabulación de Routh empleando los coeficientes de $N_2(s)$. Los renglones restantes se calculan después en forma sucesiva, de donde se obtiene la figura 34-12.

Existen dos cambios de signo, de +2 a -3/2 y después de -3/2 a 25/3. Por tanto, según la tabulación de Routh-Hurwitz, $N(s)$ tiene dos raíces con partes reales positivas. Un método sirve como verificación del otro.

Si no se dispone de una computadora o calculadora capaz de factorizar un polinomio de cuarto orden (o superior), se puede aplicar el método de Routh-Hurwitz para determinar si $N(s)$ tiene alguna raíz con parte real positiva. Obsérvese que en este método en general no se determinan las raíces de $N(s)$, sino que meramente se verifica la existencia de alguna raíz con parte real positiva. En el caso especial de raíces puramente imaginarias o raíces sin parte real, éstas se pueden determinar por otro procedimiento, que se ilustra en el tercer ejemplo de Routh-Hurwitz (fig. 34-13).

	s^4	$+ 10s^3$	$+ 35s^2$	$+ 50s$	$+ 24$
s^4	1		35		24
s^3	10		50		0
s^2	$\frac{(10)(35) - (1)(50)}{10} = 30$		$\frac{(10)(24) - (1)(0)}{10} = 24$		0
s^1	$\frac{(30)(50) - (10)(24)}{30} = 42$		$\frac{(30)(0) - (10)(0)}{30} = 0$		0
s^0	$\frac{(42)(24) - (30)(0)}{42} = 24$		0		0



Coeficientes de las dos primeras rayas

Fig. 34-9. Primer ejemplo de Routh-Hurwitz (ejemplo 34.1 del texto) para $N_1(s) = s^4 + 10s^3 + 35s^2 + 50s + 24 = 0 = A_4s^4 + a_3s^3 + A_2s^2 + A_1s + A_0$. Los coeficientes de los dos primeros renglones se obtienen directamente de $N(s)$, como puede observarse en la figura. El coeficiente de cada renglón sucesivo se encuentra a partir de los dos renglones anteriores multiplicando un determinante de 2×2 , formado por la primera y segunda columnas, y después la primera y n -ésima columnas (con los signos normales del determinante *invertidos*). Los valores que se obtienen de esta manera se dividen entre el coeficiente anterior de la primera columna. Por tanto, para encontrar los s^2 coeficientes de renglones:

$$\text{Coeficientes de la primera columna} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & - & + & 35 \\ 10 & & & 50 \end{vmatrix}}{10} = \frac{(A_3)(A_2) - (A_4)(A_1)}{A_2} = 30$$

$$\text{Coeficientes de la segunda columna} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & - & + & 24 \\ 10 & & & 0 \end{vmatrix}}{10} = \frac{(A_3)(A_0) - (A_4)(0)}{A_2} = 24$$

Obsérvese la convención de signos $\begin{vmatrix} - & + \\ + & - \end{vmatrix}$ que es opuesta a la de un determinante de 2×2 .

Ejemplo 34-3. Tercer ejemplo de Routh-Hurwitz, renglón de ceros. El tercer ejemplo de Routh-Hurwitz ilustra el uso de la llamada ecuación auxiliar. Esta ecuación puede resolverse para producir las raíces de $N(s)$ que estén a la derecha del eje $j\omega$ y, por tanto, sean números imaginarios puros, con parte real cero. La ecuación auxiliar siempre es de orden par, debido a que las raíces imaginarias siempre se presentan en pares.

Los coeficientes de la ecuación auxiliar sólo multiplican potencias pares de la variable s de Laplace, comenzando con la potencia de s asociada con el renglón de la tabulación de Routh que contiene la ecuación auxiliar y reduciéndola en factores sucesivos de s^2 a s^0 . El renglón de la ecuación auxiliar es el que está justo encima de un renglón de ceros.

Para proseguir la tabulación de Routh-Hurwitz, el renglón de ceros se sustituye por los coeficientes de la derivada de la ecuación auxiliar con respecto a s . Esto se ilustra en la figura 34-13.

Existe otra posibilidad de pares de raíces de la ecuación auxiliar. Pueden presentarse dos raíces reales iguales y contrarias. Por tanto, una ecuación auxiliar de cuarto orden (que será bicuadrática en s^4 , s^2 y s^0) podría tener:

1. Dos pares de raíces imaginarias puras, por ejemplo, $s \pm j1$ y $s \pm j3$.
2. Dos pares de raíces reales con signos opuestos, por ejemplo, $s \pm 2$ y $s \pm 4$.
3. Un par de raíces imaginarias y uno de raíces reales, por ejemplo, $s \pm j6$ y $s \pm 7$.

$$N(s) = s^4 + 10s^3 + 35s^2 + 50s + 24 = 0$$

El determinante de Hurwitz de cuarto orden:

$$D_4 = \begin{vmatrix} 10 & 50 & 0 & 0 \\ 1 & 35 & 24 & 0 \\ 0 & 10 & 50 & 0 \\ 0 & 1 & 35 & 24 \end{vmatrix} = 4 \times 4 \text{ determinante de Hurwitz}$$

$$D_1 = |10| = 10 > 0$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} 10 & 50 \\ 1 & 35 \end{vmatrix} = 350 - 50 = 300 > 0$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} 10 & 50 & 0 \\ 1 & 35 & 24 \\ 0 & 10 & 50 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 10 & 50 & 0 \\ 1 & 35 & 24 \\ 0 & 10 & 50 \end{vmatrix} = 10 \cdot 35 \cdot 50 + 1 \cdot 10 \cdot 0 + 0 \cdot 50 \cdot 24 - (0 \cdot 35 \cdot 0 + 24 \cdot 10 \cdot 10 + 50 \cdot 50 \cdot 1)$$

$$D_3 = 17\,500 - 2\,400 - 2\,500 = 12\,600 > 0$$

Para evaluar D_4 , se hace un desarrollo por menores en la cuarta columna:

$$D_4 = -0 \begin{vmatrix} 1 & 35 & 24 \\ 0 & 10 & 50 \\ 0 & 1 & 35 \end{vmatrix} + 0 \begin{vmatrix} 10 & 50 & 0 \\ 0 & 10 & 50 \\ 0 & 1 & 35 \end{vmatrix} - 0 \begin{vmatrix} 10 & 50 & 0 \\ 1 & 35 & 24 \\ 0 & 1 & 35 \end{vmatrix} + 24 \begin{vmatrix} 10 & 50 & 0 \\ 1 & 35 & 24 \\ 0 & 10 & 50 \end{vmatrix}$$

o bien $D_4 = 24 D_3$, $D_3 = 302\,400 > 0$.

En resumen:

$$D_1 = 10 \text{ Toda } D_n > 0$$

$$D_2 = 300 \therefore \text{todas las raíces de } N(s) \text{ tienen}$$

$$D_3 = 12\,600 \text{ parte real negativa}$$

$$D_4 = 302\,400 \therefore \text{ecuación característica estable}$$

Para una ecuación característica general de n -ésimo orden con coeficientes constantes reales invariantes en el tiempo:

$$N(s) = C_0 s^n + C_1 s^{n-1} + C_2 s^{n-2} + \dots + C_{n-2} s^2 + C_{n-1} s + C_n = 0$$

la forma de la determinación de Hurwitz D_n de $N \times N$ es:

$$\begin{vmatrix} C_1 & C_3 & C_5 & C_7 & \dots \\ C_0 & C_2 & C_4 & C_6 & \dots \\ 0 & C_1 & C_3 & C_5 & \dots \\ 0 & C_0 & C_2 & C_4 & \dots \\ 0 & 0 & C_1 & C_3 & \dots \\ 0 & 0 & C_0 & C_2 & \dots \\ & & & & \ddots \\ & & & & & C_n \end{vmatrix} \begin{matrix} \uparrow \\ \text{rayas } N \\ \downarrow \end{matrix}$$

← columnas N →

Fig. 34-10. Prueba de la matriz de Hurwitz. Aquí se utiliza la misma ecuación característica estable de cuarto orden que se emplea para el arreglo de Routh.

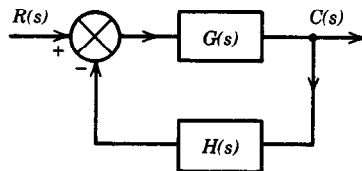


Fig. 34-11. El numerador de $1 + G(s)H(s)$ es el denominador de la función de transferencia de ciclo cerrado. Ganancia de ciclo abierto = $G(s)H(s)$. Ecuación característica = $1 + G(s)H(s) = N(s)/D(s)$ = numerador(es)/denominador(es). Función de transferencia de ciclo cerrado = $G(s)/[1 + G(s)H(s)] = G(s)/[N(s)/D(s)] = [G(s)D(s)]/N(s)$.

Cambio de signos		s^4	$+ 2s^3$	$+ 10s^2$	$+ 23s$	$+ 2$
+	s^4	1		10		2
+	s^3	2		23		0
-	s^2	$\frac{(2)10 - 1(23)}{2} = \frac{-3}{2}$		$\frac{2(2) - 1(0)}{2} = 2$		
+	s^1	$\frac{(-3/2)23 - 2(2)}{(-3/2)} = 25 \frac{2}{3}$		0		0
+	s^0	$\frac{(25 \frac{2}{3})2 - (3/2)(0)}{(25 \frac{2}{3})} = 2$		0		0

Fig. 34-12. Segundo ejemplo de Routh-Hurwitz (ejemplo 34.2 del texto). Tabulación de Routh-Hurwitz para $N_2(s) = s^4 + 2s^3 + 10s^2 + 23s + 2 = 0$ (sistema inestable con dos raíces con partes reales positivas).

Ejemplo 34.4. Cuarto ejemplo de Routh y Hurwitz.

Si el primer coeficiente de un renglón de la tabulación de Routh-Hurwitz llega a ser cero pero el residuo es distinto de cero, el procedimiento más simple consiste en sustituir el primer cero de la columna por un número positivo pequeño ε y proseguir la tabulación en términos de ε . El signo de un término de la primera columna que contenga a ε se obtiene haciendo que ε tienda a cero desde la dirección positiva, de manera que su signo sea siempre positivo, mientras que, por ejemplo, el signo de $(+10\varepsilon - 1)/\varepsilon$ es negativo (fig. 34-14):

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \frac{10\varepsilon - 1}{\varepsilon} \rightarrow \frac{-1}{\varepsilon} \rightarrow -\infty$$

Un segundo procedimiento para resolver este caso implica multiplicar toda la ecuación que se examina por $(s + k)$, donde k es un número cualquiera como 1, 2 o 3. Esto representa mucho más trabajo que simplemente insertar una ε en lugar del cero.

Para todos los métodos existen ciertos atajos. El más poderoso se deduce del método directo de Liapunov y la teoría de las ecuaciones. El método directo de Liapunov indica que un sistema será inestable si una raíz cualquiera del numerador $N(s)$ de la ecuación característica $1 + G(s)H(s) = N(s)/D(s)$ tiene una parte real positiva. Por tanto, la prueba se convierte en:

1. Hacer $1 + G(s)H(s) = 0 = N(s)$ y determinar las raíces.
2. Verificar si alguna raíz tiene una parte real positiva, lo que indicará inestabilidad.

Existen casos que son de inmediato inestables pues hay una raíz con parte real positiva. Por ejemplo, si:

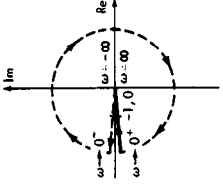
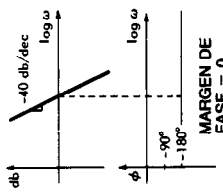
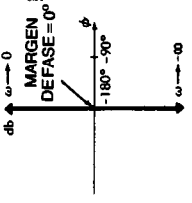
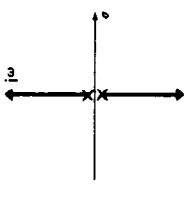
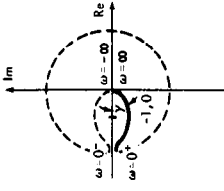
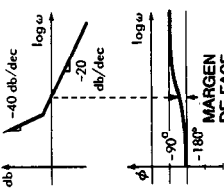
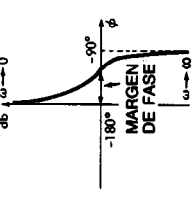
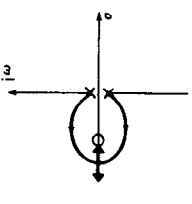
1. Uno o más coeficientes del polinomio $N(s)$ son cero, por ejemplo, $s^4 + 3s^2 + 1 = 0$. (No hay término s , el coeficiente de s es cero.)
2. No todos los coeficientes de $N(s)$ tienen el mismo signo, por ejemplo, $s^4 + 3s^2 - 2s + 1 = 0$. (El coeficiente de s tiene signo negativo.)

Ogata⁶, Kuo⁷, Shinnars⁸ y D'Azzo y Houpis¹⁰ exponen la técnica de Routh-Hurwitz.

34.4.4 Compensación del sistema de control

Sin la compensación adecuada, un sistema de control operará muy probablemente de manera marginal o inestable. Una respuesta marginal podría presentar una sobrecorrección muy grande o un error de posición también muy grande. Estos inconvenientes de funcionamiento suelen poder rectificarse añadiendo una red de compensación adecuada al sistema errático.

Tabla 34-22.^a

Caso núm.	Función de transferencia de ciclo abierto $G(s)H(s)$ en un sistema con retroalimentación negativa	Diagrama de Nyquist $\gamma = \text{margen de fase}$	Diagrama de Bode	Diagrama de Nichols	Lugar geométrico de la raíz
1. Un sistema que contiene una doble integración pura es un caso límite de estabilidad, y se considera inestable desde un punto de vista práctico. Tiene margen de fase de cero grados y sus raíces están en el eje imaginario. Este sistema requiere compensación en la forma de una red de adelanto de fase o retroalimentación de régimen	$K \frac{1}{s^2}$				
2. Este sistema refleja compensación del sistema anterior con retroalimentación de régimen. Este sistema siempre es estable, como lo indican el margen de fase positivo y las raíces que siempre están en el semiplano izquierdo. Además, tiene margen de ganancia infinito	$K \frac{(T_2 + 1)}{s^2}$				

^a Ref. bibliográfica 12. Con permiso de Control Engineering.

Tabla 34-22.^a (continuación)

Caso núm.	Función de transferencia de ciclo abierto $G(s)H(s)$ en un sistema con retroalimentación negativa	
<p>3.</p> <p>Éste representa el tipo de función de transferencia que suele encontrarse en los servomecanismos de instrumentos. El sistema de segundo orden siempre es estable (desde un punto de vista lineal), como lo indican el margen de fase positivo y las raíces que siempre yacen en el semiplano izquierdo. Su margen de ganancia es infinito. La estabilidad se incrementa sumando una red en cascada (de adelanto de fase, retraso de fase o retraso y adelanto de fase) o retroalimentación de régimen</p>	$\frac{K}{S(T_1 S + 1)}$	
<p>4.</p> <p>La función de transferencia anterior se ha modificado agregando retroalimentación de régimen. El margen de fase es mayor que en el caso anterior, lo cual indica unas características de estabilidad mejoradas y mayor amortiguación. El margen de ganancia se mantiene infinito</p>	$\frac{K(T_1 S + 1)}{S(T_2 S + 1)}, \quad T_1 > T_2$	
<p>5.</p> <p>Este sistema siempre es estable, como lo indican el margen de fase positivo y las raíces que yacen siempre en el semiplano izquierdo. Además, tiene margen de ganancia infinito</p>	$\frac{K}{(T_1 S + 1)(T_2 S + 1)}, \quad T_1 > T_2$	
<p>6.</p> <p>Un sistema que contiene tres integraciones puras siempre es inestable. Como se indica, tiene margen de fase negativo de menos noventa grados y siempre hay dos raíces en el semiplano derecho (para $K > 0$)</p>	$\frac{K}{S^3}$	
<p>7.</p> <p>Este tipo de función de transferencia se halla en servomotores controlados por campo y en servomecanismos de potencia. Aunque el sistema es estable para las ganancias que se muestran, se volverá inestable con valores de ganancia mayores. La estabilidad se mejora agregando una red en cascada (de adelanto de fase, retraso de fase o retraso y adelanto de fase) o retroalimentación de régimen</p>	$\frac{K}{S(T_1 S + 1)(T_2 S + 1)}, \quad T_1 > T_2$	

Tabla 34-22.^a (continuación)

Diagrama de Nyquist γ = margen de fase	Diagrama de Bode	Diagrama de Nichols	Lugar geométrico de la raíz

Tabla 34-22.^a (continuación)

Caso núm.	Función de transferencia de ciclo abierto $G(s)H(s)$ en un sistema con retroalimentación negativa	
<p>8.</p> <p>La modificación de la función de transferencia anterior, con mayor ganancia para lograr más exactitud y la adición de retroalimentación de régimen, dan por resultado esta función de transferencia. Tal como se muestra, el sistema es estable, y así lo indican el margen de fase y las raíces que siempre están en el semiplano izquierdo</p>	$\frac{K(T_1 S + 1)}{S(T_2 S + 1)(T_3 S + 1)}, \quad T_2 > T_1 > T_3$	
<p>9.</p> <p>Este sistema representa un servomecanismo de instrumentos que contiene retroalimentación de régimen y una red de retraso de fase. Es capaz de lograr grandes ganancias y muy buena exactitud. Tal como se indica en el cuadro 1, el sistema es estable y así lo reflejan el margen de fase positivo y las raíces que siempre yacen en el semiplano izquierdo para todos los valores de ganancia</p>	$\frac{K(T_1 S + 1)(T_2 S + 1)}{S(T_3 S + 1)(T_4 S + 1)}, \quad T_3 > T_4 > T_1 > T_2$	
<p>10.</p> <p>La estabilidad de este sistema de tercer orden depende del valor de la ganancia. Para la ganancia seleccionada en el ejemplo del cuadro 1, el sistema se muestra estable. Para valores de ganancia mayores se vuelve inestable. La estabilidad de este sistema (para la ganancia que se muestra) se mejora añadiendo retroalimentación de régimen o una red de adelanto de fase</p>	$\frac{K}{(T_1 S + 1)(T_2 S + 1)(T_3 S + 1)}, \quad T_1 > T_2 > T_3$	
<p>11.</p> <p>La modificación de la función de transferencia anterior, con mayor ganancia (para lograr mayor exactitud), y la adición de retroalimentación de régimen producen esta función de transferencia. Tal como se indica, el sistema es estable, y así lo reflejan el margen de fase positivo y las raíces que siempre se encuentran en el semiplano izquierdo para todos los valores de la ganancia</p>	$\frac{K(T_1 S + 1)}{(T_2 S + 1)(T_3 S + 1)(T_4 S + 1)}, \quad T_2 > T_3 > T_1 > T_4$	
<p>12.</p> <p>Este sistema de cuarto orden, que contiene tres integraciones puras, siempre es inestable aun con la presencia de dos ceros. Se requerirían una red de adelanto de fase extra o retroalimentación de régimen para estabilizarlo</p>	$\frac{K(T_1 S + 1)(T_2 S + 1)}{S^3(T_3 S + 1)}, \quad T_3 > T_1 > T_2$	

Tabla 34-22.^a (continuación)

Diagrama de Nyquist γ = margen de fase	Diagrama de Bode	Diagrama de Nichols	Lugar geométrico de la raíz

En casos más extremos, el sistema de control puede ser totalmente inoperante (o sea, inestable). Una vez más, suele ser posible corregir la inestabilidad agregando una red de compensación apropiada al sistema inestable (tabla 34-23).

Por lo general es deseable agregar la red de compensación a una parte del sistema en que los niveles de energía sean bajos. Es decir, si un sistema complejo contiene muchos elementos, como ocurre en un radar, que tiene un procesador de señales, un amplificador eléctrico, un actuador electromecánico o un motor cohete suspendido a la cardán, resulta más aconsejable agregar la compensación del sistema de control al procesador de señales o al amplificador eléctrico, donde las señales están al nivel de potencia de microwatts a miliwatts. No se recomienda, y quizá sea imposible, agregar la compensación del sistema al motor cohete, donde las señales están al nivel de kilowatts a megawatts.

El efecto de agregar una red de compensación al sistema consiste en cambiar la o las ganancias del ciclo del sistema. Por tanto, una red de compensación del sistema tiene la misma función de transferencia en cualquier parte de un ciclo de control dado, como se muestra en la tabla 34-23. Sin embargo, la construcción física del compensador es muy diferente, según el tipo de señal (eléctrica, hidráulica, neumática o mecánica) y el nivel de potencia de la señal transmitida. Compárese la compensación de trayectoria hacia delante con la compensación por retroalimentación en la tabla 34-23. En ambos casos la ganancia del ciclo de retroalimentación es $A(s)G(s)H(s)$, aunque la entrada a la red de compensación es $E(s)$ en el caso de la compensación de trayectoria hacia delante y $H(s)C(s)$ en el caso de la compensación por retroalimentación. Diferentes entradas requieren redes físicas distintas.

Las redes de compensación complejas suelen ser eléctricas por naturaleza y operan con señales de control de bajo nivel, con amplitudes de quizá 10^{-3} a 10^{+2} V y niveles de potencia de quizá 10^{-6} a 10^{+2} W. La compensación hidráulica o neumática se utiliza principalmente cuando todas las señales de control del sistema son hidráulicas o neumáticas. Es importante no confundir un amortiguador hidráulico o neumático con una red de compensación hidráulica o neumática. El amortiguador hidráulico o neumático modifica la función de transferencia del elemento del sistema al cual va unido; no agrega otra función de transferencia en serie con ese elemento. Por otra parte, un compensador hidráulico o neumático, tal como un filtro hidráulico pasabajas o de retraso de fase, agrega una función de transferencia en serie con el elemento del sistema al cual está unido. Como ya se dijo, las redes de compensación hidráulicas o neumáticas se utilizan principalmente en sistemas operados en forma hidráulica o neumática, mientras que los amortiguadores hidráulicos o neumáticos se utilizan en todo tipo de sistemas, incluso en los de energía eléctrica.

Compensadores de adelanto y retraso de fase

Como se explicó al analizar la estabilidad de los sistemas, un sistema de control por retroalimentación no se

vuelve inestable (desde el punto de vista de la teoría clásica del control) cuando su ganancia excede la unidad a una frecuencia para la cual la retroalimentación es positiva. Normalmente la retroalimentación es negativa, pero se hace positiva cuando los elementos contenidos en el ciclo de retroalimentación producen un total de -180° de retraso de fase.

En consecuencia, existen dos métodos para mejorar o producir la estabilidad del sistema:

- El primero consiste en sumar un desplazamiento o adelanto de fase positivo, de manera que ya no se produzca el retraso de fase de -180° cuando la ganancia sea la unidad.
- El segundo método implica la reducción de la magnitud de la ganancia por debajo de la unidad (o 0 dB) cuando el retraso de fase sea 180° o más. (Al final de esta sección se repasa el concepto y el álgebra de los decibeles.)

El primer método, la modificación o disminución del retraso de fase del sistema, se puede poner en práctica mediante la inserción de un *filtro de adelanto* de fase en alguna parte del ciclo de retroalimentación (tabla 34-23*). El segundo método, la reducción de la ganancia del sistema, se puede lograr en todas las frecuencias con un atenuador simple, o bien es posible reducir la ganancia del sistema solamente en una región de frecuencia seleccionada empleando un *filtro de retraso de fase*. Obsérvese que se utiliza un filtro de retraso de fase para reducir la ganancia. Éste no se emplea a fin de incrementar el retraso de fase, lo cual es indeseable (es el principal problema que se presenta al utilizar un filtro de retraso de fase como atenuador).

A menudo resulta indeseable emplear un atenuador simple para reducir la ganancia, ya que al reducir la ganancia en la frecuencia cero [ganancia en la frecuencia cero = $\lim_{s \rightarrow 0} G(s)H(s)$] se reducen todos los coeficientes de error de estado estable, lo que incrementa los errores de estado estable. Recuérdese que los errores de estado estable se relacionan inversamente con el límite: $\lim_{s \rightarrow 0} G(s)H(s)$.

- **Filtro de retraso de fase.** No reduce la ganancia en la transferencia cero, sino sólo en alguna frecuencia mayor (por encima de la llamada frecuencia de esquina del filtro). Por tanto, un filtro de retraso de fase no modifica los errores de estado estable de un sistema como lo hace un atenuador de ganancias simple. Por esta razón se utilizan filtros de retraso de fase. Debe insistirse en que los filtros de retraso de fase no se emplean para producir retraso de fase, sino para reducir la ganancia, pero sólo a frecuencias mayores que la frecuencia de esquina del filtro. Véase en la figura 34-15 la respuesta a la frecuencia de un filtro de retraso de fase.

*Alternativamente, la retroalimentación de régimen se puede sumar en paralelo con un ciclo de retroalimentación unitario para producir una red de adelanto ideal sin un factor de polo. Esto se analiza más adelante.

SIGNOS		s^5	$+ 3 s^4$	$- 3 s^3$	$- 9 s^2$	$+ 4 s$	$- 12$
+		s^5					
		s^4					
{ Saltar el renglón de ceros }							
		s^3	$\frac{3(-3) - 1(-9)}{3} = 0$	$\frac{3(-4) - 1(-12)}{3} = 0$	0	← Renglón de ceros	
+		s^3	La ecuación auxiliar produce 4				(Sustitución de ceros por medio de la ecuación auxiliar)
-		s^2	$\frac{4(-9) - 3(-6)}{4} = -18$	$\frac{4 \cdot (-12) - 3 \cdot 0}{4} = -12$			
-		s^1	$\frac{-18/4(-6) - 4(-12)}{-18/4} = \frac{-50}{3}$	0			
-		s^0	$\frac{-50/3(-12)}{-50/3} = -12$	0			

Fig. 34-13. Tercer ejemplo de Routh-Hurwitz (ejemplo 34.3 del texto). Ecuación auxiliar, renglón de ceros. $N_3(s) = s^5 + 3s^4 - 9s^3 - 4s - 12 = 0$. Dado que uno o más coeficientes exhiben un cambio de signo, existe cuando menos una raíz con parte real positiva. Se puede emplear la tabulación de Routh-Hurwitz para hallar el número exacto de raíces con parte real positiva. Resolviendo la ecuación auxiliar:

$$3s^4 - 9s^2 - 12 = 0$$

se obtiene (dividiendo entre 3, y despejando en la bicuadrática dos raíces, s_1 y s_2 , cada una elevada al cuadrado):

$$(s_1, s_2)^2 = \frac{3 \pm \sqrt{9 - 4(-4)}}{2} = \frac{3 \pm 5}{2} = \frac{8}{2}, \frac{-2}{2} \quad (s_1, s_2)^2 = +4, -1 \quad \text{o raíces} = +2, -2, +j, -j$$

Una raíz tiene parte real positiva, a saber +2. Esto también lo indica el cambio único de signo de +4 en el renglón s^3 por -18/4 en el renglón s^2 de la tabulación de Routh. Cada cambio de signo corresponde a una raíz de $N(s)$ con parte real positiva o inestable, a saber +2.

Como verificación final, se factoriza $N_3(s)$ mediante un programa de obtención de raíces (HP Mathematic Pac, Polynomial Solutions):

$$N_3(s) = (s - 2)(s + 2)(s - j)(s + j)$$

Las cinco raíces de $N_3(s)$ son entonces:

$$\lambda_1 = +2 \quad \lambda_3 = +j \quad \lambda_5 = -3 \quad \lambda_2 = -2 \quad \lambda_4 = -j$$

Obsérvese que las cuatro raíces λ_1 a λ_4 coinciden, como debe ser, con las cuatro raíces que se determinaron a partir de la ecuación auxiliar. La raíz final $\lambda_5 = -3$ tiene parte real negativa, -3. Por tanto sólo una raíz, $\lambda_1 = +2$, tiene parte real positiva, lo cual concuerda con el único cambio de signo de la primera columna de la tabulación de Routh-Hurwitz. Así, el único cambio de signo del arreglo de Routh, la solución de la ecuación auxiliar y el programa de obtención de raíces concuerdan, como era de esperar (existe una raíz de $N_3(s)$ con parte real positiva). *Nota:* la ecuación auxiliar se obtiene a partir de los coeficientes que están encima del renglón de ceros, comenzando con un término s^4 , que encabeza el renglón, y después reduciendo los exponentes en dos; de este modo los términos son:

$$(3)s^4 + (-9)s^2 + (-12)s^0 = 3s^4 - 9s^2 - 12 = 0$$

o bien:

$$s^4 - 3s^2 - 4 = 0$$

entonces $d/ds(s^4 - 3s^2 - 4)$ es $4s^3 - 6s$, que sustituye el renglón de ceros. Véase el segundo renglón s^3 . Obsérvese que un renglón cualquiera se puede dividir entre un número positivo sin afectar la validez de la prueba. Análogamente, una ecuación auxiliar cualquiera puede dividirse entre un número positivo sin afectar la validez de la prueba.

SIGNOS		s^4	$+ 2s^3$	$+ 3s^2$	$+ 6s$	$+ 4$	$= N_4(s)$
+	s^4	1		3		4	
+	s^3	2		6		0	
+	s^2	$\frac{(2)3 - 1(6)}{2} = 0 \rightarrow \epsilon$		$\frac{(2)4 - 1(0)}{2} = 4$		0	
		(0 sustituido por ϵ)					
-	s^1	$\frac{(\epsilon)6 - 2(4)}{\epsilon} = \frac{-8}{\epsilon}$		0		0	
+	s^0	4		0		0	

Fig. 34-14. Cuarto ejemplo de Routh-Hurwitz (ejemplo 34.4 del texto). El primer elemento cero se sustituye por epsilon (ϵ) y existen dos raíces complejas inestables. $N_4(s) = s^4 + 2s^3 + 3s^2 + 6s + 4 = 0$. ϵ es un número positivo pequeño y por tanto $-8/\epsilon$ es negativo. Los signos de las primeras columnas son +, +, +, -, +, leyendo de s^4 a s^0 . Entonces, existen dos cambios de signo y dos raíces con parte real positiva. Como verificación, un programa para obtener raíces produce los siguientes factores:

$$N(s) = (s + 1.000)(s + 1.4779)(s - 0.239 + j1.628)(s - 0.239 - j1.628)$$

Las dos raíces con parte real positiva son por tanto:

$$\lambda_1 = +0.239 - j1.628$$

$$\lambda_2 = -0.239 + j1.628$$

Un error común consiste en olvidar el cambio de signo entre un factor, como $(s + 1.000)$, y la raíz correspondiente,

$$s = -1.000.$$

- **Filtro de adelanto de fase.** A diferencia de los de retraso de fase, se utiliza por su efecto en el ángulo de fase del sistema. Como ya se dijo, se utiliza un filtro de adelanto de fase para sumar adelanto de fase positivo al retraso de fase negativo que generan diversos componentes del sistema de control, de manera que el ángulo de fase total se haga más positivo que -180° en el punto de cruce de ganancia. Por ejemplo, si el ángulo de fase del sistema en el cruce de ganancia (donde la ganancia atraviesa el nivel de ganancia de los 0 dB a la unidad) es -200° , un filtro de adelanto de fase que produzca $+60^\circ$ de adelanto de fase mejorará el ángulo de fase del sistema a $-200^\circ + 60^\circ = -140^\circ$. Esto cambiaría un sistema inestable (-200° en 0 dB) por uno estable (-140° en 0 dB).

Obsérvese que un simple filtro pasivo de adelanto de fase de resistor y capacitor, como el que se muestra en la figura 34-16, tiene una atenuación constante, $a = (R_1 + R_2)/R_2$, que se debe cancelar ya sea agregando otro amplificador de ganancia a o bien incrementando en a la ganancia del sistema (fig. 34-15).

Diseño con compensación del adelanto de fase

Los filtros de adelanto de fase tienen problemas asociados con su diseño, ya que el filtro afecta la ganancia del sistema y también el desplazamiento de la fase del sistema. Por tanto, en términos generales, un

filtro real se deberá diseñar para lograr un adelanto de fase significativamente mayor que el mínimo requerido. En algunos casos complejos, un simple filtro de adelanto de fase no mejora en absoluto la estabilidad del sistema debido a que el adelanto de fase agregado es anulado por la ganancia agregada dependiente de la frecuencia.

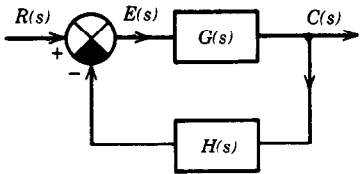
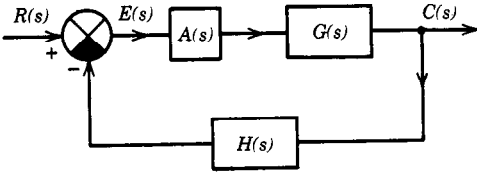
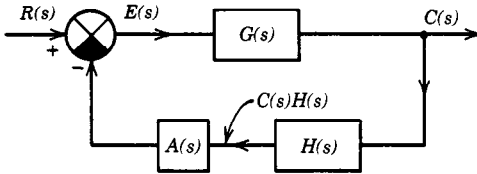
La razón por la cual un filtro de adelanto de fase funciona tan bien como lo hace depende de un hecho simple. Un filtro de este tipo comienza a producir adelanto de fase importante a una frecuencia que está a una decena por debajo de la frecuencia a la cual el filtro de retraso de fase comienza a producir una ganancia significativamente creciente. Esto se ilustra en la figura 34-16.

El filtro de adelanto de fase debe diseñarse de manera que la decena de la frecuencia para la cual el filtro produce un adelanto de fase importante ocurra en la región donde el sistema no compensado tiene un retraso de fase que excede (o está próximo a) -180° , junto con una magnitud de ganancia que pasa de la unidad o 0 dB.

Diseño con compensación del retraso de fase

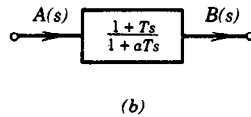
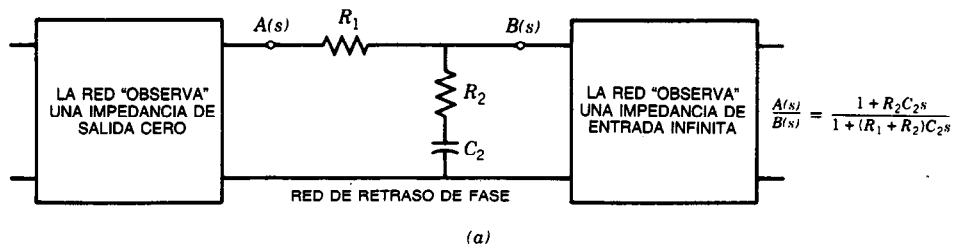
El problema asociado con un filtro de retraso de fase como elemento de compensación de un sistema es, precisamente, que produce retraso de fase. El retraso de fase es inadecuado para un sistema de control por retroalimentación porque hace menos estable el sistema. El filtro de retraso de fase se emplea para atenuar

Tabla 34-23. Compensación de sistemas

Tipo de compensación	Diagrama de bloques
Ninguno	 <p>GANANCIA DEL CICLO = $G(s)H(s)$</p> <p> $C(s)/R(s) = G(s)/[1 + G(s)H(s)]$ donde $R(s)$ = señal de entrada de referencia $E(s)$ = señal de error = $R(s) - C(s)H(s)$ $C(s)$ = señal de salida controlada $G(s)$ = ganancia en sentido directo o planta $H(s)$ = ganancia de retroalimentación </p>
Trayectoria en sentido directo	 <p>GANANCIA DEL CICLO = $A(s)G(s)H(s)$</p> <p> $A(s)$ = red de compensación Posibles ejemplos: Constante de magnitud de ganancia ajustable Red de adelanto de fase Red de retraso de fase Red de adelanto y retraso </p>
Retroalimentación	 <p>GANANCIA DEL CICLO = $G(s)H(s)A(s) = A(s)G(s)H(s)$</p> <p> $C(s)/R(s) = [A(s)G(s)]/[1 + A(s)G(s)H(s)]$ </p>

la ganancia en un intervalo de frecuencia deseado, lo cual eleva la estabilidad del sistema. El retraso de fase presente debe colocarse en la frecuencia a la que no hará daño. En términos generales, esto significa que el retraso de fase debe ocurrir a frecuencias para las cuales el desplazamiento de fase del sistema acepte el retraso de fase extra (del filtro de retraso de fase) y aun así no se haga más negativo que -180° a una ganancia de 0 dB. Algunas veces esto se logra colocando las

frecuencias de esquina del filtro de retraso muy por debajo de todas las otras frecuencias de esquina. Si esto resulta imposible, se debe intentar con un compensador del filtro de adelanto. Si tampoco esto funciona, quizá la solución sea un compensador de adelanto y retraso, que combina el adelanto de fase del filtro de adelanto con la atenuación del filtro de retraso. En la figura 34-15 se presentan el esquema y las características de la red de retraso de fase.



$$\phi_{\text{máx}} = \sin^{-1}\left(\frac{1-a}{1+a}\right) = -\sin^{-1}\left(\frac{a-1}{a+1}\right) = -\phi_{\text{máx}} \text{ (ADELANTO)}$$

$$\omega_{\text{máx}} = \sqrt{\omega_z \omega_p} = \frac{1}{T\sqrt{a}} \text{ (ADELANTO O RETRASO)}$$

$$\text{dB}_{\text{máx}} = +20 \log(1/a) = -20 \log(a)$$

(c)

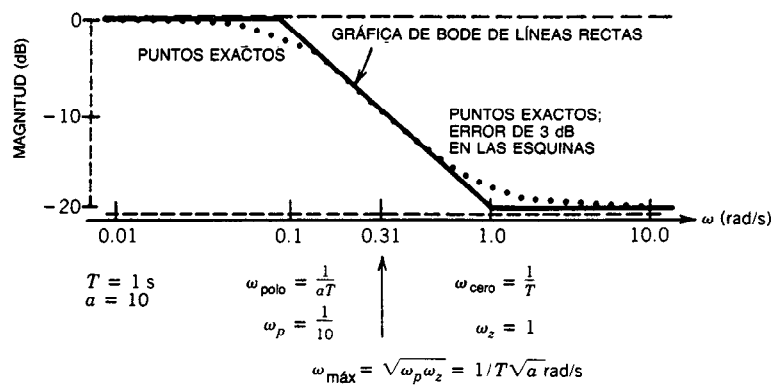


Fig. 34-15. Red de retraso de fase:

a) Diagrama circuital de una red pasiva de retraso de fase de primer orden. $A(s)$ = señal de entrada de la red, $B(s)$ = señal de salida de la red.

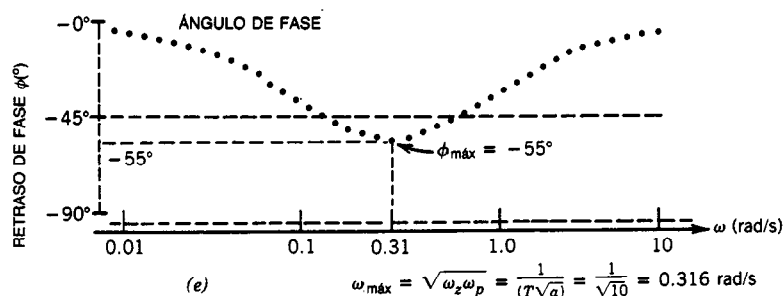
b) Diagrama de bloques de la red de retraso de fase pasiva de primer orden. $T = R_2C_2$ = constante de tiempo, $a = 1 + R_1(R_2C_2)$ = atenuación, $a \geq 1$, $\omega_z = \omega_{\text{cero}} = 1/T$, $\omega_p = \omega_{\text{polo}} = 1/aT$.

c) Desplazamiento de fase máximo $\phi_{\text{máx}}$, frecuencia de defasamiento máximo $\omega_{\text{máx}}$ y atenuación máxima de la red $\text{dB}_{\text{máx}}$ para una red de retraso de fase.

d) Respuesta de magnitud para una red de retraso de fase.

$$\text{Retraso}(s) = \frac{1+s}{1+10s} = \frac{1+Ts}{1+aTs} \quad T=1, a=10$$

$$\text{Mag} = 20 \log \left| \frac{1+s}{1+10s} \right|_{s=j\omega}$$



a	$\pm \Phi_{máx}$	$\text{dB}_{máx}$
1.0	0.0	0.0
2.0	19.5	-6.0
3.0	30.0	-9.5
4.0	36.9	-12.0
5.0	41.8	-14.0
6.0	45.6	-15.6
7.0	48.6	-16.9
8.0	51.1	-18.1
9.0	53.1	-19.1
10.0	54.9	-20.0
11.0	56.4	-20.8
12.0	57.8	-21.6
13.0	59.0	-22.3
14.0	60.1	-22.9
15.0	61.0	-23.5
16.0	61.9	-24.1
17.0	62.7	-24.6
18.0	63.5	-25.1
19.0	64.2	-25.6
20.0	64.8	-26.0

$$\text{RED DE ADELANTO} = \frac{1}{a} \frac{1 + aTs}{1 + Ts}$$

$$\phi_{máx} = \sin^{-1} \left(\frac{a-1}{a+1} \right) \quad a > 1$$

ATENUACIÓN MÁXIMA DEL ADELANTO (ÁNGULO POSITIVO) = $20 \log(a)$ CUANDO $\omega \rightarrow 0$

$$\text{RED DE RETRASO} = \frac{1 + Ts}{1 + aTs}$$

$$\phi_{máx} = \sin^{-1} \left(\frac{1-a}{1+a} \right) \quad a > 1$$

ATENUACIÓN MÁXIMA DEL RETRASO (ÁNGULO NEGATIVO) = $20 \log(a)$ CUANDO $\omega \rightarrow \infty$

(f)

Fig. 34-15 (cont.). Red de retraso de fase:

e) Respuesta de fase para una red de retraso de fase.

$$\text{Retraso}(s) = \frac{1+s}{1+10s} = \frac{1Ts}{1+aTs} \quad T=1, a=10$$

$$a = \text{atenuación}, \phi_{máx} = -55^\circ \text{ en } \omega_{máx} = 0.316 \text{ rad/s.}$$

f) Magnitud del máximo adelanto o retraso de fase en función de la atenuación a (se utilizan ángulos negativos para una red de retraso). También se tabula la atenuación máxima en decibels. La ecuación de $\phi_{máx}$ indica que para un valor dado de a (el polo: razón de frecuencia cero), una red de adelanto y una de retraso tienen la misma magnitud de defasamiento pero signos opuestos. Por ejemplo, si $a = 10$, entonces una red de adelanto de fase tiene defasamiento de $+55^\circ$ mientras que una red de retraso de fase tiene defasamiento de -55° . $\omega_{máx}$ es idéntica para una red de adelanto y una de retraso de fase. $\omega_{máx}$ está a mitad de camino entre el polo y el cero de la red sobre un eje log ω , o bien $\omega_{máx}$ es la media geométrica de ω_{cero} y ω_{polo} : $\omega_{máx} = \sqrt{\omega_z \omega_p}$. $\text{dB}_{máx}$, la atenuación de la red, es la misma para ambas redes. Esto ocurre a bajas frecuencias para una red de adelanto y a altas frecuencias para una red de retraso, donde "baja" y "alta" son relativas a $\omega_{máx}$ (rad/s), la frecuencia del centro de la red.

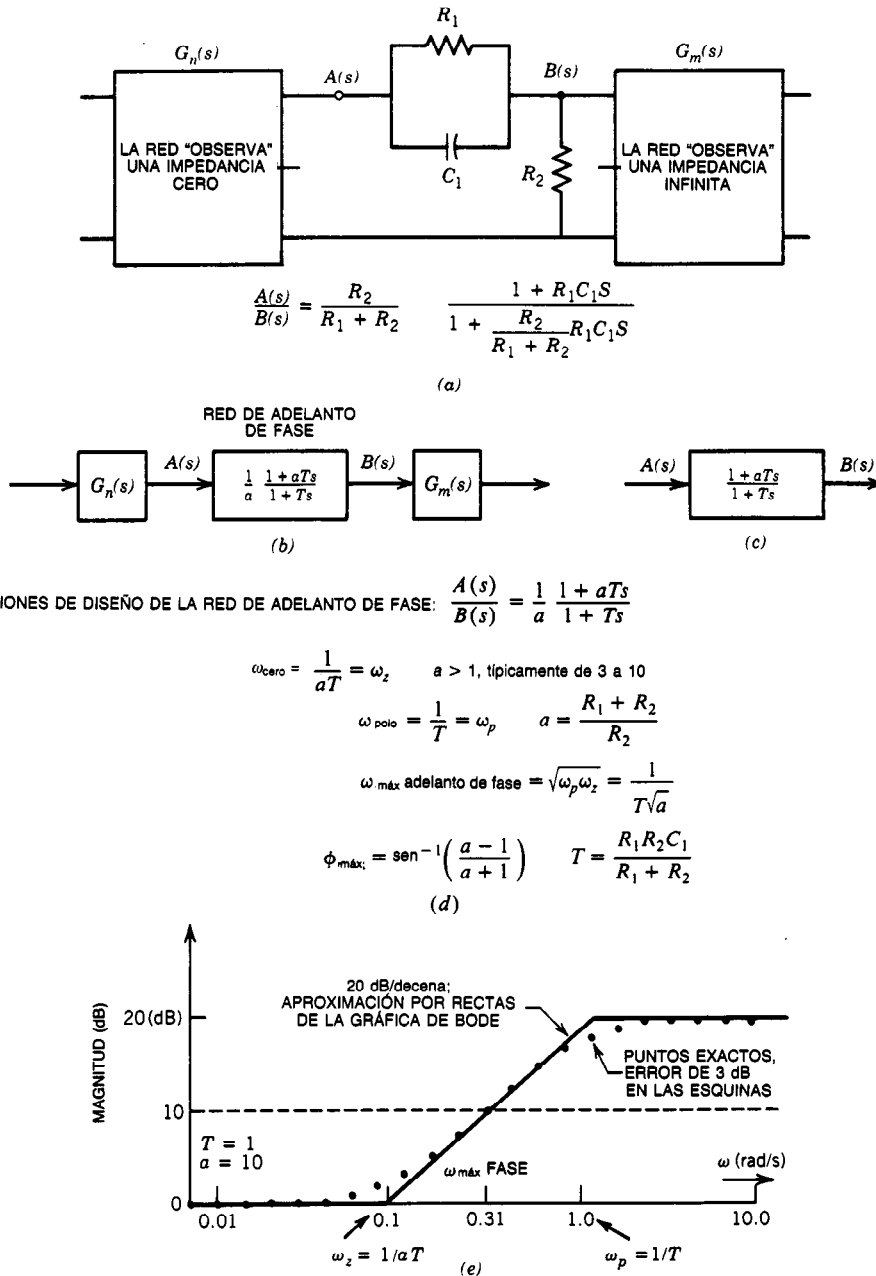


Fig. 34-16. Red pasiva de adelanto de fase de primer orden:

a) Diagrama circuital de la red que contiene R_1 , C_1 y R_2 . Suele incorporarse una ganancia de a (para cancelar la atenuación en la red de a) en $G_n(s)$ o $G_m(s)$ ya sea como amplificador compensador (que también producirá la impedancia que se requiere) o como un ajuste de las constantes $G_n(s)$ o $G_m(s)$.

b) Diagrama de bloques. a = atenuación = $(R_1 + R_2)/R_2$, $a > 1$; T = constante de tiempo = $(R_1 R_2 C_1)/(R_1 + R_2)$; $A(s)$ = señal de entrada de la red; $B(s)$ = señal de salida; $G_n(s)$, $G_m(s)$ = ganancias no compensadas o funciones de transferencia originales.

c) Red simplificada. Ganancia de a sumada externamente, que cancela el factor de atenuación $1/a$ que se muestra en b).

d) Ecuaciones de diseño.

e) Gráfica de magnitud de Bode de $(1 + 10s)/(1 + s)$ para una red simplificada de la forma $(1 + aTs)/(1 + Ts)$.

$$\text{Magnitud} = 20 \log \left| \frac{1 + 10s}{1 + s} \right|_{s=j\omega} \quad \omega_z = 0.1, \quad \omega_p = 1.0, \quad \omega_{\text{máx}} = 0.31$$

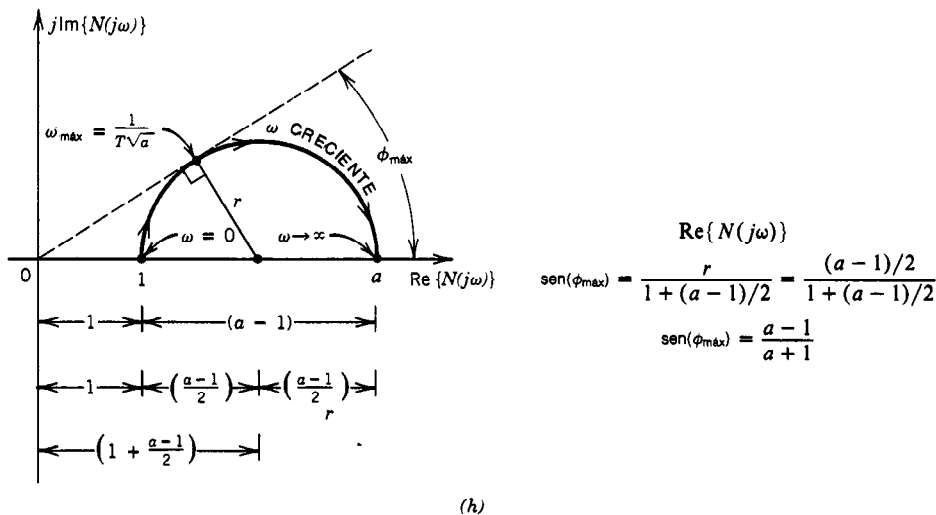
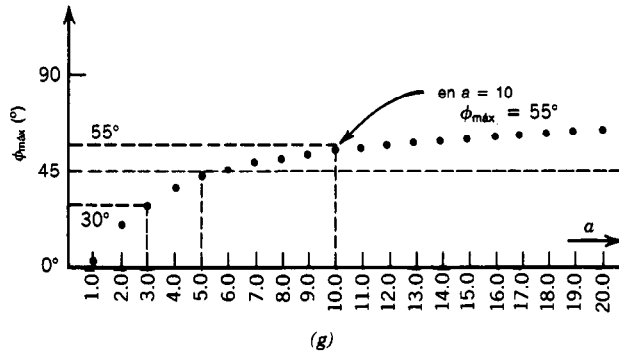
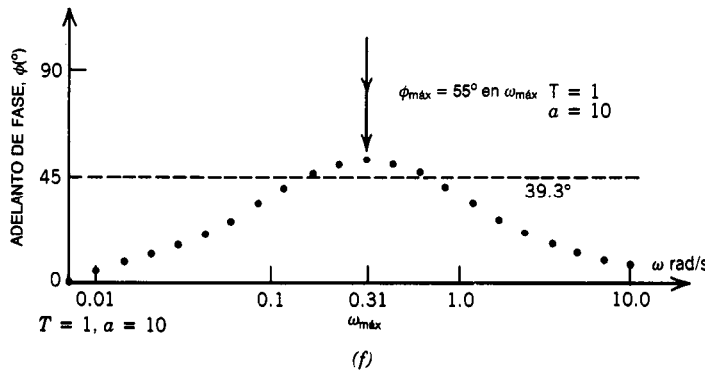


Fig. 34-16 (cont.). Red pasiva de adelanto de fase de primer orden:

f) Gráfica de fase de Bode de $(1 + 10s)/(1 + s)$. $\omega_m = \sqrt{\omega_z \omega_p} = \omega_{\text{máx}}$, $\omega_m = 0.31 = \sqrt{0.1 - 1.0}$.
 g) Gráfica de $\omega_{\text{máx}}$ contra a , $\phi_{\text{máx}} = \text{sen}^{-1}[(a-1)/(a+1)]$. En $a = 3$, $\phi_{\text{máx}} = 30.0^\circ$. En $a = 6$, $\phi_{\text{máx}} = 45.6^\circ$. Los valores numéricamente tabulados de adelanto de fase $\phi_{\text{máx}}$ en función de la atenuación de la red a se dan en la figura 34-15f. Obsérvese que a es igual a la razón polo: cero, ω_p/ω_z . En la $a = 1$, la red se reduce a una ganancia unitaria, con adelanto de fase cero y atenuación de 0 dB ($20 \log 1 = 0$ dB). La escala típica de a es de 3 a 10. Los valores menores de 3 producen un adelanto de fase muy pequeño para ser práctico, mientras que los valores mayores de 10 producen incrementos relativamente pequeños en el adelanto de fase para un incremento de atenuación dado.
 h) Gráfica polar de la red simplificada $N(s)$. $N(s) = (1 + aTs)/(1 + Ts)$, $s = j\omega$. Construcción geométrica de $\text{sen}(\phi_{\text{máx}}) = (a-1)/(a+1)$. $a > 1$, $\omega_{\text{cero}} = 1/aT$, $\omega_{\text{polo}} = 1/T$, $\omega_{\text{máx}} = \text{punto medio en la gráfica de fase log } \omega = \text{media geométrica}$. $\omega_{\text{máx}} = \sqrt{\omega_z \omega_p}$, $\omega_{\text{máx}} = \sqrt{(1/aT)(1/T)}$, $\omega_{\text{máx}} = 1/(T\sqrt{a})$.

Tabla 34-24. Compensación por retroalimentación de ciclo menor, utilizada para incrementar la amortiguación del sistema

Tipo de sistema	Diagrama de bloques	Cálculos
No compensado		$G(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{2}{s(s+1) + 2} = \frac{2}{s^2 + s + 2}$ <p>o bien $G(s) = \frac{2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}$</p> <p>donde $\omega_n = \sqrt{2}$</p> $2\xi\omega_n = 1$ $\xi = 1/(2\sqrt{2}) = 0.35$
Compensado		$G(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{2}{s(s+1) + 2Ks + 2} = \frac{2}{s^2 + (2K+1)s + 2}$ <p>o bien $G(s) = \frac{2}{s^2 + 2\xi'\omega_n s + \omega_n^2}$</p> <p>donde $\omega_n = \sqrt{2}$</p> $2\xi'\omega_n = 2K + 1$ $\xi' = \frac{2K + 1}{2\sqrt{2}}$
Resultados	<ol style="list-style-type: none"> 1. Constante de amortiguación compensada = 0.7 2. Frecuencia natural compensada no afectada, $\omega_n = \sqrt{2}$ 3. Compensación agregada de 0.49s = Ks. Esta retroalimentación cambia la constante de amortiguación ξ de 0.35 a 0.7 	<p>Calcular K para la constante de amortiguación a fin de minimizar la sobrecorrección y el tiempo de ascenso</p> $\xi' = 0.7 = \frac{2K + 1}{2\sqrt{2}}$ $K = \frac{2\sqrt{2}(0.7) - 1}{2} = 0.49$

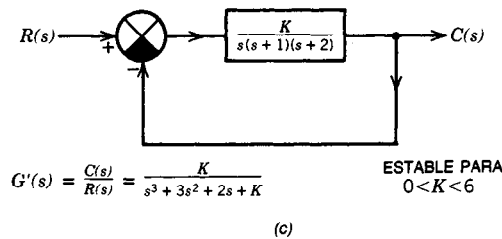
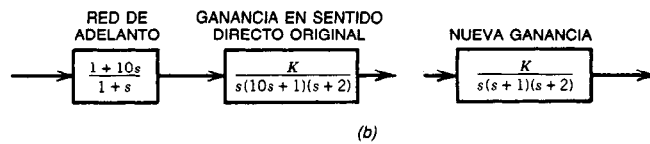
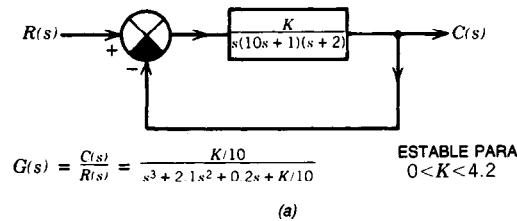
Para los filtros de adelanto y de retraso, una regla empírica adecuada es que los polos y ceros del filtro deben estar separados, aproximadamente, una decena en la escala de frecuencia. Si no funciona ninguno de estos métodos, se requiere un filtro de alto orden o se deben cambiar los componentes del sistema.

Compensación por retroalimentación de ciclo menor

La variación de las funciones de transferencia del sistema suele realizarse mediante amortiguación. La amortiguación se puede introducir en forma física por medio de amortiguadores hidráulicos, neumáticos o electromecánicos, o bien agregando otro ciclo de retroalimentación en el que se incorpore un elemento diferenciador, tal como un tacómetro, o un giroscopio de viraje.

Para un tacómetro, $V_{sal} = K \cdot \text{RPM} = K\theta = Ks\theta(s)$. Ésta se denomina retroalimentación de ciclo menor (tabla 34-24).

Cancelación de polos y ceros. Otro método de modificar y, por tanto, estabilizar la función de transferencia de un sistema, implica el método conceptualmente simple de cancelar un polo añadiendo un término multiplicativo que contenga un factor cero idéntico al factor del polo. Matemáticamente, ésta es una solución perfecta. En la realidad no es tan perfecta, en virtud de que el cero no puede cancelar exactamente el polo, debido a tolerancias y variaciones de componentes y también al efecto de cambiar el estado y la edad del sistema (véase la figura 34-17).



Antes de la cancelación de polos			Después de la cancelación de polos		
	$s^3 + 2.1s^2 + 0.2s + K/10$			$s^3 + 3s^2 + 2s + K$	
s^3	1	0.2	s^3	1	2
s^2	2.1	$K/10$	s^2	3	K
s^1	$\frac{0.42 - K/10}{2.1}$	$(K < 4.2)$	s^1	$\frac{6 - K}{3}$	$(K < 6)$
s^0	$K/10$	$(K > 0)$	s^0	K	$(K > 0)$

(d)

Fig. 34-17. Cancelación de polos y ceros. a) Sistema no compensado. Ganancia máxima $K = 4.2$. b) Compensación de la red de adelanto, cancela el polo en $(10s + 1)$. c) Sistema compensado. Ganancia máxima $K = 6.0$. Por tanto, se mejora la estabilidad. d) Arreglos de Routh-Hurwitz.

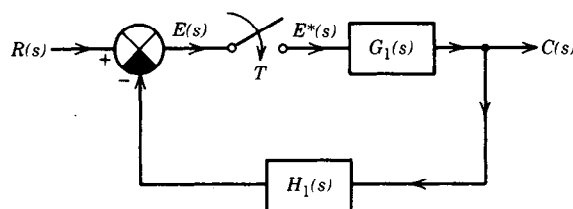


Fig. 34-18. Sistema de control de datos muestreados. $E^*(s)$ = transformada de Laplace de $E^*(t)$; $E^*(t)$ = valores muestreados de $E(t)$ en los tiempos $t = nT$; $E^*(t) = E(0)\delta(t) + E(T)\delta(t - T) + E(2T)\delta(t - 2T) + \dots + E(nT)\delta(t - nT)$; $G_1(s)$ = función de transferencia de planta o ganancia en sentido directo; $H_1(s)$ = función de transferencia o ganancia de retroalimentación; $R(s)$ = señal de entrada de referencia; $C(s)$ = señal de salida controlada; $\delta(nT)$ = función delta de Dirac, donde $\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(nT)dt = f(nT)$, $\delta(nT) = 0$ ($nT \neq 0$), $\delta(0) = \infty$, $\delta(t - nT)|_{t=nT} \rightarrow \infty$, $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)dt = 1$ = ponderación del impulso.

Nota sobre los decibeles. Los decibeles (dB) se evalúan como $20 \log |G(j\omega)|$, donde $|G(j\omega)|$ es una magnitud, no una función de potencia [$G(j\omega) = G(s)|_{s=j\omega}$ evaluada en $s = j\omega$]. Para funciones de potencia, donde las ganancias son la razón de entrada de potencia sobre salida de potencia, como la dBm, los decibeles se evalúan como $10 \log |G(j\omega)|$ y dBm = decibeles relativos a 1 mW, o bien:

$$\text{dBm} = 10 \log \left| \frac{P_{\text{sal}}}{10^{-3}} \right|$$

El prefijo “deci” significa un décimo. Por tanto, un **decibel** es un décimo de un bel, que es una unidad de potencia, y la forma “10 log” es fácil de recordar. La forma “20 log” también lo es si se tiene presente que, para el voltaje que pasa por una resistencia, la potencia = V^2/R , o bien la potencia varía con el cuadrado del voltaje. V es una función del voltaje o la magnitud y $10 \log |V^2| = 20 \log |V|$. La unidad de ganancia de potencia, el bel, recibió su nombre en honor de Alexander Graham Bell, inventor del teléfono. El bel no se utiliza, puesto que representa una ganancia de potencia muy grande; es decir, un factor de 10 por cada bel. Una ganancia de 5 bel = $10^5 = 100\,000$.

Obsérvese que una ganancia de 2 corresponde a una ganancia de 6 dB en magnitud [$20 \log 2 = 20(0.3) = 6$] y una ganancia de 3 dB en potencia [$10 \log 2 = 10(0.3) = 3$]. No se deben confundir estos dos factores, ya que 6 dB y 3 dB corresponden a una ganancia de 2. Sin embargo, las ganancias se definen en forma diferente, donde una es una ganancia de magnitud o de voltaje (6 dB) y la otra de potencia (3 dB). En las gráficas de magnitud de Bode de esta sección, una ganancia 2 corresponde a 6 dB y una ganancia de 1/2 corresponde a -6 dB.

34.5 CONTROL DE DATOS MUESTREADOS

Los sistemas de control de datos muestreados por computadora digital de tiempo discreto son cada vez más comunes a medida que se reduce el precio de los cir-

cuitos electrónicos digitales (y en particular de los microprocesadores). En la década de 1960, una nota anual común de consumo de calefacción doméstica era menor de \$ 1 000 (dólares). Una computadora digital común, capaz de controlar la calefacción de una casa, costaba mucho más de \$ 1 000. En la década de 1980, dos décadas después, los costos de combustible habían aumentado en un factor de 5 aproximadamente, mientras que los costos de las computadoras habían descendido en un factor quizá de 1 000, de manera que una computadora que controle la calefacción doméstica ahora cuesta alrededor de \$ 100. El costo real del microprocesador es quizá de \$ 10. Así impulsado por el costo, el mundo del control doméstico e industrial se adapta rápidamente al control digital (o de datos muestreados).

Existen controladores de motores de automóviles, de elevadores y de sistemas de calefacción a base de microprocesadores, y hasta una máquina de coser controlada por señales digitales. Cualquier sistema de control por retroalimentación en el que se utilice un microprocesador es un sistema de control de datos muestreados.

Las computadoras digitales operan tomando un número o muestra como entrada, lo procesan en uno o más ciclos de reloj de la computadora, y producen una salida digital. Una muestra, señal, número o código discreto es la entrada de la computadora, y una muestra, señal, número o código discreto es la salida.

Los sistemas en los que se utilizan señales discretas se conocen en conjunto como sistemas de control de datos muestreados. El factor de identificación de un sistema de control de datos muestreados es el muestreador, o interruptor de muestreo, que a menudo se incorpora en un convertidor de analógico a digital (A/D), de manera que no es visible como una entidad aparte. (En la sección 37.4 se analizan los convertidores A/D.) El muestreador se esquematiza como un interruptor, que se cierra cada T segundos (fig. 34-18). Un valor común de T va de 1 a 10^{-6} s. Los periodos de muestreo tan breves como 10^{-9} s y 1 ns son posibles pero no comunes. En un controlador digital podría emplearse un tiempo de muestreo de unos cuantos mi-

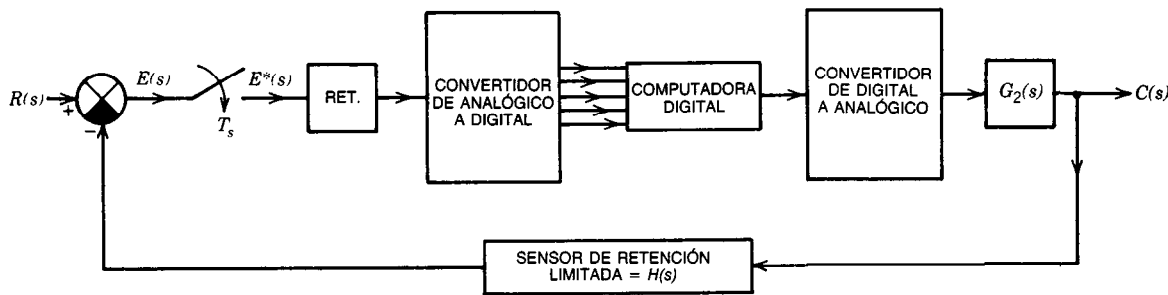


Fig. 34-19. Sistema de control de datos muestreados mediante un controlador digital. RET. = retención.

crosegundos, mientras que el ciclo de reloj interno de la computadora digital podría ser tan breve como de algunos nanosegundos (fig. 34-19).

Los conceptos básicos de la teoría del control de datos muestreados se generaron durante la Segunda Guerra Mundial en un esfuerzo por analizar y diseñar armas de radar (*radio automatic ranging*). Los radares operan mediante la transmisión de un pulso breve, y la recepción posterior de un pulso de retorno debilitado que se ha reflejado en un blanco cualquiera presente en la trayectoria del haz del radar. La demora entre el pulso transmitido y la señal de retorno recibida es proporcional a la distancia entre la antena de radar y el objetivo.

Un radar en operación emplea una frecuencia de repetición de pulsos (PRF, de *pulse repetition frequency*), que se convierte en la frecuencia del interruptor de muestreo de un sistema de control de seguimiento cualquiera que incorpore un radar (p. ej., el radar sigue el objetivo y representa el comparador del sistema de retroalimentación). En la figura 34-20 se presenta el diagrama de bloques de un radar de seguimiento. El periodo del interruptor de muestreo es el recíproco de la frecuencia de muestreo, o $T = 1/\text{PRF}$. Es interesante el hecho de que las frecuencias de repetición de los pulsos del radar están en el intervalo de frecuencia de audio, y una persona expuesta directamente a un haz de intensidad suficiente los puede percibir como un ruido misterioso, a menudo un "clic" o chasquido. La respuesta apropiada a esta circunstancia consiste en apartarse del haz de inmediato entrando en una estructura conductora (como un edificio de acero o un automóvil) o alejándose corriendo a toda velocidad del alcance del haz, de preferencia en ángulo recto con

respecto a su eje. En el capítulo 51 se presenta una exposición detallada de los principios del radar. Para una presentación completa del control de datos muestreados, el libro de Tou¹³ es uno de los mejores:

34.6 TEORÍA DE LA TRANSFORMADA z DE LOS SISTEMAS DE CONTROL

Las transformadas z se emplean para resolver ecuaciones en diferencias, del mismo modo en que las transformadas de Laplace se utilizan para resolver ecuaciones diferenciales. En particular, las transformadas z se utilizan para generar funciones de transferencia de datos muestreados para sistemas de control que operan con señales muestreadas (o discretas).

Las restricciones sobre la transformada z son las mismas que se imponen a la transformada de Laplace:

1. Las ecuaciones deben ser lineales.
2. Los coeficientes de la ecuación deben ser constantes e invariantes en el tiempo.

Además, para el análisis de la transformada z que sigue, el tiempo de muestreo T debe ser una constante.

La transformada z es de hecho un caso especial de la transformada de Laplace, donde z se define como:

$$z = e^{sT} \quad T = \text{periodo de muestreo} \quad (34-35)$$

o de manera equivalente:

$$s = \frac{1}{T} \ln z \quad (34-36)$$

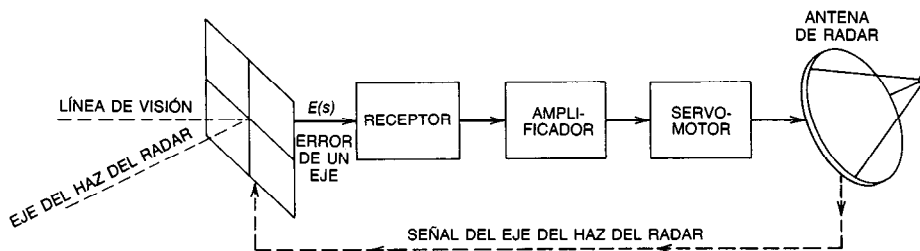


Fig. 34-20. Configuración básica del radar de seguimiento, un eje.

Invertiendo la ecuación 34-35 se obtiene:

$$z^{-1} = e^{-sT} \quad (34-37)$$

En el dominio de Laplace, e^{-sT} corresponde a un retardo puro de T segundos. Por tanto, en el dominio de z , z^{-1} corresponde a un retardo puro de T segundos. Esta es la base intuitiva de la transformada z . Cada muestra se retrasa T segundos respecto de la muestra anterior (p. ej., $T, 2T, 3T, 4T, \dots, nT$, que se convierten en z en el dominio $1, z^{-1}, z^{-2}, z^{-3}, z^{-4}, \dots, z^{-n}$). Esto se ilustra mejor con un ejemplo. En la figura 34-21, una función curvilínea continua $f(t)$ se muestrea cada T segundos. La transformada z se deduce mediante el artificio del muestreo delta de Dirac, donde las muestras son de duración infinitesimal, con peso (o área) igual al valor de la función que se muestrea en el tiempo de la muestra. Esto asegura que las muestras sean constantes, dado que la función $f(t)$ no puede cambiar en un tiempo cero.

Aunque las funciones delta son en teoría de amplitud infinita, sólo se utilizan sus áreas para obtener resultados numéricos, y el área de la función delta de Dirac se define como la unidad. $2\delta(t)$ significa que el peso o área de la función delta se multiplica por dos. No implica problema alguno el multiplicar por dos el infinito. Matemáticamente:

$$\delta(t) = 0 \quad t \neq 0 \quad \text{y} \quad \delta(t) \rightarrow \infty \quad t = 0$$

asimismo:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) dt = 1 \quad \text{y} \quad \int_{0-}^{0+} \delta(t) dt = 1 \quad (34-38)$$

Se pueden utilizar los límites $0 - a 0 +$, ya que $\delta(t)$ tiene valor solamente en $t = 0$. Ese valor es infinito, pero la integral es finita e igual a la unidad. Para un peso de pulso de dos:

$$\int_{-\infty}^{\infty} 2\delta(t) dt = 2 \quad \text{y} \quad \int_{-\infty}^{\infty} f(t)d(t) dt = f(0) \quad (34-39)$$

y:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)d(t - T) dt = f(T)$$

La figura 34-21 muestra una cadena o peine infinitos (los pulsos se parecen a los dientes de un peine $\uparrow \uparrow \uparrow \uparrow \uparrow$) de funciones delta. Cada función delta selecciona o muestrea el valor de la función continua $f(t)$ en un tiempo en el que la función delta se "enciende"; es decir, cuando el argumento de la función delta es cero. Esto es, $\delta(t - nT)$ se "enciende" en $t = nT$ para producir $\delta(0)$ que, a su vez, produce una muestra en un tiempo de nT segundos.

Es importante no confundir la función delta de Dirac con la función delta de Kronecker, ya que ambas se representan como $\delta(t)$. La función delta de Dirac tiene una amplitud infinita, mientras que la de Kronecker tiene una amplitud de la unidad. A menos que se espe-

cifique lo contrario, en esta sección el término "función delta" y el símbolo $\delta(t)$ se refieren a la de Dirac.

La función muestreada $\delta^*(t)$ de la figura 34-21 se compone de funciones delta de ponderaciones (pesos) 0.1, 0.5, 0.7, 1.0, etc. Las funciones delta se presentan con una altura proporcional a su área o peso. Matemáticamente, todas las alturas son infinitas. En la realidad, las alturas son exactamente como se muestran. En el mundo real no existen muestreadores delta de Dirac con amplitudes infinitas; sin embargo, la teoría produce resultados correctos y simplifica las matemáticas.

En la figura 34-21 se ilustra la transformada de Laplace de $f^*(t)$, $F^*(s)$; se obtiene utilizando el par transformado¹³:

$$k\delta(t - nT) \Rightarrow ke^{-nTs} \quad T = \text{tiempo de muestreo} \quad (34-40)$$

que produce:

$$F^*(s) = \sum_{n=0}^{\infty} f(nT)e^{-nTs} \quad (34-41)$$

La ecuación 34-41 es simplemente una suma de valores muestreados $f(nT)$, donde cada valor se retarda nT segundos en el factor e^{-nTs} , y $f(nT)$ es un número como 0.1, 0.5 o -100.86 .

Por último, se sustituye z , tal como lo define la ecuación 34-37 y se repite aquí:

$$z^{-1} = e^{-sT} \quad \text{o bien} \quad z = e^{sT} \quad (34-37)$$

Esta sustitución produce la transformada z de $f(t)$:

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f(nT)z^{-n} \quad (34-42)$$

Si esta serie converge, $F(z)$ se puede expresar en forma cerrada. Si no converge, la ecuación 34-42 aún produce la transformada z , que es no acotada cuando $n \rightarrow \infty$.

Para poner un ejemplo, considérese la transformada z de un escalón unitario $u(t)$, donde $u(t)$ es igual a 1 para $t \geq 0$. Insertando $u(t)$ en la ecuación 34-42:

$$z[u(t)] = F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} u(t)z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} 1z^{-n} \quad (34-43)$$

Escribiendo la serie:

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^{-n} = 1 + z^{-1} + z^{-2} + z^{-3} + \dots + z^{-\infty}$$

Factorizando z^{-1} :

$$F(z) = 1 + z^{-1}(1 + z^{-1} + z^{-2} + \dots + z^{-\infty})$$

Obsérvese que la serie entre paréntesis es la representación en serie de $F(z)$ para un escalón unitario ya mostrada dos líneas antes. Por tanto:

$$F(z) = 1 + z^{-1}[F(z)]$$

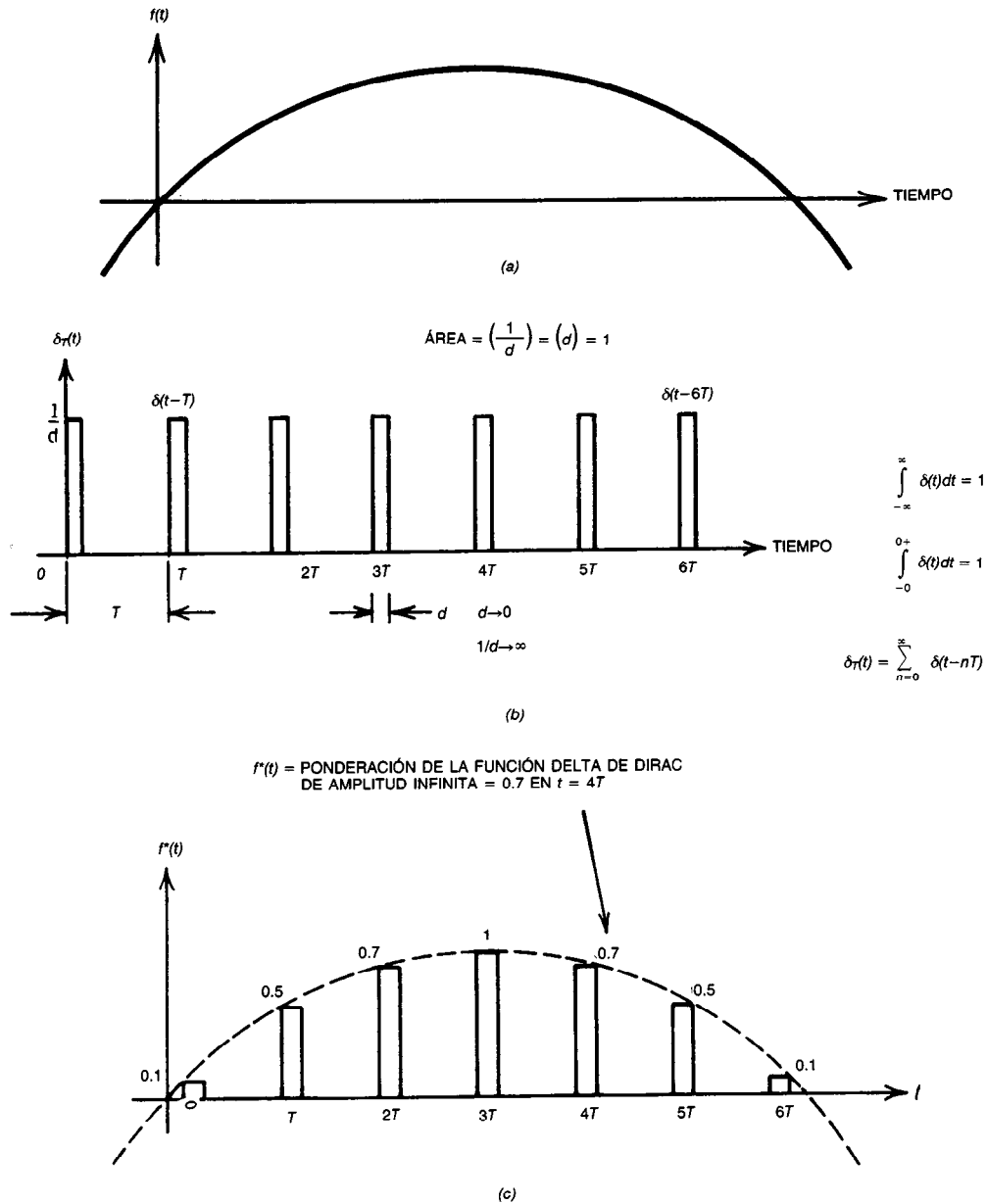


Fig. 34-21. El muestreo y la transformada z:

a) Función de tiempo continua $f(t)$ por muestrear.

b) Muestreador delta de Dirac $\delta_T(t)$. δ = funciones delta de Dirac, T = periodo de muestreo.

c) Función muestreada $f^*(t)$. $f^*(t) = f(t) \cdot \delta_T(t)$, donde $f(t)$ se interpreta como la ponderación del impulso en el tiempo nT . La ponderación o peso se interpreta a su vez como el área del impulso.

$$f^*(t) = \sum_{n=0}^{\infty} f(nT) \delta(t - nT)$$

$$f^*(t) = 0.1\delta(t) + 0.5\delta(t - T) + 0.7\delta(t - 2T) + 1\delta(t - 3T) + \dots$$

$$\text{Transformada de Laplace } f^*(t) \Rightarrow F^*(s) = 0.1e^{0s} + 0.5e^{-Ts} + 0.7e^{-2Ts} + 1e^{-3Ts} + \dots$$

Dado que $L[k \cdot \delta(t - nT)] = ke^{-nTs}$, L = Operador de la transformada de Laplace $L[\delta(t)] = 1$; $L[\delta(t - nT)] = 1e^{-nTs}$.

$F^*(s)$	o bien $F^*(s) = \sum_{n=0}^{\infty} f(nT)e^{-nTs}$
transformada z	$F(z) = 0.1z^0 + 0.5z^{-1} + 0.7z^{-2} + 1z^{-3} + \dots$
$z = e^{sT}$	o bien
$F(z)$	$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f(nT)z^{-n}$
Resumen, en forma de serie	$f^*(t) = 0.1\delta(t) + 0.5\delta(t - T) + 0.7\delta(t - 2T) + 1\delta(t - 3T) + \dots$ $F^*(s) = 0.1e^{0s} + 0.5e^{-Ts} + 0.7e^{-2Ts} + 1e^{-3Ts} + \dots$ $F(z) = 0.1z^0 + 0.5z^{-1} + 0.7z^{-2} + 1z^{-3} + \dots$
Resumen, en forma de sumatoria	$f^*(t) = \sum_{n=0}^{\infty} f(nT)\delta(t - nT)$ $F^*(s) = \sum_{n=0}^{\infty} f(nT)e^{-nTs}$ $F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f(nT)z^{-n}$

(d)

Fig. 34-21 (cont.). El muestreo y la transformada z : d) Resumen de la transformación de Z de una función muestreada.

Reagrupando términos:

$$F(z)(1 - z^{-1}) = 1$$

Despejando $F(z)$ se obtiene la representación en forma cerrada de $F(z)$ para un escalón unitario:

$$F(z) = \frac{1}{1 - z^{-1}} = \frac{1}{z - 1}$$

La serie converge para $|z^{-1}| < 1$. De manera similar pueden deducirse las transformadas z de diversas funciones del tiempo (véase la tabla 34-25).La transformada z se puede invertir⁶ a la forma de serie infinita dividiendo el denominador entre el numerador de $F(z)$, de manera que se produzcan potencias negativas de z . Cuando $F(z) = z/(z - 1)$:

$$\begin{array}{r} 1 + z^{-1} + z^{-2} + z^{-3} + \dots \\ z - 1 \overline{)z} \\ \underline{z - 1} \\ 1 \\ \underline{1 - z^{-1}} \\ z^{-1} \\ \underline{z^{-1} - z^{-2}} \\ z^{-2} \\ \underline{z^{-2} - z^{-3}} \\ z^{-3} \end{array} \quad (34-44)$$

Los coeficientes de desarrollo de la serie infinita de $F(z)$ en potencias de z^{-n} son los valores de la función

del tiempo $f(t)$ en los tiempos $t = nT$, o $f(nT)$. Por tanto, para convertir una serie infinita de la transformada z en un resultado del dominio del tiempo, simplemente se igualan los coeficientes z^{-n} con los valores de $f(nT)$. $F(z) = 1 + z^{-1} + z^{-2} + z^{-3} + \dots$ se convierte en $f(0) = 1, f(T) = 1, f(2T) = 1, f(3T) = 1, \dots$. Todos los coeficientes son 1 para la función escalón unitario $u(t) \Rightarrow z/(z - 1)$. Obsérvese que los valores de $f(t)$ en los tiempos entre los instantes de muestreo $T, 2T, 3T, \dots$ no se conocen y de hecho podrían oscilar ampliamente. Este comportamiento se descubre empleando la transformada z modificada para determinar el valor de $f(t)$ en tiempos entre los instantes de muestreo (véase la sección 34.7).

Las transformadas z se pueden aplicar directamente para generar algoritmos de computadora digital o resolver ecuaciones en diferencias que describan procesos de control. En el ejemplo 34.5 se ilustra la aplicación de un método de desarrollo en fracciones parciales a una transformada z , con el fin de determinar la solución en el tiempo para una ecuación en diferencias dada.

Obsérvese que el desarrollo en fracciones parciales se realiza con $F(z)/z$, y no con $F(z)$ sola. Después de completarse el desarrollo de $F(z)/(z)$, ambos miembros de la ecuación resultante se multiplican por z para producir un desarrollo en fracciones parciales de $F(z)$ que contenga un término z en el numerador de cada fracción. Esto permite utilizar directamente las transformadas z de la tabla 34-25.

Ejemplo 34.5. Solución de la transformada z de una ecuación en diferencias¹⁴. Considérese la ecuación en diferencias de primer orden:

$$Y(k) = Bu(k) + AY(k-1)$$

donde $u(k) = 0, k = -1, -2, -3, \dots$

$$u(k) = 1, k = 0, 1, 2, 3, \dots$$

$B, A = \text{constantes}$

Esto se puede convertir en una función del tiempo muestreado de la manera siguiente:

$$Y(nT) = Bu(nT) + AY[(n-1)T] \quad (\text{sea } T = 1 \text{ s})$$

La función del tiempo equivalente es:

$$Y(t) = Bu(t) + AY(t-T)$$

La equivalencia se cumple sólo en los instantes de muestreo $t = nT = nk$.

Empleando la tabla 34-25, se descubre fácilmente que la transformada z es:

$$Y(t) \Rightarrow Y(z)$$

$$u(t) \Rightarrow \frac{z}{z-1}$$

$$Y(t-T) \Rightarrow z^{-1}Y(z)$$

Al insertar estas fórmulas se obtiene:

$$Y(z) = B \frac{z}{z-1} + Az^{-1}Y(z)$$

Despejando $Y(z)$ mediante la agrupación de términos:

$$Y(z)(1 - Az^{-1}) = B \frac{z}{z-1}$$

Dividiendo y multiplicando por z/z se obtiene:

$$Y(z) = B \frac{z}{z-1} \frac{1}{1-Az^{-1}} = B \frac{z}{z-1} \frac{z}{z-A}$$

Como se necesita un término z en el numerador para las transformadas z (véase la tabla 34-25), se desarrolla $Y(z)/z$ como un grupo de fracciones parciales y después se multiplican ambos lados por z para obtener $Y(z)$:

$$\frac{Y(z)}{z} = \frac{Bz}{(z-1)(z-A)}$$

Desarrollando en fracciones parciales:

$$\frac{Y(z)}{z} = \frac{C}{z-1} + \frac{D}{z-A} = \frac{Bz}{(z-1)(z-A)}$$

Despejando C y D por el método del residuo se obtiene:

$$C = \frac{Y(z)}{z} (z-1) \Big|_{z=1} = \frac{Bz}{z-A} \Big|_{z=1} = \frac{B}{1-A}$$

$$D = \frac{Y(z)}{z} (z-A) \Big|_{z=A} = \frac{Bz}{z-1} \Big|_{z=A} = \frac{BA}{A-1} = \frac{-BA}{1-A}$$

Si se vuelven a insertar C y D en $Y(z)/z$, se obtiene:

$$\frac{Y(z)}{z} = \frac{B}{1-A} \frac{1}{z-1} + \frac{-BA}{1-A} \frac{1}{z-A}$$

Factorizando $B/(1-A)$:

$$\frac{Y(z)}{z} = \frac{B}{1-A} \left[\frac{1}{z-1} + \frac{-A}{z-A} \right]$$

Multiplicando ambos lados de la ecuación por z :

$$Y(z) = \frac{B}{1-A} \left[\frac{z}{z-1} + \frac{-Az}{z-A} \right]$$

$Y(nT)$ se obtiene empleando las transformadas z inversas (tabla 34-25):

$$\frac{z}{z-1} \Rightarrow 1 u(t)$$

$$\frac{z}{z-A} \Rightarrow A^n u(t)^* \quad \begin{array}{l} n = \text{número de muestra} \\ n = 0, 1, 2, \dots \end{array}$$

Por tanto $Y(nT) = B/(1-A)[1 - A \cdot A^n]u(nT)$. Simplificando:

$$Y(nT) = \frac{B}{1-A} [1 - A^{n+1}] = B \frac{1 - A^{n+1}}{1-A} \quad n \geq 0$$

En términos de k , el número de muestra:

$$Y(K) = B \frac{1 - A^{K+1}}{1-A} \quad \text{donde } T = 1 \text{ s, } k \geq 0$$

Esta expresión en forma cerrada se reconoce como la fórmula de la suma de una serie geométrica finita con primer término B y razón A , que contiene $K+1$ términos; es decir:

$$Y(k) = B + AB + A^2B + A^3B + \dots A^KB$$

o bien:

$$Y(k) = B(1 + A + A^2 + A^3 + \dots A^K)$$

Ejemplo 34.6. Solución de la transformada z del sistema de control de datos muestreados de ciclo cerrado. Determinése la salida $C^*(t)$ en los instantes de muestreo del sistema de control de datos muestreados que se presenta en la figura 34-22. Obsérvese que $C(t)$ es

*Esta transformada se obtiene a partir de $z/(z - e^{-aT}) \rightarrow e^{-at}$ observando que $t = nT$ y haciendo $e^{-aT} = A$. Por tanto, $z/(z-A) \rightarrow e^{-at} = e^{-anT} = (e^{-aT})^n = A^n$.

Tabla 34-25. Tabla de transformadas z

Transformada de Laplace $F(s)$	Función del tiempo $f(t)$, $t > 0$	Transformada z $F(z)$
1	$\delta(t)^a$	1
e^{-kTs} c	$\delta(t - kT)$	z^{-k}
$\frac{1}{s}$	$u_s(t)^b$	$\frac{z}{z-1}$
$\frac{1}{s^2}$	t	$\frac{Tz}{(z-1)^2}$
$\frac{2}{s^3}$	t^2	$\frac{T^2z(z+1)}{(z-1)^3}$
$\frac{1}{s+a}$	e^{-at}	$\frac{z}{z-e^{-aT}}$
$\frac{1}{(s+a)^2}$	te^{-at}	$\frac{Tze^{-aT}}{(z-e^{-aT})}$
$\frac{a}{s(s+a)}$	$1 - e^{-at}$	$\frac{z(1-e^{-aT})}{(z-1)(z-e^{-aT})}$
$\frac{1}{(s+a)(s+b)}$	$\frac{1}{(b-a)}(e^{-at} - e^{-bt})$	$\frac{1}{(b-a)} \left[\frac{z}{z-e^{-aT}} - \frac{z}{z-e^{-bT}} \right]$
$\frac{a}{s^2(s+a)}$	$t - \frac{1}{a}(1 - e^{-at})$	$\frac{Tz}{(z-1)^2} - \frac{(1-e^{-aT})}{a(z-1)(z-e^{-aT})}$
$\frac{a}{s^3(s+a)}$	$\frac{1}{2} \left(t^2 - \frac{2}{a}t + \frac{2}{a^2} \right) u_s(t) - \frac{2}{a^2}e^{-at}$	$\frac{T^2z}{(z-1)^3} + \frac{(aT-2)Tz}{2a(z-1)^2} + \frac{z}{a^2(z-1)} - \frac{z}{a^2(z-e^{-aT})}$

Tabla 34-25. Tabla de transformadas z (continuación)

Transformada de Laplace $F(s)$	Función del tiempo $f(t)$, $t > 0$	Transformada z $F(z)$
$\frac{a^2}{s(s+a)^2}$	$u_s(t) - (1+at)e^{-at}$	$\frac{z}{z-1} - \frac{z}{z-e^{-aT}} - \frac{aTe^{-aT}z}{(z-e^{-aT})^2}$
$\frac{a^2}{s^2(s+a)^2}$	$t - \frac{2}{a}u_s(t) + \left(t + \frac{2}{a}\right)e^{-at}$	$\frac{1}{a} \left[\frac{(aT+2)z-2z^2}{(z-1)^2} + \frac{2z}{z-e^{-aT}} + \frac{aTe^{-aT}z}{(z-e^{-aT})^2} \right]$
$\frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$	$\sin \omega t$	$\frac{z \sinh \omega T}{z^2 - 2z \cos \omega T + 1}$
$\frac{s}{s^2 + \omega^2}$	$\cos \omega t$	$\frac{z(z - \cos \omega T)}{z^2 - 2z \cos \omega T + 1}$
$\frac{\omega}{s^2 - \omega^2}$	$\sinh \omega t$	$\frac{z \sinh \omega T}{z^2 - 2z \cosh \omega T + 1}$
$\frac{s}{s^2 - \omega^2}$	$\cosh \omega t$	$\frac{z(z - \cosh \omega T)}{z^2 - 2z \cosh \omega T + 1}$
$\frac{\omega}{(s+a)^2 + \omega^2}$	$e^{-at} \sin \omega t$	$\frac{ze^{-aT} \sinh \omega T}{z^2 - 2ze^{-aT} \cos \omega T + e^{-2aT}}$
$\frac{a^2 + \omega^2}{s[(s+a)^2 + \omega^2]}$	$1 - e^{-at} \sec \phi \cos(\omega t + \phi) \quad \phi = \tan^{-1}(-a/\omega)$	$\frac{z}{z-1} - \frac{z^2 - ze^{-aT} \sec \phi \cos(\omega T - \phi)}{z^2 - 2ze^{-aT} \cos \omega T + e^{-2aT}}$
$\frac{s+a}{(s+a)^2 + \omega^2}$	$e^{-at} \cos \omega t$	$\frac{z^2 - ze^{-aT} \cos \omega T}{z^2 - 2ze^{-aT} \cos \omega T + e^{-2aT}}$

Fuente. Adaptado de Tou¹³ y Ogata⁶.^a $\delta(t)$ = función delta de Dirac. $\delta(t) = 0$ para $t \neq 0$, $\delta(t) \rightarrow \infty$ para $t = 0$, $3\delta(t)$ = función delta de Dirac con ponderación de 3.

$$\int_{0-}^{0+} \delta(t) dt = 1$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) f(t) dt = f(0)$$

^b $u_s(t)$ = función escalón unitario, $u_s(t) = 0$, para $t < 0$, $u_s(t) = 1$ para $t > 0$.^c $z = e^{sT}$, donde T = período de muestreo de la transformada de z.^s $s = (1/T) \ln z$, donde s = variable de la transformación de Laplace. ω = variable de la transformación bilineal, que se utiliza para mapear el interior del círculo unitario en el dominio z, en el semiplano derecho del dominio ω , a través de $z = (1 + \omega)/(1 - \omega)$. Para verificar la estabilidad de $f(z)$, se sustituye z por $(1 + \omega)/(1 - \omega)$, se despeja $f(\omega)$ y se aplica la prueba de Routh-Hurwitz para $f(\omega) = 0$.

igual a $C^*(t)$ sólo en los instantes de muestreo. Considérese que la función de entrada $r(t)$ es un escalón unitario.

El sistema dado se transforma primero al dominio de z . Con referencia a la figura 34-22, la transformada z se deduce empleando el par transformado z , es decir:

$$\frac{a}{s(s+a)} \Rightarrow \frac{(1-e^{-at})z}{(z-1)(z-e^{-at})}$$

(Dados $T = 1/10$ s y $a = 10$, entonces $e^{-aT} = e^{-1} = 0.368$):

$$F(s) = \frac{K}{s(s+10)}$$

que puede expresarse por tanto como:

$$F(s) = (0.1K) \frac{10}{s(s+10)} \Rightarrow \\ \Rightarrow (0.1K) \frac{(1-0.368)z}{(z-1)(z-0.368)} = F(z)$$

Simplificando se obtiene:

$$F(z) = \frac{(0.1K)(0.632)z}{(z-1)(z-0.368)} = \frac{0.0632Kz}{z^2 - 1.368z + 0.368}$$

La ganancia de ciclo abierto $F(z)$ se convierte en la ganancia de ciclo cerrado $G(z)$ mediante la aplicación de la técnica de reducción del diagrama de bloques estándar:

$$G(z) = \frac{F(z)}{1+F(z)} = \frac{N(z)/D(z)}{1+N(z)/D(z)} = \\ = \frac{N(z)}{D(z)+N(z)}$$

donde $N(z)$ = numerador de $F(z)$
 $D(z)$ = denominador de $F(z)$
 $G(z)$ = ganancia de ciclo cerrado
 $F(z)$ = ganancia de ciclo abierto

o bien:

$$G(z) = \frac{0.0632Kz}{z^2 + (0.0632K - 1.368)z + 0.368}$$

Este sistema, como cualquier sistema de control por retroalimentación, se debe examinar en cuanto a su estabilidad.

La prueba estándar del arreglo de Routh-Hurwitz no puede aplicarse directamente a ecuaciones de la transformada z ; sin embargo, se puede emplear si la *transformación bilineal* se aplica antes a la ecuación característica (el denominador se iguala a cero) de la función de transferencia de ciclo cerrado de $G(z)$. La transformación bilineal, $z = (1+w)/(1-w)$, convierte la ecuación trascendental en z ($z = e^{sT}$) en una ecuación polinomial en w , que se puede analizar por medio del arreglo de Routh-Hurwitz.

La ecuación característica en el dominio z es:

$$z^2 + (0.0632K - 1.368)z + 0.368 = 0$$

Sustituyendo la transformada bilineal, ($z = 1+w)/(1-w)$):

$$\frac{(1+w)^2}{(1-w)^2} + (0.0632K - 1.368) \frac{1+w}{1-w} + 0.368 = 0$$

Simplificando se obtiene:

$$(1+w)^2 + (0.0632K - 1.368)(1+w)(1-w) + 0.368(1-w)^2 = 0$$

$$1 + 2w + w^2 + (0.0632K - 1.368)(1 - w^2) + 0.368(1 - 2w + w^2) = 0$$

$$w^2(1 - 0.0632K + 1.368 + 0.368) + w(2 - 0.736) + (1 + 0.0632K - 1.368 + 0.368) = 0$$

$$w^2(2.736 - 0.0632K) + w(1.264) + 0.0632K = 0$$

Aplicando la prueba del arreglo de Routh-Hurwitz se obtiene:

	$w^2(2.736 - 0.0632K) + w(1.264) + 0.0632K$	
w^2	$(2.736 - 0.0632K)$	$0.0632K$
w^1	1.264	0
w^0	$0.0632K$	0

Para que haya estabilidad no debe haber cambios de signo en la primera columna del arreglo de Routh-Hurwitz. Por tanto:

$$0.0632K > 0$$

o bien:

$$K > 0$$

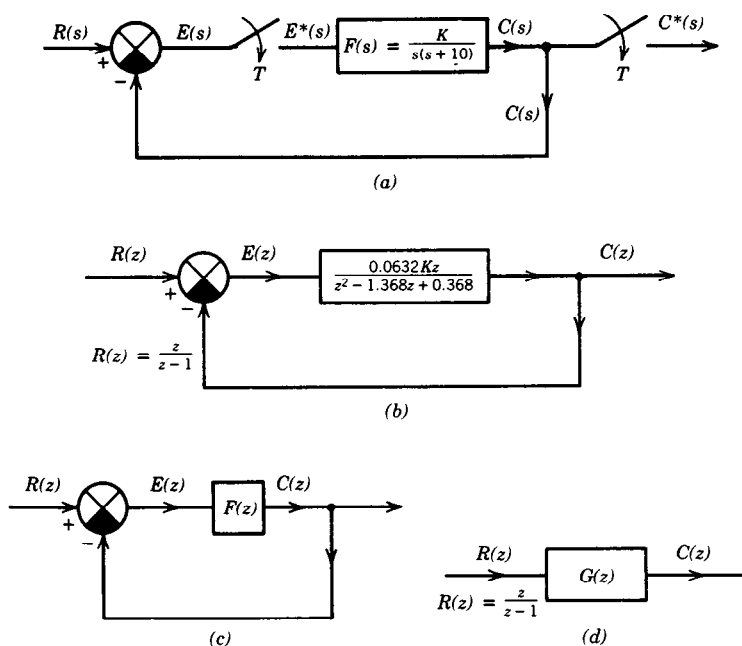
y:

$$(2.736 - 0.0632K) > 0$$

o bien:

$$K < \frac{2.736}{0.0632} = 43.29$$

De este modo, K debe ser mayor que cero y menor que 43.29 para que haya un comportamiento estable. La elección arbitraria de $K = 20$ hace posible evaluar en forma numérica la respuesta escalón unitario deseada. Insertando $K = 20$ en la expresión de $G(z)$:



$$C(z) = R(z)G(z) = \frac{z}{z-1} \frac{0.0632(20)z}{z^2 + [0.0632(20) - 1.368]z + 0.368} \quad (\text{para } K = 20)$$

$$C(z) = \frac{z}{z-1} \frac{1.264z}{z^2 - 0.104z + 0.368}$$

$$C(z) = \frac{1.264z^2}{(z-1)(z^2 - 0.104z + 0.368)} \quad (e)$$

Fig. 34-22. Diagrama de bloques del sistema de control de datos muestreados del ejemplo 34.6:
 a) Representación en el dominio s . $R(s) = 1/s$, $T = 1/10$ segundos.
 b) Representación en el dominio z . $R(z) = z/(z-1)$. Se obtienen por medio de las transformadas z (véase la tabla 34-25).

$$\frac{a}{s(s+a)} \Rightarrow \frac{(1 - e^{-at})}{(z-1)(z - e^{-at})}$$

$$\frac{1}{s} \Rightarrow \frac{z}{z-1}$$

$$e^{-at} = e^{-10 \cdot \frac{1}{10}} = e^{-1} = 0.368$$

$$(1 - e^{-aT})/a = (1 - 0.368)/10 = 0.632/10 = 0.0632$$

$$(z-1)(z-0.368) = z^2 - 1.368z + 0.368$$

c) Otra representación de (b), donde $F(z) = \frac{0.0632Kz}{z^2 - 1.368z + 0.368} = \frac{N(z)}{D(z)}$

d) Simplificación de (c), donde $G(z) = F(z)/[1 + F(z)]$.

$$G(z) = \frac{N(z)/D(z)}{1 + N(z)/D(z)} = \frac{N(z)}{D(z) + N(z)} = \frac{0.0632Kz}{z^2 + (0.0632K - 1.368)z + 0.368}$$

Para que haya estabilidad, $0 < K < 43.2$ (de la prueba de Routh-Hurwitz con la transformación bilineal; se explica en detalle en el ejemplo 34.6). Sea $K = 20$.

e) Obtención de $C(z)$.

$$G(z) = \frac{0.0632(20)z}{z^2 + [0.0632(20) - 1.368]z + 0.368} =$$

$$= \frac{1.264z}{z^2 - 0.104z + 0.368}$$

Encontrando $C(z)$ a partir de $G(z)$ y $R(z)$:

$$C(z) = R(z)G(z) = \frac{z}{z-1} \frac{1.264z}{z^2 - 0.104z + 0.368}$$

$$C(z) = \frac{1.264z^2}{(z-1)(z^2 - 0.104z + 0.368)}$$

Factorizando la ecuación cuadrática se obtiene:

$$C(z) = \frac{1.264z^2}{(z-1)(z-0.052+j0.604)(z-0.052-j0.604)}$$

Desarrollando $C(z)/(z)$ en fracciones parciales (de manera que después se pueda multiplicar por z para producir una z en los numeradores de fracciones parciales, requisito para la transformada z inversa):

$$\frac{C(z)}{z} = \frac{A}{z-1} + \frac{B}{z-0.052+j0.604} +$$

$$+ \frac{\text{conjugación } B}{z-0.052-j0.604}$$

Evaluando A por medio de la técnica del residuo se obtiene:

$$A = \frac{C(z)}{z} (z-1) \Big|_{z=1} = \frac{1.264z}{z^2 - 0.104z + 0.368} \Big|_{z=1}$$

$$A = \frac{1.264}{1 - 0.104 + 0.368} = \frac{1.264}{1.264} = 1.000$$

Y haciendo lo mismo con B :

$$B = \frac{C(z)}{z} (z-0.052+j0.604) \Big|_{z=0.052-j0.604}$$

$$B = \frac{1.264z}{(z-1)(z-0.052-j0.604)} \Big|_{z=0.052-j0.604} =$$

$$= \frac{1.264(0.052-j0.604)}{(-0.948-j0.604)(-j1.208)}$$

$$B = -0.500 + j0.261 = 0.564 \angle 152.4^\circ$$

Si se vuelven a insertar A y B en el desarrollo en fracciones parciales de $C(z)/z$ y se multiplica por z :

$$C(z) = \frac{z}{z-1} + \frac{z(-0.5+j0.261)}{z-0.052+j0.604} +$$

$$+ \frac{z(-0.5-j0.261)}{z-0.052-j0.604}$$

Invirtiendo $C(z)$ por medio de las transformadas z (tabla 34-25):

$$\frac{z}{z-1} \Rightarrow u(t)$$

$$\frac{z}{z-e^{-aT}} \Rightarrow e^{-at} \quad T = 1/10 \text{ s}$$

Los polos conjugados ($0.052 \pm j0.604$) se expresan:

$$e^{-aT} = e^{-a/10} = e^{-(X+jY)/10}$$

donde $a = X + jY$ y $T = 1/10$ s. Igualando términos:

$$-e^{-a/10} = -0.052 + j0.604$$

Desarrollando:

$$e^{-a/10} = e^{-(X+jY)/10} = e^{-X/10} e^{-jY/10} = 0.052 - j0.604 =$$

$$= 0.606 \angle -1.485 \text{ rad}$$

Igualando magnitudes y ángulos:

$$e^{-X/10} = \text{magnitud} = 0.606$$

$$e^{-jY/10} = \text{ángulo} = -1.485 \text{ rad}$$

Despejando X e Y :

$$-\frac{X}{10} = \ln 0.6062 = -0.500 \quad -\frac{Y}{10} = -1.485 \text{ rad}$$

donde $X = +5.00$ e $Y = +14.85$. Por tanto:

$$z - 0.052 + j0.604 = z - e^{-a/10} = z - e^{-(X+jY)T}$$

y:

$$z - 0.052 - j0.604 = \text{conjugación} = z - e^{-(X-jY)T}$$

donde $T = 1/10$ s

$$X = 5$$

$$Y = 14.85$$

Al insertar estos valores en $C(z)$ se obtiene:

$$C(z) = \frac{z}{z-1} + \frac{z(-0.5+j0.261)}{z-e^{-(5+j14.85)T}} + \frac{z(-0.5-j0.261)}{z-e^{-(5-j14.85)T}}$$

Las transformadas z inversas dadas para $z/(z-1)$ y $z/(z-e^{-aT})$ ahora se pueden aplicar en forma directa:

$$c^*(t) = 1 + (-0.5 + j0.261)e^{-(5+j14.85)t} +$$

$$+ (-0.5 - j0.261)e^{-(5-j14.85)t}$$

Convirtiendo las coordenadas rectangulares a polares:

$$c^*(t) = 1 + (0.564e^{j152.4^\circ})e^{-(5+j14.85)t} +$$

$$+ (0.564e^{-j152.4^\circ})e^{-(5-j14.85)t}$$

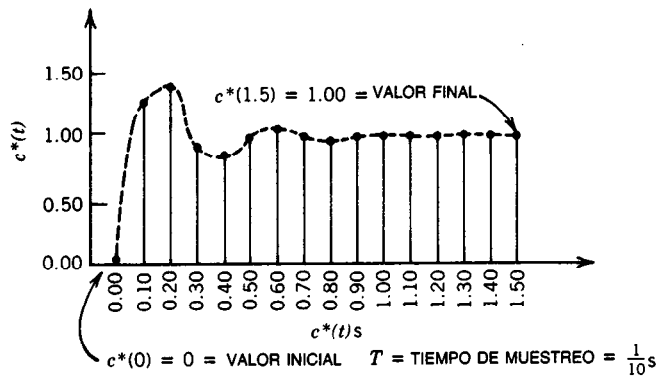


Fig. 34-23. Gráfica de la respuesta escalón unitario $c^*(t) = 1 + 1.128e^{-5t} \cos(14.85t - 152.4^\circ)$ en el tiempo de muestreo $T = 0.1$ s, donde $c^*(t)$ = valores muestreados de $c(t)$. Sólo es válida en los instantes de muestreo $t = 0, 0.1, 0.2, 0.3, \dots$ s. Esta es la respuesta del tiempo de muestreo de $C(z)$ que se presenta en la figura 34-22e. Nótese que $c^*(t)$ se deduce a partir de $C(z) = 1.264z^2/(z - 1)$ ($z^2 - 0.104z + 0.368$) en el ejemplo 34.6.

Reagrupando términos y factorizando los exponenciales complejos es posible obtener la siguiente expresión:

$$c^*(t) = 1 + 1.128e^{-5t} \frac{e^{-j(14.85t - 152.4^\circ)} + e^{+j(14.85t - 152.4^\circ)}}{2}$$

Expresando $c^*(t)$ como una senoide:

$$\frac{e^{-jX} + e^{+jX}}{2} \Rightarrow \cos X$$

donde las unidades son $14.85t(\text{rad})$ y -152.4° ($= -2.66$ rad):

$$c^*(t) = 1 + 1.128e^{-5t} \cos(14.85t - 152.4^\circ)$$

o bien:

$$c^*(t) = 1 + 1.128e^{-5t} \cos(14.85t - 2.66)$$

Comprobación:

$$c(0) = 1 + 1.128(1)(-0.8862) = 0.00036 \checkmark$$

(aproximadamente cero)

Los valores en los instantes de muestreo, de $t = 0$ a $t = 1.5$ s, con muestreo de $1/10$ s, se grafican en la figura 34-23.

Resulta muy tentador suponer que $c^*(t)$ es válida para todos los tiempos, no sólo en los instantes de muestreo. La mente une rápidamente la línea discontinua de la respuesta de datos muestreados calculada, y forma una función de tiempo continua. Para este ejemplo específico, $c^*(t)$ es una muy buena aproximación a la respuesta del sistema real entre los instantes de muestreo, puesto que el tiempo de muestreo

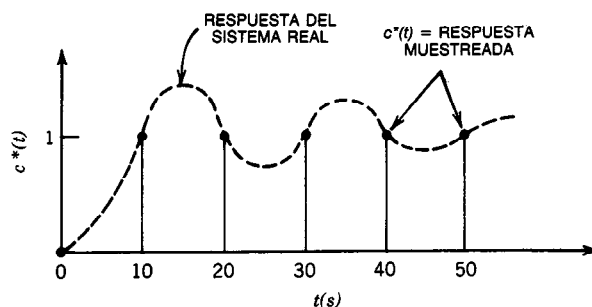
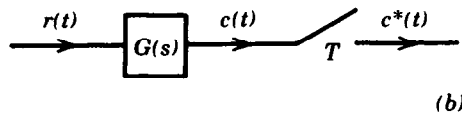
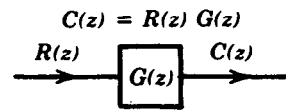
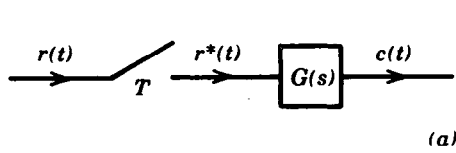
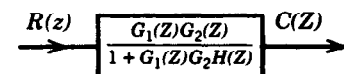
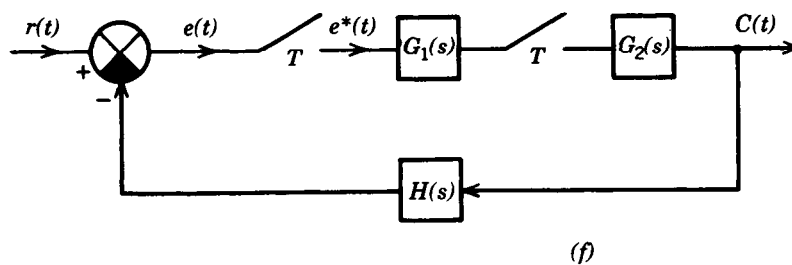
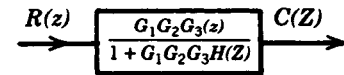
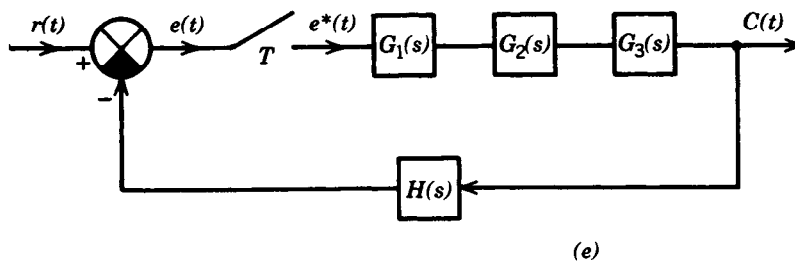
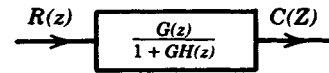
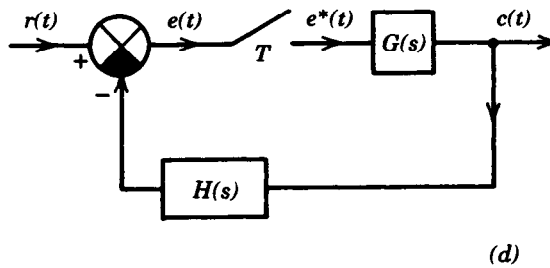
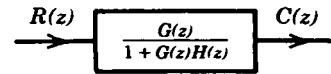
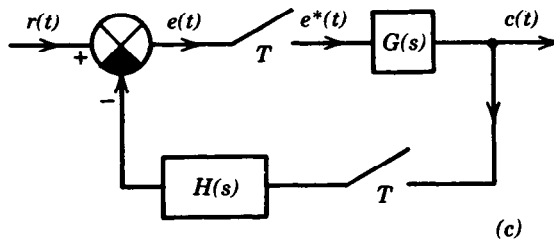
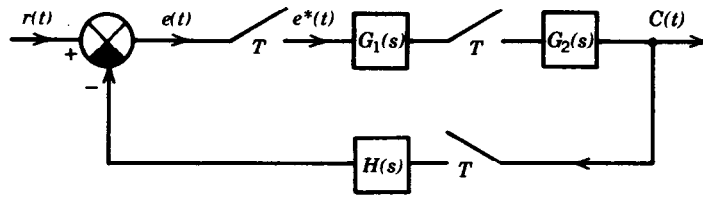


Fig. 34-24. Esquema de una posible interpretación errónea de una respuesta calculada de datos muestreados producida por un tiempo de muestreo T de 10 s, que es igual a un medio de los periodos naturales de oscilación del sistema. Los valores de respuesta muestreados $t > 0$ siempre son la unidad, mientras que la respuesta del sistema real oscila. Para predecir en forma correcta la respuesta oscilatoria, T debe reducirse quizá a un décimo del periodo oscilatorio del sistema o 2 s aproximadamente para la respuesta que se ilustra.



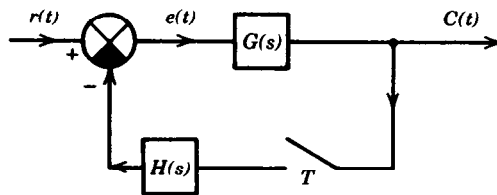
BLOQUE Z NO EQUIVALENTE
 $C(Z) = RG(Z)$





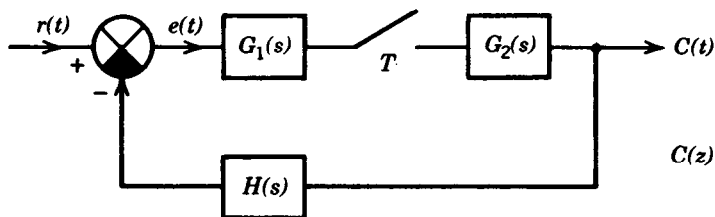
$$\frac{R(Z)}{1 + \frac{G_1(Z)G_2(Z)H(Z)}{1 + G_1(Z)G_2(Z)H(Z)}} \rightarrow C(Z)$$

(g)



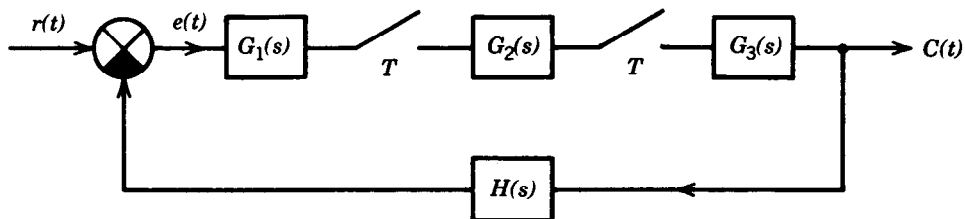
$$C(Z) = \frac{RG(z)}{1 + GH(z)}$$

(h)



$$C(z) = \frac{RG_1(z)G_2(z)}{1 + G_1G_2H(z)}$$

(i)



$$C(z) = \frac{RG_1(z)G_2(z)G_3(z)}{1 + G_2(z)G_1G_3H(z)}$$

(j)

Fig. 34-25. a a j. Reducción del diagrama de bloques de algunos sistemas de control de datos muestreados comunes. Obsérvese en (d) que $GH(z)$ es una transformada z, que no está dada por el producto de $G(z)$ y $H(z)$. Es la única transformada z de la cantidad $G(s)H(s)$. En (g), cuando no se muestrea el error, $R(z)$ no existe como componente separada de la transformada z y por tanto no existe ninguna función de transferencia simplificada que relacione $C(z)$ con $R(z)$. La transformada z de $C(z)$ para estos dos sistemas se presenta en (h).

($t = 1/10$ s) es mucho más corto que un medio del periodo de oscilación del sistema. Si el tiempo de muestreo se incrementara a 10 s, esto no sería cierto, y la "conexión de los puntos" no produciría una buena aproximación de la respuesta del sistema real entre los instantes de muestreo. En la figura 34-24 se da un ejemplo de cálculos de datos muestreados engañosos, producidos por un tiempo de muestreo igual a un medio de los periodos de oscilación naturales de un sistema.

34.7 DIAGRAMAS DE BLOQUES DE LA TRANSFORMADA z CON ELEMENTOS DE RETENCIÓN

Los diagramas de bloques de la transformada z se pueden combinar (p. ej., reducirse) exactamente como se combinan los diagramas de bloques de la transformada de Laplace, siempre que el tiempo de muestreo sea constante y esté en sincronía en todo el sistema de control. En las tablas 34-8 y 34-9 se resumen las reglas en el dominio s , y en la figura 34-25 se presentan ejemplos específicos de reducciones de diagramas de bloques de la transformada z .

Ciertos elementos se utilizan exclusivamente en sistemas de datos muestreados y no en sistemas continuos. El bloque (elemento) de la transformada z único más común es el "elemento de retención". Los dos elementos de retención más populares son la "retención de orden cero" y la "retención de primer orden".

- **Retención de orden cero.** La finalidad del dispositivo de retención de orden cero es convertir la muestra casi instantánea, de duración de tiempo cero en teoría, en un valor de nivel constante con respecto a la duración del periodo de intermuestreo T . En esencia, opera como una abrazadera. El valor de nivel constante que resulta es igual al valor muestreado y tiene pendiente cero (como todas las constantes). La pendiente cero es la causa del nombre "retención de orden cero".
- **Retención de primer orden.** Este dispositivo tendría la primera derivada (la pendiente) y la magnitud inicialmente muestreada de la función muestreada. Las retenciones de primer orden son mucho menos comunes que las de orden cero.

El convertidor estándar de analógico a digital (A/D) contiene una unidad de muestreo y retención, y la unidad de retención es una retención de orden cero. El funcionamiento de una retención de orden cero se ilustra con la ayuda de la figura 34-26, donde se presenta una función del tiempo $f(t)$ muestreada en los intervalos $t = 0, t = T, t = 2T, \dots$. Obsérvese la salida resultante "en forma de caja o furgón" producida por el elemento de retención de orden cero. En ocasiones esta retención se denomina "generador de furgones" debido al aspecto de su salida.

La salida de la retención de orden cero se puede escribir directamente a partir de la figura 35-26. La salida de pulso en forma de caja o furgón de una mues-

tra de entrada cualquiera está dada por un pulso de altura igual a la entrada y la duración de T segundos. El pulso comprende un escalón positivo, $(1/s)$, multiplicado por un valor de muestra de entrada, menos un escalón negativo T segundos después: $(-1/s)e^{-sT} \times$ valor de muestra de entrada.

Por tanto:

$$\text{Salida} = Y(s) = \frac{\text{Entrada}}{s} - \frac{\text{Entrada } e^{-sT}}{s} = (\text{Entrada}) \frac{1 - e^{-sT}}{s} \quad (34-45)$$

Así, la función de transferencia de la retención de orden cero está dada por:

$$G_{HO}(s) = \frac{\text{Salida}}{\text{Entrada}} = \frac{Y(s)}{F(s)} = \frac{1 - e^{-sT}}{s} \quad (34-46)$$

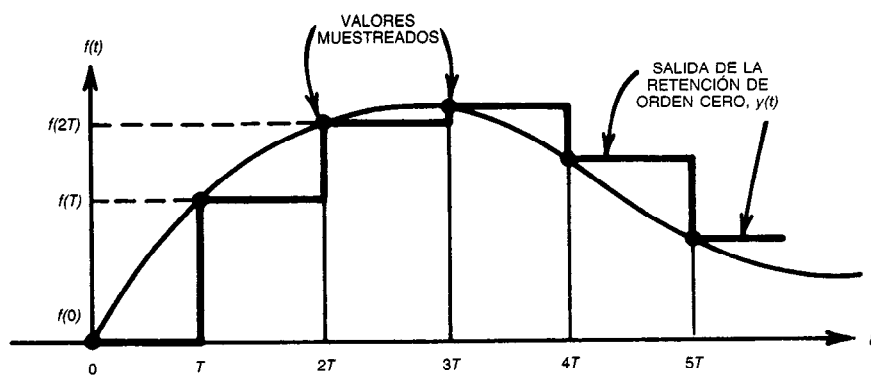
Es una práctica común conectar en cascada la retención de orden cero $G_{HO}(s)$ con la función de transferencia de ganancia hacia adelante o de planta del sistema $G_P(s)$, sin un interruptor de muestreo entre $G_{HO}(s)$ y $G_P(s)$.

En esta situación, la transformada de $G_{HO}(s)G_P(s)$ se debe determinar como una sola transformada z y no como un producto de transformadas z ; es decir, $G_{HO}(s)$ y $G_P(s)$ se deben multiplicar primero en el dominio s y obtenerse una sola transformada z (larga) para la función resultante de s . El proceso es directo, como se muestra:

$$\begin{aligned} Z[G_{HO}(s)G_P(s)] &= Z\left[\frac{1 - e^{-sT}}{s} G_P(s)\right] \\ &= Z\left[(1 - e^{-sT}) \frac{G_P(s)}{s}\right] \\ &= (1 - z^{-1}) Z\left[\frac{G_P(s)}{s}\right] \quad (34-47) \end{aligned}$$

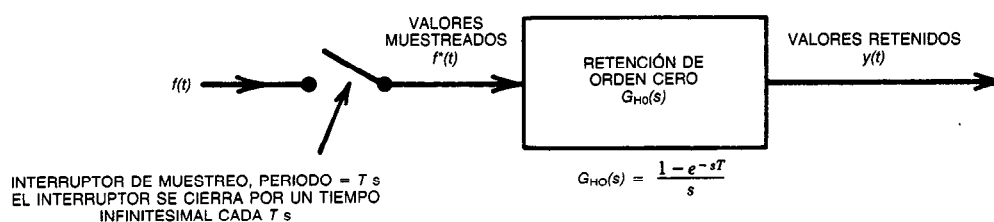
La simplificación resulta del hecho de que el término de retardo $(1 - e^{-sT})$ y su transformada $z(1 - z^{-1})$ se pueden factorizar a partir de sus funciones respectivas. El resultado neto es que se requiere una transformada z de $G_P(s)$ dividida entre s , en vez de una transformada z de $G_P(s)$ sola.

En la figura 34-25 se ilustra la influencia de interruptores de muestreo en la función de transferencia de la transformada z de un diagrama de bloques. Siempre que los interruptores de muestreo sincronizados aíslan elementos de un ciclo, se toma la transformada z de estos elementos aislados, uno a la vez, sobre una base individualizada. Siempre que no haya muestreador entre dos o más elementos, éstos se deberán tratar como una sola entidad combinada, tomando una transformada z para la función de transferencia compuesta resultante en s . Por tanto, si 2, 3, 4 o más bloques de la función de transferencia se conectan en cascada en el dominio s , sin interruptor de muestreo entre estos blo-



TIEMPOS DE MUESTREO, $t = nT, n = 0, 1, 2, 3, \dots$

(a)



INTERRUPTOR DE MUESTREO, PERIODO = T s
EL INTERRUPTOR SE CIERRA POR UN TIEMPO INFINITESIMAL CADA T s

(b)

Fig. 34-26. Operación de retención de orden cero: a) salida; b) diagrama de bloques.

ques, sólo se obtiene un bloque de la transformada z. Siempre que figuran bloques de la transformada z separados, se entiende que los bloques de la transformada de Laplace correspondientes están separados por interruptores de muestreo sincronizados.

El siguiente ejemplo ilustra el efecto de una retención de orden cero y el de variar el periodo de muestreo.

Ejemplo 34.7. Dado un sistema de retroalimentación unitaria muestreado por errores que contiene una retención de orden cero y una función de transferencia de planta de $G_P(s) = 1/(s + 1)$:

1. Construir el diagrama de bloques simplificado de la transformada z equivalente, que relaciona $C(z)$ con $R(z)$.
2. Para una entrada de escalón unitario [$R(z) = z/(z - 1)$], determinar $C_a(z)$ para $T = 1$ s, $C_b(z)$ para $T = 1/2$ s y $C_c(z)$ para $T = 1/10$ s. Determinar asimismo las funciones de salida muestreadas correspondientes en el dominio del tiempo, $C_a^*(t)$ para $T = 1$ s, $C_b^*(t)$ para $T = 1/2$ s, y $C_c^*(t)$ para $T = 1/10$ s, y graficar las respuestas muestreadas respectivas en función del tiempo.
3. Repetir los pasos 1 y 2 para $T = 1$ s, sin la retención de orden cero.
4. Calcular la respuesta de un sistema no muestreado de tiempo continuo, graficar la respuesta del tiempo y comparar los resultados.

Paso 1. El diagrama de bloques del primer paso se presenta en la figura 34-27a. Con referencia a ella:

$$G(s) = G_{HO}(s)G_P(s) = \frac{1 - e^{-sT}}{s} \frac{1}{s + 1} = \frac{(1 - e^{-sT})}{s(s + 1)} \quad (34-48)$$

Con referencia a la tabla de transformadas z (tabla 34-25):

$$(1 - e^{-sT})F(s) \Rightarrow (1 - z^{-1})F(z)$$

$$\frac{a}{s(s + a)} \Rightarrow \frac{z(1 - e^{-aT})}{(z - 1)(z - e^{-aT})} \quad \text{sea } a = 1$$

Aplicando estos dos pares transformados a $G(s)$ con $a = 1$ se produce $G(z)$:

$$G(z) = (1 - z^{-1}) \frac{z(1 - e^{-T})}{(z - 1)(z - e^{-T})} = \frac{(z - 1)}{z} \frac{z(1 - e^{-T})}{(z - 1)(z - e^{-T})}$$

Cancelando los términos z se obtiene:

$$G(z) = \frac{(z - 1)(1 - e^{-T})}{(z - 1)(z - e^{-T})} = \frac{1 - e^{-T}}{z - e^{-T}}$$

Ahora, a partir de la figura 34-25d, la función equivalente de la transformada z reducida es:

$$W(z) = \frac{G(z)}{1 + GH(z)} = \frac{G(z)}{1 + G(z)} \quad (\text{ya que } H = 1)$$

Sustituyendo el valor de $G(z)$ se obtiene:

$$W(z) = \frac{(1 - e^{-T})/(z - e^{-T})}{1 + (1 - e^{-T})/(z - e^{-T})} = \frac{1 - e^{-T}}{z + (1 - 2e^{-T})}$$

Esto completa el paso 1, ya que $C(z) = R(z)W(z)$.

El diagrama de bloques del dominio z reducido es un solo bloque que contiene $W(z)$, con entrada $R(z)$ y salida $C(z)$.

La función de entrada especificada es un escalón unitario, para el cual $R(s) = 1/s$ y $R(z) = z/(z - 1)$. Multiplicando este valor de $R(z)$ por $W(z)$ se produce la salida $C(z)$:

$$C(z) = \frac{z}{z - 1} \frac{1 - e^{-T}}{z + (1 - 2e^{-T})}$$

Paso 2. Ahora se utilizan tres tiempos de muestreo específicos, que reproducirán tres salidas diferentes, $C_a(z)$, $C_b(z)$ y $C_c(z)$ para $T = 1$ s, $T = 1/2$ s y $T = 1/10$ s. Al evaluar esto en forma numérica se obtienen las expresiones:

$$C_a(z) = \frac{z(0.6321)}{(z - 1)(z + 0.2642)} = \frac{z(0.6321)}{z^2 - 0.7358z - 0.2642} \quad T = 1$$

$$C_b(z) = \frac{z(0.3935)}{(z - 1)(z + 0.2131)} = \frac{z(0.3935)}{z^2 - 1.2131z + 0.2131} \quad T = 0.5$$

$$C_c(z) = \frac{z(0.0952)}{(z - 1)(z + 0.8097)} = \frac{z(0.0952)}{z^2 - 1.8097z - 0.8097} \quad T = 0.1$$

El teorema del valor final se puede aplicar a $C_a(z)$, $C_b(z)$ y $C_c(z)$, ya que todos los polos de estas funciones yacen dentro del círculo unitario ($|z| \leq 1$), lo que indica una respuesta acotada del sistema en la siguiente forma:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} C_a^*(t) = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{z - 1}{z} C_a(z) = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{0.6321}{z + 0.2642} = \frac{0.6321}{1.2642} = 0.5$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} C_b^*(t) = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{z - 1}{z} C_b(z) =$$

$$= \lim_{z \rightarrow 1} \frac{0.3935}{z - 0.2131} = \frac{0.3935}{0.7869} = 0.5$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} C_c^*(t) = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{z - 1}{z} C_c(z) =$$

$$= \lim_{z \rightarrow 1} \frac{0.0952}{z - 0.8097} = \frac{0.0952}{0.1903} = 0.5$$

Todos los valores finales coinciden, aunque las transformadas z individuales son notablemente distintas.

En el paso 4 se demostrará que la respuesta escalón unitario del sistema de tiempo continuo no muestreado para $G(s) = 1/(s + 1)$ es $1/2 (1 - e^{-2t})$, que también tiene valor final de 0.5.

Las respuestas de salida de la función de tiempo muestreada $C_a^*(t)$, $C_b^*(t)$ y $C_c^*(t)$ se determinan dividiendo el denominador de $C(z)$ entre su numerador, para obtener una serie de potencias de z^{-n} . Los resultados son:

$$C_a(z) = 0.63z^{-1} + 0.47z^{-2} + 0.51z^{-3} + 0.50z^{-4} + 0.50z^{-5} + \dots$$

para $T = 1.0$ s, z^{-1} = retardo de 1 s, con retención de orden cero:

$$C_b(z) = 0.39z^{-1} + 0.47z^{-2} + 0.49z^{-3} + 0.49z^{-4} + 0.50z^{-5} + \dots$$

para $T = 0.5$ s, z^{-1} = retardo de 0.5 s, con retención de orden cero:

$$C_c(z) = 0.095z^{-1} + 0.17z^{-2} + 0.23z^{-3} + 0.27z^{-4} + 0.30z^{-5} + 0.32z^{-6} + 0.34z^{-7} \dots$$

para $T = 0.1$ s, z^{-1} = retardo de 0.1 s, con retención de orden cero.

Las respuestas de tiempo correspondientes son (t medido en segundos):

$C_a^*(t) =$	0.63	0.47	0.51	0.50	0.50
$t =$	1	2	3	4	5
$C_b^*(t) =$	0.39	0.47	0.49	0.49	0.50
$t =$	0.5	1	1.5	2	2.5
$C_c^*(t) =$	0.095	0.17	0.23	0.27	0.30
$t =$	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5

Esto completa el paso 2.

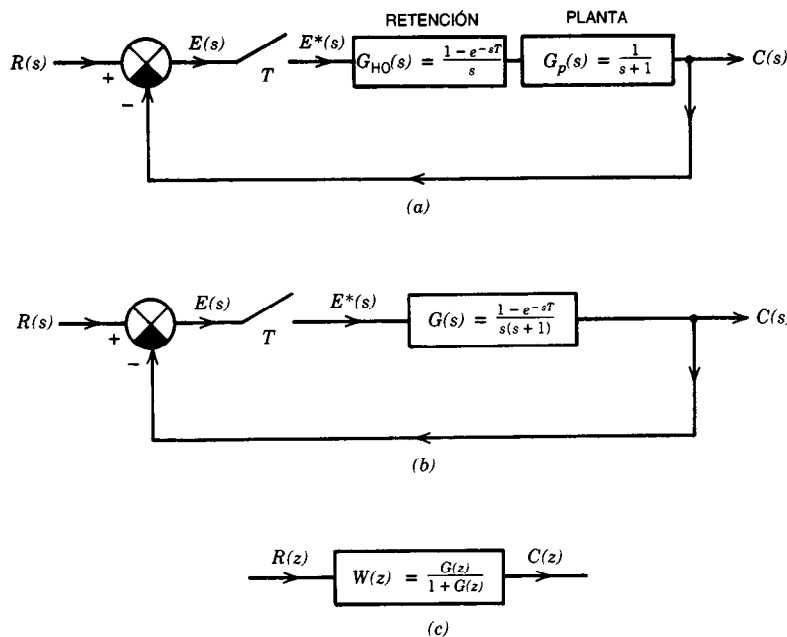


Fig. 34-27. a) Diagrama de bloques de un sistema de retroalimentación unitaria muestreado por errores, que contiene una retención de orden cero, para el ejemplo 34.7. b) Combinación de bloques. c) En el dominio z, simplificado como en la figura 34-25d. $G(z) = Z\{G(s)\} = (1 - z^{-1})[z(1 - e^{-T})/(z - 1)(z - e^{-T})] = 1 - e^{-T}/z - e^{-T}$.

Paso 3. La respuesta a $C_0(z)$ y $T = 1$ s, se determinan enseguida. Con referencia a la figura 34-28:

$$G_0(s) = \frac{1}{s + 1}$$

Empleando la transformada z:

$$\frac{1}{s + a} \Rightarrow \frac{z}{z - e^{-aT}}$$

$G_0(z)$ se obtiene al sustituir $a = 1$:

$$G_0(z) = \frac{z}{z - e^{-T}}$$

El diagrama de bloques reducido en el dominio z es:

$$W_0(z) = \frac{G_0(z)}{1 + G_0(z)} = \frac{z}{2z - e^{-T}} = \frac{1}{2} \frac{z}{(z - 0.5e^{-T})}$$

La salida $C_0(z)$ está dada por:

$$C_0(z) = R(z)W_0(z) = \frac{z}{(z - 1)} \left[\frac{1}{2} \frac{z}{(z - 0.5e^{-T})} \right]$$

Al sustituir en el tiempo de muestreo, $T = 1$ s, resulta:

$$C_0(z) = \frac{0.5z^2}{(z - 1)(z - 0.1839)} = \frac{0.5z^2}{z^2 - 1.1839z + 0.1839}$$

Aplicando el teorema del valor final a $C_0(z)$:

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} C_0^*(t) &= \lim_{z \rightarrow 1} \frac{z - 1}{z} C_0(z) = \\ &= \lim_{z \rightarrow 1} \frac{0.5z}{z - 0.1839} = \frac{0.5}{0.8951} = 0.6127 \end{aligned}$$

Obsérvese que el valor final del sistema muestreado sin retención de orden cero es 0.6127, lo que no coincide con el valor final del sistema continuo o los otros tres sistemas muestreados idénticos que tienen una retención de orden cero (pero tiempos de muestreo diferentes). Estos últimos cuatro sistemas relacionados tienen un valor final de 0.5 unidades, para una entrada de escalón unitario. El dispositivo de retención es una parte esencial en casi todos los sistemas de control de datos muestreados controlados digitalmente a fin de vincular el muestreador (o computadora digital) con una porción analógica del sistema de control. Por tanto, este caso (circuito sin retención) no es práctico.

La función de salida de respuesta de tiempo muestreado, $C_0^*(t)$, se determina dividiendo el denominador de $C_0(z)$ entre el numerador de $C_0(z)$. El resultado es:

$$\begin{aligned} C_0(z) &= 0.5 + 0.59z^{-1} + 0.62z^{-2} + \\ &+ 0.61z^{-3} + 0.61z^{-4} + \dots \end{aligned}$$

para $T = 1$ s, z^{-1} = retardo de 1 s, sin retención de orden cero.

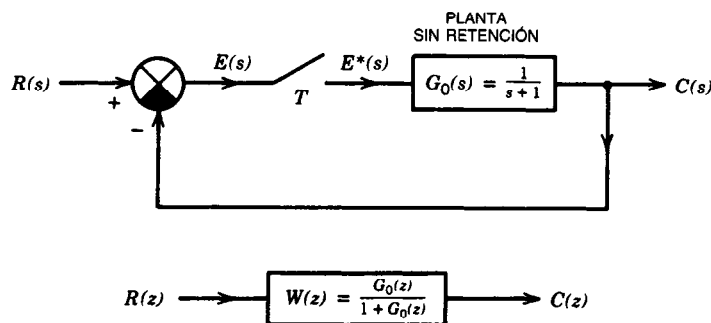


Fig. 34-28. Diagrama de bloques de un sistema de retroalimentación unitaria muestreado por errores, sin retención de orden cero, para el ejemplo 34.7, paso 3.
 $G_0(z) = z[G(s)] = z/(z - e^{-T})$.

La respuesta de tiempo muestreado correspondiente $C_0^*(t)$ es (t en segundos):

$C_0^*(t) = 0.5$	0.59	0.61	0.61	0.61
$t = 0 +$	1	2	3	4

Esto completa el paso 3. Obsérvese que $C_0^*(t)$ tiene un valor de 0.5 unidades en $t = 0 +$; es decir, $C_0^*(t)$ es cero para $t < 0$ y 0.5 unidades para $t > 0$ ($t = 0 +$). Este salto de 0.5 unidades en tiempo cero es consecuencia del artificio del muestreo de pulsos y la falta de un elemento de retención. Los sistemas reales no pueden saltar una cantidad finita en tiempo cero, aunque el análisis de la transformada z predice con frecuencia este comportamiento.

Paso 4. La respuesta de escalón unitario de un sistema de retroalimentación unitaria de tiempo continuo con $G(s) = 1/(s + 1)$ se obtiene en el paso 4, con fines de comparación. La salida $C(s)$ está dada por:

$$C(s) = R(s) \frac{G(s)}{1 + G(s)} = \frac{1}{s} \frac{1/(s + 1)}{1 + 1/(s + 1)} = \frac{1}{s} \frac{1}{(s + 2)}$$

Desarrollando en fracciones parciales:

$$C(s) = \frac{1/2}{s} + \frac{-1/2}{s + 2}$$

Mediante el uso de la transformada de Laplace:

$$\frac{K}{s} \rightarrow K\mu(t), \quad \frac{K}{s + a} \rightarrow Ke^{-at}$$

se obtiene la función de salida de tiempo continuo $C(t)$:

$$C(t) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}e^{-2t} = \frac{1}{2}(1 - e^{-2t})$$

y:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} C(t) = \frac{1}{2}(1 - 0) = \frac{1}{2}$$

Las cinco funciones de salida se grafican en función del tiempo en la figura 34-29. Las funciones que se grafican son:

- $C_a^*(t)$ = respuesta de tiempo muestreado, $T = 1$ s, con retención de orden cero.
- $C_b^*(t)$ = respuesta de tiempo muestreado, $T = 0.5$ s, con retención de orden cero.
- $C_c^*(t)$ = respuesta de tiempo muestreado, $T = 0.1$ s, con retención de orden cero.
- $C_0^*(t)$ = respuesta de tiempo muestreado, $T = 1$ s, sin retención.
- $C(t)$ = respuesta de tiempo continuo, sin muestreo ni retención.

Nótese que la entrada de todas las gráficas es un escalón unitario y que la función de transferencia de la planta de todas las gráficas es $1/(s + 1)$.

Algunas observaciones que pueden hacerse comparando estas gráficas son:

1. Dos de las respuestas muestreadas, $C_b^*(t)$ y $C_c^*(t)$, se asemejan mucho a la respuesta continua exacta $C(t)$. La función de transferencia de la planta del sistema, $G(s)$, tiene un polo en $s = -1$. $C_b^*(t)$ y $C_c^*(t)$ tienen tiempos de muestreo de menos de 1 s. $C_c^*(t)$ tiene el menor tiempo de muestreo, un décimo del valor numérico de la parte real de la magnitud del polo, $s = -1$; esto es, 1/10 s. $C_c^*(t)$, con el menor tiempo de muestreo, se asemeja más a la respuesta de tiempo del sistema continuo. Sin embargo, $C_c^*(t)$ requiere muchas más operaciones de cálculo para cubrir un tiempo dado.
2. $C_a^*(t)$ tiene un tiempo de muestreo no menor que la parte real del polo de la función de transferencia ubicado en $s = -1$. La respuesta $C_a^*(t)$ exhibe una sobrecorrección, no así la respuesta de tiempo continuo.
3. $C_0^*(t)$, sin un dispositivo de retención, exhibe una respuesta que difiere notablemente de la respuesta de tiempo del sistema continuo para valores de tiempo pequeños y grandes. $C_0^*(t)$ salta hasta 0.5 unidades en $t = 0 +$ s, mientras

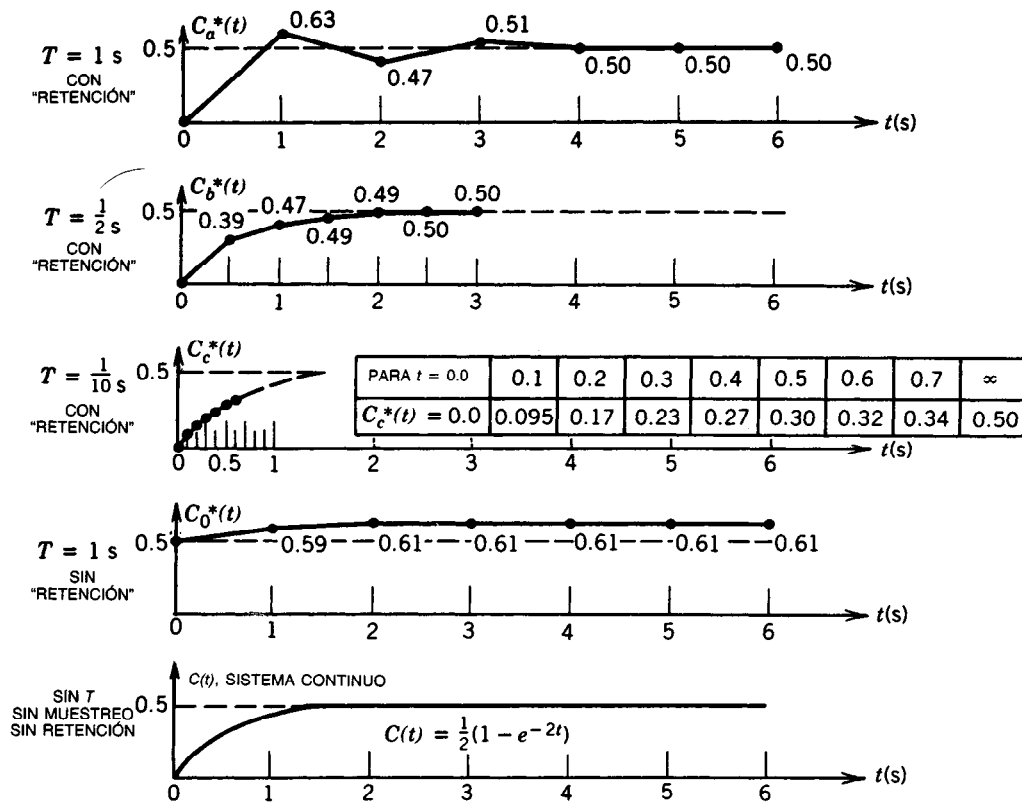


Fig. 34-29. Resultados del ejemplo 34.7, paso 4. Cinco gráficas de la respuesta de escalón unitario de un sistema con $G(s) = 1/(s+1)$, $H(s) = 1$, $R(s) = 1/s$. Las tres primeras respuestas, $c_a^*(t)$, $c_b^*(t)$ y $c_c^*(t)$, corresponden a un sistema muestreado por errores con una retención de orden cero, con tiempos de muestreo $T = 1$, $1/2$ y $1/10$ s, respectivamente. La cuarta gráfica, $c_0^*(t)$, corresponde a un sistema muestreado por errores, con $T = 1$ s, pero sin una retención de orden cero. Para las cuatro primeras gráficas, sólo los siete puntos "." son valores válidos de $c_a^*(t)$, $c_b^*(t)$, $c_c^*(t)$ y $c_0^*(t)$. La quinta gráfica, $c(t)$, es la respuesta escalón de un sistema continuo sin muestreo ni elementos de retención.

que la respuesta continua es cero en $t = 0 + s$. Asimismo, el valor final de $C_0^*(t)$ es 0.61 unidades, mientras que el valor final del sistema continuo es 0.50 unidades, para una entrada de escalón unitario. Como se mencionó anteriormente, todos los sistemas de datos muestreados comunes controlados en forma digital emplean un dispositivo de retención y, por tanto, este caso no es práctico.

34.8 TRANSFORMADA z MODIFICADA, $F(z, m)$

Cuando la transformada z ordinaria $f(z)$ se invierte al dominio del tiempo, produce la secuencia de muestreo $f^*(t) = f^*(kT)$, que sólo es válida en los instantes de muestreo $t = 0, T, 2T, 3T, \dots, kT, \dots$. Suponiendo, con fines de ilustración, que el periodo de muestreo T es de un segundo, la transformada z ordinaria nada dice acerca de la respuesta del sistema en $1/3$, $1/2$, $\pi/2$ o $6/8$ s. Los datos de la respuesta del tiempo se obten-

drán solamente en $0, 1, 2, 3, \dots, s$. Por tanto, la transformada z modificada (o retardada) proporciona información sobre la respuesta entre periodos muestreados.

La modificación consiste conceptualmente en sumar un retardo de D segundos a la función que se evalúa, donde D varía de 0 a un periodo de muestreo T (fig. 34-30). Para obtener un muestreo en $1/3 T$ s se necesita un retardo de $2/3 T$ s, como se ilustra en la figura 34-31c. En general, para obtener un muestreo en mT s, donde m está entre 0 y 1, el retardo D debe ser $D = T(1 - m)$ s, como se muestra en la figura 34-32. El retardo D no figura en ninguna parte de la transformada z modificada; sólo aparece el parámetro m relacionado. En aplicaciones reales, m es el desplazamiento del periodo de muestreo. Una transformada z modificada $F(z, m)$ con $m = 1/3$ produce resultados de muestreo $f^*(t, m)$ en el tiempo $1/3 T$, $(1 + 1/3)T$, $(2 + 1/3)T$, $(3 + 1/3)T, \dots, (K + m)T$ s, como se ilustra en la figura 34-31. Esta figura muestra asimismo la respuesta de la transformada z modificada para $m = 0$ y $m = 1$. Obsérvese que los valores muestreados de $m = 0$ y $m = 1$ son idénticos salvo por una demora de

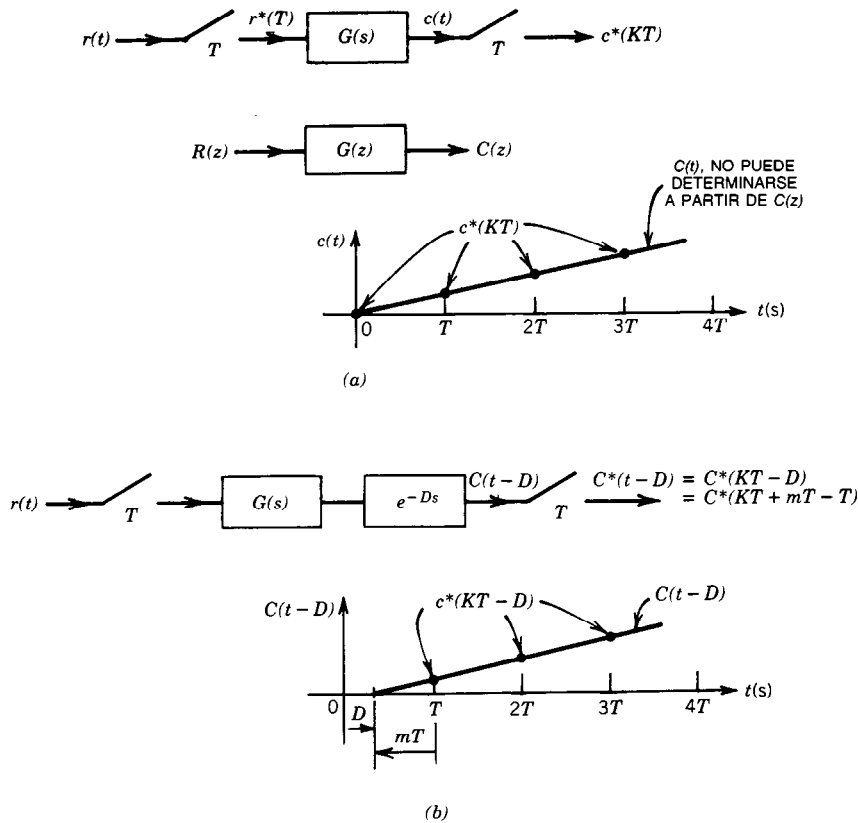


Fig. 34-30. Concepto de la transformada z modificada. a) Transformada z ordinaria, $f(t) \Rightarrow F(z)$, $F(z) \Rightarrow f^*(KT)$ $r(t) \Rightarrow R(z)$, $G(s) \Rightarrow G(z)$, $C(z) \Rightarrow C^*(KT)$ $K = \text{números de muestra}$. La transformada z inversa de $C(z)$ produce $C^*(T)$, que sólo es válida en los instantes $t = 0, T, 2T, 3T, \dots$. El asterisco (*) denota una función de tiempo muestreada, que es una sucesión de valores numéricos. b) Transformada z modificada, $f(t) \Rightarrow F(z, m)$, $F(z, m) \Rightarrow f^*(KT + mT)$. $r(t) \Rightarrow R(z)$, $G(s) \Rightarrow G(z, m)$, $C(z, m) \Rightarrow C^*(KT + mT)$, $0 \leq m \leq 1$, $D =$ retardo, de uso conceptual. No figura en las transformadas $D = T(1 - m)$ segundos.

T segundos cuando $m = 0$. En la tabla 34-26 se presenta un breve glosario de la terminología que se emplea.

La función muestreada por pulsos $f^*(t)$ está dada por (tabla 34-26):

$$f^*(t) = \sum_{K=0}^{\infty} f(t) \delta(t - KT) \quad (34-49)$$

La función muestreada por pulsos modificada o retardada $f^*(t, m)$ es (tabla 34-26):

$$\begin{aligned} f^*(t, m) &= f^*(t - D) = \sum_{K=0}^{\infty} f(t - D) \delta(t - KT) = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} f(KT - D) \delta(t - KT) \end{aligned} \quad (34-50)$$

De la figura 34-32, se tiene:

$$D + mT = T \quad \text{o bien} \quad D = T(1 - m) - T - mT \quad (34-51)$$

Insertando la ecuación 34-51 en la ecuación 34-50 se obtiene:

$$f^*(t, m) = \sum_{K=0}^{\infty} f(KT - T + mT) \delta(t - KT)$$

o bien:

$$f^*(t, m) = \sum_{K=0}^{\infty} f(KT + mT - T) \delta(t - KT) \quad (34-52)$$

El retardo de un periodo, $-T$, produce un factor z^{-1} en $F(z, m)$:

$$f^*(t, m) \Rightarrow F(z, m) = z^{-1} \sum_{K=0}^{\infty} f(KT + mT) z^{-K} \quad (34-53)$$

La transformada z ordinaria es:

$$f^*(t) \Rightarrow F(z) = \sum_{K=0}^{\infty} f(KT) z^{-K} \quad (34-54)$$

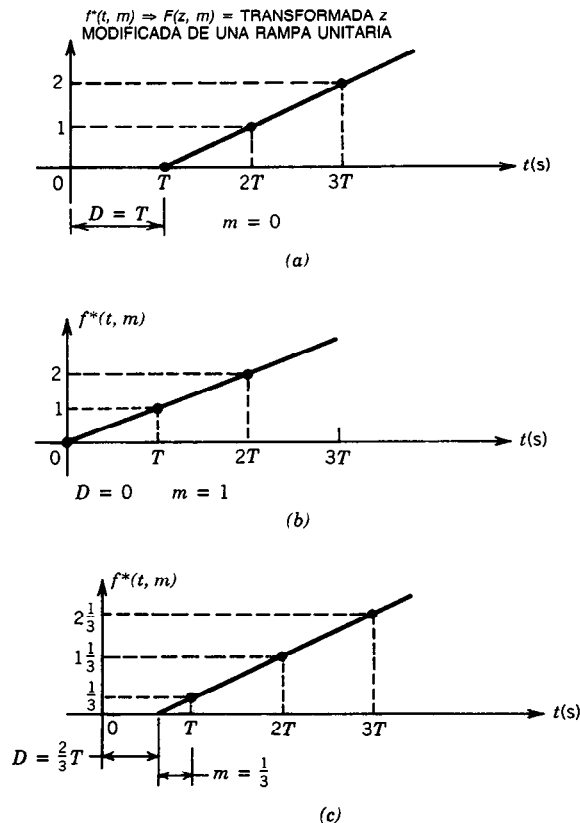


Fig. 34-31. Respuesta de la transformada z modificada de una rampa unitaria para $m = 0, 1/3, 1$. a) $m = 0$, $D = T$ = un retardo de una muestra (se supone que $T = 1$ s), $\bullet = f^*(t, m) = f^*(t, 0) \Rightarrow F(z, 0)$. b) $m = 1$, $D = T(1 - m) = 0$ = no hay retardo (se supone que $T = 1$ s), $\bullet = f^*(t, m) = f^*(t, 1) = f^*(t) \Rightarrow F(z) = F(z, 1)$, transformada z ordinaria de funciones continuas en $t = 0$. c) $m = 1/3$, $D = T(1 - m) = 2/3 T$ segundos (se supone que $T = 1$ s), $\bullet = f^*(t, m) = f^*(t, 1/3) \Rightarrow F(z, 1/3)$. $f^*(t, m)$ = un valor muestreado de $f(t)$ en el instante $t = KT + mT$. Cuando $m = 1/3$, $f^*(t, m)$ da el valor muestreado en $1/3 T$ más tarde que $f^*(t) \Rightarrow F(z)$, la transformada z ordinaria. Obsérvese que el retardo de $2/3 T$ produce un resultado en $1/3 T$, respecto a la respuesta no retardada.

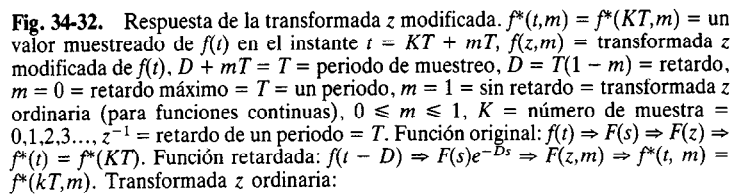
Se debe advertir una consecuencia importante de la ecuación 34-53. Si $F(m, z)$ se invierte a $f^*(t, m)$ dividiendo el denominador de $F(z, m)$ entre el numerador de esta misma función, la serie resultante consta de los términos $z^{-1}f(KT + mT)z^{-K}$ o bien $f(KT + mT)z^{-(K+1)}$. Por tanto, un factor de z^{-4} corresponde a la tercera muestra, desplazada en la dirección creciente del tiempo en mT segundos [$z^{-4} \Rightarrow -(K+1) = -4$ o $K+1 = 4$ o $K = 3$]. Cuando se invierte por medio de la división larga, un factor de z^{-n} corresponde al $(n-1)$ -ésimo intervalo de muestreo para transformadas z modificadas, mientras que un factor de z^{-n} corresponde a la n -ésima muestra para transformadas z ordinarias. Esto lo ilustra el ejemplo 34.8, donde se toma la transformada z inversa de una rampa unitaria, primero por medio de la división larga de la transformada z ordinaria y después por medio de

la división larga de la transformada z modificada. Los resultados se grafican en la figura 34-33, donde se destaca que un factor de z^{-n} corresponde a un tiempo de nT segundos para la transformada z ordinaria [$z^{-2} \Rightarrow 2T$ segundos] mientras que ese factor corresponde a un tiempo de $(n-1+m)T$ segundos para la transformada z modificada [$z^{-2} \Rightarrow (2-1+1/3)T = 4/3T$ segundos, para $m = 1/3$].

Ejemplo 34.8. Transformadas z modificadas de una rampa. Primero considérese la transformada z ordinaria de una rampa unitaria $f(t) = t\mu(t)$.

A partir de la tabla 34-25 de transformadas z se puede obtener:

$$F(z) = \frac{Tz}{(z-1)^2} = \frac{Tz}{z^2 - 2z + 1} \quad \text{para } f(t), t \geq 0$$



Transformada z modificada:

Clave: ● = Valores muestreados no retardados, $f^*(t) = f^*(KT)$
▲ = Valores muestreados retardados, $f^*(t, m) = f^*(KT, m)$
△ = Valores muestreados no retardados en la función retardada, con fines ilustrativos solamente

$$f^*(KT) \Rightarrow z^2 - 2z + 1 / \frac{Tz^{-1} + 2Tz^{-2} + 3Tz^{-3} + 4Tz^{-4} + \dots}{Tz - 2T + Tz^{-1}}$$

A partir de la tabla 34-27 de dichas transformadas y en base a la obra de Tou*, se tiene:

*El libro de Tou¹³ contiene una de las tablas de transformadas z modificadas más completas de que se dispone.

Sea $m = 1/3$. Entonces:

$$F(z, 1/3) = \frac{1/3 T}{z-1} + \frac{T}{(z-1)^2} = \frac{1/3 T(z-1) + T}{(z-1)^2} = \frac{1/3 Tz + 2/3 T}{z^2 - 2z + 1}$$

Invirtiendo por división larga:

$$f^*(KT + 1/3 T) \Rightarrow z^2 - 2z + 1 \over \begin{array}{r} 1/3 Tz^{-1} + 1/3 Tz^{-2} + 1/3 Tz^{-3} + \dots \\ 1/3 Tz + 2/3 T \\ \hline 1/3 Tz - 2/3 T + 1/3 Tz^{-1} \\ \hline 1/3 T - 1/3 Tz^{-1} \\ \hline 1/3 T - 1/3 Tz^{-1} + 1/3 Tz^{-2} \\ \hline 1/3 Tz^{-1} - 1/3 Tz^{-2} \end{array}$$

Si se recuerda la exposición que sigue a las ecuaciones 34-53 y 34-54, el factor $1/3 Tz^{-1}$ corresponde a $K = 0$ o $f^*(1/3 T)$, el factor $4/3 Tz^{-2}$ corresponde a $K = 1$ o $f^*(T + 1/3 T)$ y el factor $7/3 Tz^{-3}$ corresponde a $K = 2$ o $f^*(2T + 1/3 T)$.

Existe un término z^{-1} extra presente en la transformada z modificada. Por tanto, los muestreos de tiempo resultantes de una transformada z ordinaria de $f(t) = t$ y la inversión por división larga ($T =$ tiempo de muestreo, elegido como un segundo) son los que se indican en la siguiente tabla:

Términos de $F(z)$	Muestreo núm. K	Tiempo de muestreo KT	Magnitud del tiempo de respuesta $f^*(KT)$
Tz^{-1}	1	$T = 1$	1
$2Tz^{-2}$	2	$2T = 2$	2
$3Tz^{-3}$	3	$3T = 3$	3
$4Tz^{-4}$	4	$4T = 4$	4
Az^{-h}	n	$nT = n$	A

y para una transformada z modificada de $f(t) = t$, $m = 1/3$ y la inversión por división larga se obtienen los siguientes tiempos de muestreo:

Términos de $F(z, m)$	Muestreo núm. K	Tiempo de muestreo $(K-1+m)T$	Magnitud del tiempo de respuesta $f^*(KT+1/3 T)$
$1/3 Tz^{-1}$	0	$(0+1/3)T=1/3$	$1/3$
$4/3 Tz^{-2}$	1	$(1+1/3)T=4/3$	$4/3$
$7/3 Tz^{-3}$	2	$(2+1/3)T=7/3$	$7/3$
Az^{-n}	$n-1$	$(n-1+1/3)T$	A

Estos resultados se grafican en la figura 34-33.

34.9 CONTROL NO LINEAL

El control no lineal puede dividirse en dos amplias clases: sistemas no lineales no intencionales e intencionales. En el caso del control no lineal no intencional, el

Tabla 34-26. Glosario terminológico de la transformada z modificada

Término	Definición
$f(t)$	Función de tiempo continua
$f^*(t)$	Función de tiempo muestreada, una sucesión de números que son las ponderaciones de un tren de funciones de pulso con periodo T
$f^*(t, m) [= f^*(t - D)]$	Función de tiempo con muestreo retardado; un valor muestreado de $f(t)$ en el momento en que $t = KT - D$ o bien $t = KT + mT - T = (K-1)T + mT$
D	Retardo de la función de tiempo = $T(1 - m)$ segundos
T	Periodo de muestreo
$F(z)$	Transformada z de $f(t)$
$F(z, m)$	Transformada z modificada de $f(t)$
$\delta(t)$	Función delta de Dirac, función de pulso; $\delta(t) = 0$ para $t \neq 0$, $\delta(t) \rightarrow \infty$ para $t = 0$, $\int_{0-}^{0+} \delta(t) dt = 1$
Función de muestreo de pulsos $f^*(t)$	$f^*(t) = \sum_{K=0}^{\infty} f(t) \delta(t - KT)$
Función de muestreo de pulsos modificada o retardada $f^*(t, m)$	$f^*(t, m) \equiv f^*(t - D) = \sum_{K=0}^{\infty} f(t - D) \delta(t - KT) = \sum_{K=0}^{\infty} f(KT - D) \delta(t - KT)$

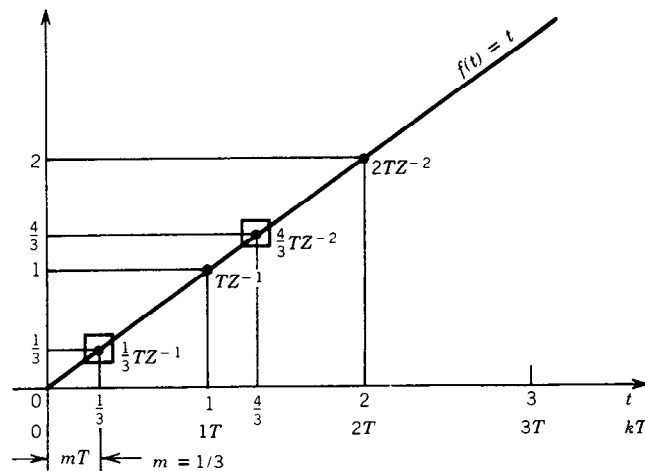


Fig. 34-33. Resultados del ejemplo 34.8, respuesta de una rampa unitaria, calculados por la transformada z ordinaria y por la transformada z modificada con $m = 1/3$ y $T = 1$ s. $f^*(t, m) = \square = f^*(t, 1/3)$, $f^*(t) = \bullet$. Debe tenerse en cuenta que las funciones de tiempo muestreadas solamente son válidas en los puntos de muestreo \bullet o \square .

Clave: \bullet = Transformada z ordinaria $f(z)$
 $z^{-2} \Rightarrow 2T = 2$ s
 \square = Transformada z modificada $F(z, m)$
 $z^{-2} \Rightarrow (2 - 1 + 1/3)T = 4/3$ s
 $z^{-n} \Rightarrow (n - 1 + m)T$ s

sistema por su naturaleza física es no lineal y el problema consiste en controlarlo de alguna manera. Los sistemas de control no lineal intencional resultan cuando el diseñador emplea dispositivos de control no lineales, tales como los reveladores. En la figura 34-34 se enumeran varias no linealidades no intencionales inherentes a sistemas por lo demás lineales.

El grado de no linealidad determina el método de diseño. Si la no linealidad es pequeña en estos sistemas cuasilineales, de manera que un procedimiento de diseño lineal estándar produzca un sistema estable y prediga en forma correcta la respuesta del sistema dentro de una desviación tolerable, la no linealidad puede ignorarse. La única consecuencia es que la respuesta del sistema se desvía un tanto de los resultados que se predijeron por medio del análisis y diseño lineales aproximados; el problema es entonces especificar qué es una desviación tolerable. Según la aplicación del sistema, esta desviación puede variar de prácticamente cero (p. ej., 0.01%) en el caso de un sistema de control de la posición relativa de misiles, a más del 50% en el caso de un sistema que no necesite una respuesta lineal, como el control fotoeléctrico de la iluminación de las calles en respuesta a la entrada de luz ambiental.

Muchos sistemas no lineales están diseñados mediante la aplicación de métodos lineales aproximados, cuando el diseñador sabe que el sistema es sólo ligeramente no lineal. Por ejemplo, todos los componentes electrónicos exhiben cierto grado de no linealidad. En aplicaciones comunes, la no linealidad se expresa en una especificación, tal como "menos del 1% de distorsión no lineal", y de ahí en adelante se pasa por alto.

Sin embargo, en muchos otros casos no se puede ignorar la no linealidad no intencional. Es claro que cuando en un procedimiento de diseño lineal no puede predecirse en forma óptima la estabilidad del sistema, no es posible ignorar la no linealidad. En esta situación se deben emplear procedimientos específicos de análisis y diseño no lineales. El procedimiento del plano de fase, el método de la función descriptora, el criterio de estabilidad de Liapunov y el criterio del círculo de Popov se presentan aquí como ejemplos de cómo analizar estos sistemas altamente no lineales.

La segunda clase general de control no lineal concierne al análisis y diseño de sistemas en los que se introduce intencionalmente una no linealidad. Esto se hace ya sea porque mejora el desempeño de alguna manera o bien porque reduce el costo integral del sistema.

Uno de los ejemplos más claros de esto es un controlador de "todo o nada", de tiempo mínimo. Un controlador de este tipo es efectivamente un interruptor (o revelador) controlado que produce un máximo esfuerzo del sistema todo el tiempo, hasta que el error del sistema sea cero. Por tanto, un vehículo que viajara del punto A al punto B controlado por un controlador de todo o nada aceleraría a máxima velocidad hasta que, en base a mediciones o cálculos, el controlador llevara el vehículo a una desaceleración máxima. En un sistema bien diseñado el vehículo llegaría a la velocidad cero en el punto B y el controlador se apagaría ahí. En un automóvil, esto correspondería a pisar a fondo el acelerador en el punto A y sostenerlo ahí hasta llegar a un punto entre los puntos A y B, cuando se aplicarían a

Tabla 34-27. Tabla breve de transformadas z modificadas

$f(t)$	$f(s)$	$f(z, m)^a$	Término
$\mu_s(t)$	$\frac{1}{s}$	$\frac{1}{z-1}$	Escalón
$\delta(t)$	1	0	Impulso
$\delta(t - kT)$	e^{-kTs}	z^{m-1-k}	Impulso retardado
t	$\frac{1}{s^2}$	$\frac{mT}{z-1} + \frac{T}{(z-1)^2}$	Rampa
$\frac{t^2}{2!}$	$\frac{1}{s^3}$	$\frac{T^2}{2} \left[\frac{m^2}{z-1} + \frac{2m+1}{(z-1)^2} + \frac{2}{(z-1)^3} \right]$	Parábola
e^{-at}	$\frac{1}{s+a}$	$\frac{e^{-amT}}{z - e^{-aT}}$	Decaimiento exponencial
$1 - e^{-at}$	$\frac{a}{s(s+a)}$	$\frac{1}{z-1} - \frac{e^{-amT}}{z - e^{-aT}}$	Constante de tiempo de $1/a$
$\sin \omega t$	$\frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$	$\frac{z \sin(m\omega T) + \sin(1-m)\omega T}{z^2 - 2z \cos(\omega T) + 1}$	Seno
$\cos \omega t$	$\frac{s}{s^2 + \omega^2}$	$\frac{z \cos(m\omega T) - \cos(1-m)\omega T}{z^2 - 2z \cos(\omega T) + 1}$	Coseno
$e^{-at} \sin \omega t$	$\frac{\omega}{(s+a)^2 + \omega^2}$	$\frac{[z \sin(m\omega T) + e^{-aT} \sin(1-m)\omega T] e^{-amT}}{z^2 - 2ze^{-aT} \cos(\omega T) + e^{-aT}}$	Seno amortiguado
$e^{-at} \cos \omega t$	$\frac{s}{(s+a)^2 + \omega^2}$	$\frac{[z \cos(m\omega T) - e^{-aT} \cos(1-m)\omega T] e^{-amT}}{z^2 - 2ze^{-aT} \cos(\omega T) + e^{-aT}}$	Coseno amortiguado

Fuente. Adaptado de Tou¹³.^a Retardo = $(1-m)T$; $m=1$ no hay retardo; $m=0$ = retardo de un periodo; T = tiempo de muestreo.

fondo los frenos para que el vehículo se detuviera exactamente en el punto B. En el control lineal normal, el acelerador y el freno se aplicarían en forma gradual. En un control de todo o nada, el acelerador y el freno se aplican a fondo. Este control es óptimo en tiempo para una planta que tiene la función de transferencia general:

$$\frac{C(s)}{U(s)} = \frac{1}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0} \quad (34-55)$$

Ésta es la manera más rápida de llegar del punto A al punto B. Se puede demostrar que, cuando mucho,

se requieren $n-1$ conmutadores en signo, donde n es el orden de la función de transferencia del sistema, dada por la ecuación 34-55^{15,16}.

Para un automóvil de masa M con la función de transferencia de planta $1/Ms^2$, $n=2$, de manera que se requiere una acción de conmutación del acelerador al freno. Sin embargo, éste no es el método que suele aplicarse para controlar un automóvil (con la excepción de los autos para "arrancones" o *dragsters*), debido a que el comportamiento óptimo en el tiempo no es el criterio más importante para controlar un automóvil. La durabilidad del motor, probabilidad de supervivencia del motor y del conductor, costos razona-

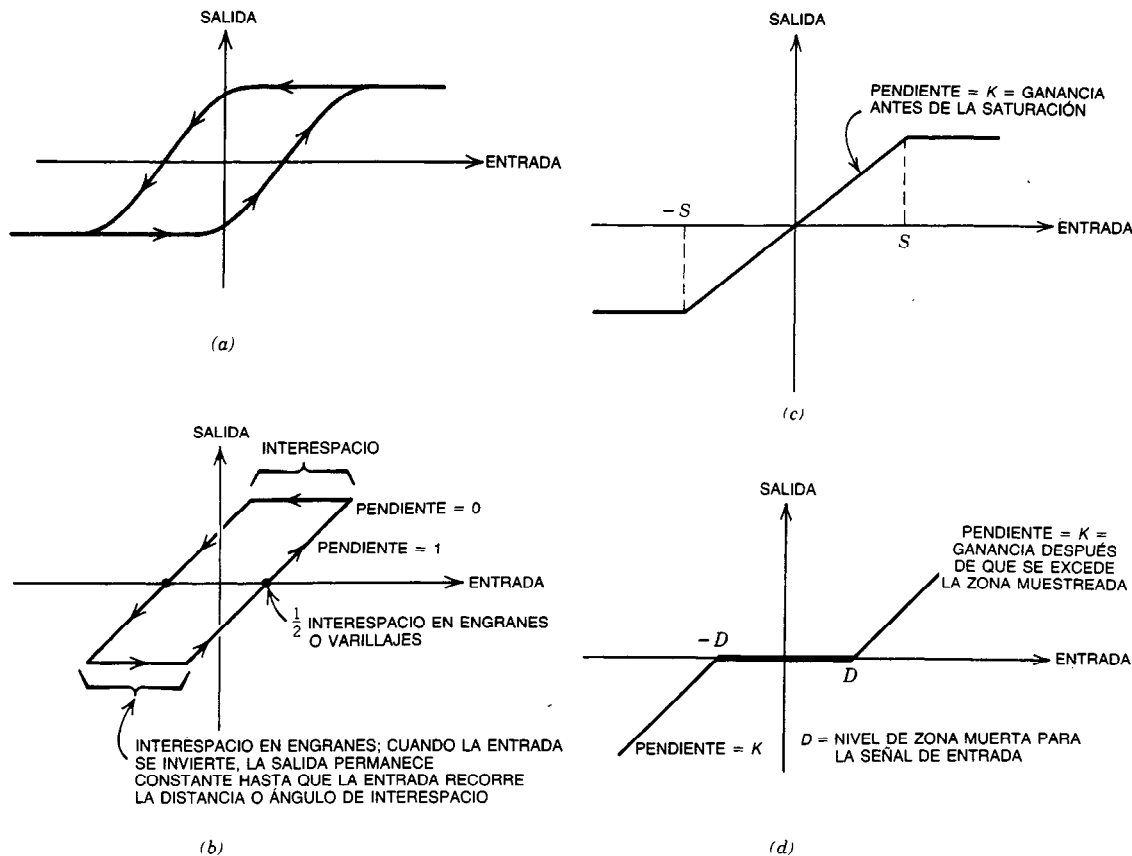


Fig. 34-34. No linealidades no intencionales inherentes a ciertos elementos de control o que a veces ocurren en otros:

- a) Histéresis: puede ocurrir en dispositivos magnéticos y otros en los cuales la salida depende de la dirección del cambio de entrada, así como de la magnitud de ésta.
- b) Efecto de juego; puede presentarse siempre que haya juego libre en un conjunto de elementos móviles conectados, tales como engranes, embragues, acoplamientos, varillajes.
- c) Saturación; puede ocurrir en un dispositivo físico cualquiera, pero comúnmente en amplificadores y motores de par, que no pueden entregar una salida por encima de un cierto nivel. s = nivel de saturación para la señal de entrada (para la señal de salida, el nivel de saturación es Ks).
- d) Zona muerta; puede darse en un sensor lineal cualquiera que requiera una cierta señal mínima antes de que pueda captarse la señal, o en un actuador cualquiera, tal como un motor, un par motor o un transmisor/motor de sincrocontrol, que requieren una entrada mínima antes de que se produzca un cambio cualquiera en la salida.

bles de combustible, neumáticos y reparaciones, y acatamiento de los límites de velocidad, se consideran aspectos más importantes que la minimización del tiempo de recorrido.

No obstante, si se requiere un tiempo de recorrido mínimo o un tiempo mínimo del ciclo de la máquina, entonces el controlador de todo o nada altamente no lineal sería la opción de diseño adecuada^{15,16}. Por ejemplo, se requiere un tiempo de respuesta mínimo cuando se hace girar un misil montado en cubierta o un sistema de posicionamiento de cañones a bordo de un barco. En este caso, en el que se elige intencionalmente un esquema de control no lineal, se tendrían que emplear los diversos métodos de análisis y diseño de sistemas no lineales que se mencionaron antes. Por ejemplo, se pueden diseñar controladores de todo o

nada aplicando el método del plano de fase cuando el sistema sea de segundo orden (que es el caso del control de aceleración y desaceleración de un automóvil o una nave espacial a lo largo de un eje único).

34.9.1 Características únicas de los sistemas no lineales

La característica más evidente de un sistema no lineal se deduce del hecho de que, como el sistema es no lineal, no se aplica el principio de la superposición. Por tanto, si se duplica la entrada a un sistema no lineal, la salida no se duplica. De hecho, la salida puede saltar a cero o a una oscilación de alta frecuencia. La primera situación podría presentarse si el sistema estuviese equipado con un dispositivo de paro automático. Este

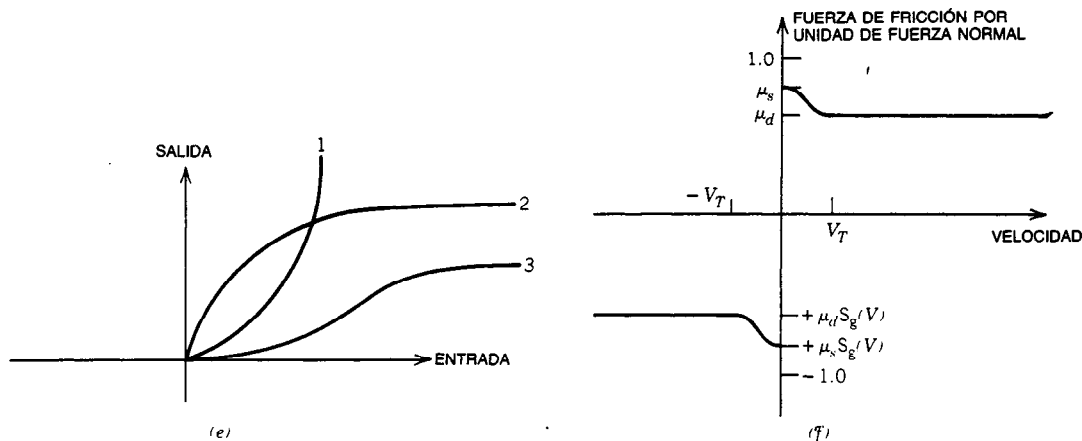


Fig. 34-34 (cont.). No linealidades no intencionales inherentes a ciertos elementos de control o que a veces ocurren en otros:
 e) Relación entrada-salida no lineal; puede presentarse en un dispositivo considerado lineal, como por ejemplo un amplificador, resorte, amortiguador, resistor. 1, 2 y 3 pueden no ser simétricos; sólo se muestra el primer cuadrante como ilustración.
 f) Fricción no lineal, fricción estática. Fuerza de fricción = $\mu \times$ fuerza normal. μ_s = coeficiente de fricción estática (la de un neumático en contacto con el camino suele ser de 0.9). μ_d = coeficiente de fricción dinámica o de deslizamiento (el de un neumático que resbala en el camino suele ser de 0.8); también se llama coeficiente de fricción cinética. S_g = función signo. $S_g(V) = +1$ para velocidad positiva y -1 para velocidad negativa. V_T = velocidad de transición, un valor comúnmente mucho menor que 1/100 mph (velocidad efectivamente cero). Cuando la velocidad se invierte o es negativa, también la fuerza friccional se invierte o es negativa. El coeficiente de fricción se sigue llamando positivo, donde la inversión del signo la proporciona el signo de la velocidad V .

tipo de interruptor, o un interruptor cualquiera dado el caso, es un dispositivo no lineal. La segunda situación puede presentarse en un sistema que exhiba ciclos límite o resonancias de salto. Un ciclo límite es una oscilación limitada no lineal y cíclica, a menudo no sinusoidal, en la salida de un sistema no lineal, que ocurre exclusivamente para ciertos intervalos de amplitud de la salida del sistema. Una resonancia de salto es un salto discontinuo en la amplitud de salida de un sistema no lineal, a medida que varía la frecuencia de la señal de salida. A la frecuencia de salto, la salida del sistema es multivaluada, dependiendo de si ha ocurrido el salto. Estos dos fenómenos, la resonancia de salto y la oscilación del ciclo límite, dependen de la amplitud.

En un sistema lineal, la respuesta a la frecuencia del sistema es independiente de la amplitud. Pero esto no se aplica a sistemas no lineales: la respuesta a la frecuencia de un sistema de este tipo varía con la amplitud y, en general, no es constante, debido a que la amplitud varía. Por tanto, un amplificador no lineal puede sonar bien a volumen medio pero muy mal a alto volumen, puesto que cambia su respuesta a la frecuencia.

Otro fenómeno no lineal poco común es el de la oscilación subarmónica. Si la entrada a un sistema no lineal tiene una frecuencia f_0 y la salida tiene una frecuencia inferior f_0/n , donde n es un entero mayor que uno, el sistema exhibe oscilación subarmónica. La oscilación subarmónica depende de las condiciones iniciales y también de la amplitud y la frecuencia de la función de entrada. En general, es necesario dar al sistema una patada metafórica, por ejemplo, cambiando súbitamente la amplitud o la frecuencia de la función de entrada, para iniciar oscilaciones subarmónicas¹⁷.

Los ciclos límite pueden verse afectados por otros dos fenómenos no lineales. El ciclo límite puede ser inhibido o suspendido por la extinción de frecuencia (o extinción asincrónica). Esto consiste simplemente en aplicar una entrada de amplitud grande de una frecuencia no relacionada por un número entero con la frecuencia del ciclo límite, y después reducir la amplitud de la entrada. Por tanto, un ciclo límite de 1 000 Hz podría extinguirse aplicando una entrada de 314 o 1 414 Hz. El otro efecto del ciclo límite es lo contrario. El ciclo límite prosigue, pero en una frecuencia diferente⁶. El término "entrapamiento de frecuencia" se refiere a un ciclo límite que se estanca en fase con una señal de entrada aplicada ligeramente diferente en frecuencia respecto del ciclo límite libre. Los osciladores no lineales, como el oscilador de Van der Pol, pueden fijarse a una señal de entrada en esta forma. La ecuación de Van der Pol es de segundo orden, con un término de amortiguamiento negativo para amplitudes bajas y positivo para amplitudes altas. La amplitud del ciclo límite del sistema de Van der Pol sólo depende de las constantes K_1 y K_2 de la ecuación 34-56, la ecuación de Van der Pol:

$$\ddot{X} - \underbrace{K_1(1 - X^2)}_{\text{Término de amortiguación}} \dot{X} + K_2 X = 0 \quad K_1 > 0, K_2 > 0 \quad (34-56)$$

$-(1 - X^2)$ = Término de amortiguación
 negativo para $|X| < 1$
 positivo para $|X| > 1$

Esta ecuación produce oscilaciones del ciclo límite relativamente fáciles de simular en una computadora analógica digital.

Para resumir, los sistemas no lineales no cumplen la regla de la superposición y exhiben ciertos modos de comportamiento únicos. Las características de los sistemas no lineales son:

1. Ciclos límite.
2. Resonancia de salto.
3. Oscilación subarmónica.
4. Respuesta a la frecuencia según la amplitud.
5. Entrampamiento de frecuencia.
6. Extinción asincrónica.

34.9.2 Análisis del plano de fase

El método de análisis del plano de fase es un método útil para analizar la respuesta y la estabilidad transitorias de sistemas no lineales de segundo orden. El plano de fase es un plano cartesiano en el que como abscisa se elige una variable de estado, y como ordenada otra variable de estado de un sistema de segundo orden. La abscisa suele tomarse como x y la ordenada como \dot{x} . Aunque ambas variables de estado son funciones del tiempo, éste no necesita figurar en forma explícita (sino que se puede determinar implícitamente). En teoría, los conceptos de la técnica del plano de fase se pueden extender de dos dimensiones a tres (o más) y, por tanto, a tres (o más) variables de estado. Sin embargo, en la práctica no suelen emplearse más de dos dimensiones. El caso usual de aplicación es el análisis de un sistema altamente no lineal de segundo orden que tiene dos variables de estado x y \dot{x} o, en forma equivalente, x_1 y x_2 .

La ventaja principal del método de análisis del plano de fase es que no es un método de linealización aproximado, y por tanto no está limitado por la exactitud de otros métodos de linealización aproximados (p. ej., el método de la función descriptora que se aplica a menudo y que se explica más adelante).

Las gráficas del plano de fase son útiles para conmutar no linealidades y para el diseño de controladores de tiempo mínimo óptimos de sistemas de segundo orden. La limitación de segundo orden es la principal desventaja del método ordinario del plano de fase en dos dimensiones; no obstante, muchos sistemas prácticos son de segundo orden o se pueden aproximar en forma razonable por medio de un sistema de segundo orden.

Para ilustrar la técnica, considérese una piedra que se arroja hacia arriba desde una altura inicial $x(0) = x_0$ con velocidad inicial $\dot{x}(0) = V_0$. Las ecuaciones de Newton para el movimiento de la piedra son:

$$F = MA$$

o bien:

$$-mg = m \frac{d^2x}{dt^2}$$

o bien:

$$-g = \frac{d^2x}{dt^2}$$

donde A = aceleración ascendente = d^2x/dt^2

x = posición ascendente o vertical

\dot{x} = velocidad de ascenso = dx/dt

F = fuerza ascendente = $-mg$

m = masa de la piedra

mg = peso de la piedra = fuerza descendente

$x(0) = x_0$ = posición inicial

$\dot{x}(0) = V_0$ = velocidad inicial

g = aceleración de la gravedad, constante

K_1, K_2 = constantes de integración

Al integrar una vez se obtiene:

$$\int -g dt = -gt = \frac{dx}{dt} + K_1 = \int \frac{d^2x}{dt^2} dt \quad (34-57)$$

Volviendo a integrar:

$$\int -gt dt = -g \frac{t^2}{2} = x + K_1t + K_2 = \int \left(\frac{dx}{dt} + K_1 \right) dt \quad (34-58)$$

Sustituyendo dx/dt por \dot{x} en la ecuación 34-57:

$$\dot{x} = -K_1 - gt$$

Es obvio que insertando $t = 0$ se produce:

$$\dot{x}(0) = -K_1 \quad \text{o bien} \quad \dot{x}(0) = V_0 = -K_1$$

Por tanto, la expresión de \dot{x} se convierte en :

$$\dot{x} = V_0 - gt \quad (34-59)$$

De la ecuación 34-58, con $t = 0$, se tiene:

$$0 = x(0) + 0 + K_2 \quad \text{o bien} \quad K_2 = -x_0 \equiv -x(0)$$

Al insertar los valores de K_1 y K_2 en la ecuación 34-58 se produce la ecuación para x :

$$x = V_0t + x_0 - g \frac{t^2}{2} \quad (34-60)$$

El procedimiento de análisis estándar sería entonces graficar la velocidad \dot{x} en función del tiempo (ec. 34-59) y la posición x en función del tiempo (ec. 34-60). Sin embargo, en el método del plano de fase interviene una gráfica de \dot{x} en función de x . Por tanto, el parámetro tiempo t se debe eliminar de las ecuaciones 34-59 y 34-60. Un método consiste en elegir un valor del tiempo y después calcular \dot{x} y x . Esto produce un punto en la trayectoria de la piedra, como se grafica en el plano \dot{x}, x . El proceso se repite para crear una trayectoria completa por un método de "conexión de puntos" en un algoritmo de computadora digital.

Como este problema es relativamente simple, \dot{x} se puede relacionar con x en forma analítica mediante la eliminación de t . Éste no es el método usual de construcción de una gráfica del plano de fase, puesto que el problema no suele ser así de simple. Más adelante se exponen métodos prácticos de construcción.

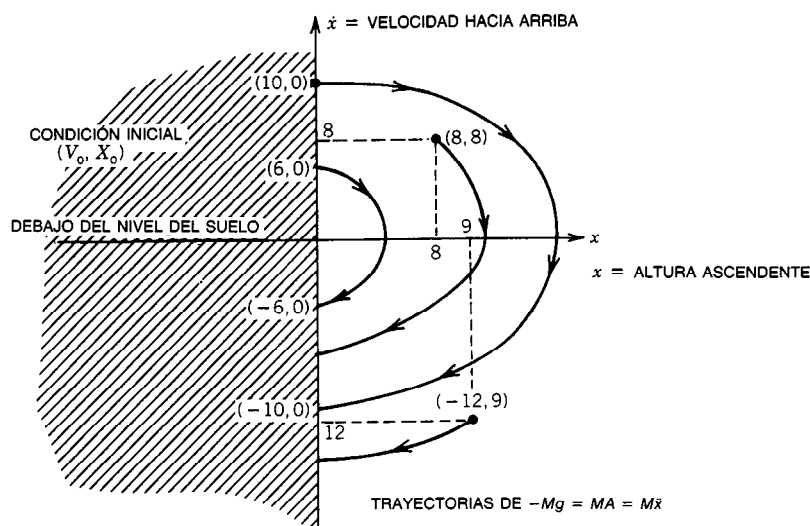


Fig. 34-35. Trayectoria en el plano de fase de una piedra lanzada verticalmente hacia arriba desde una altura inicial X_0 , con velocidad inicial V_0 . Las flechas indican tiempo creciente. X negativa está por debajo de tierra; es decir, $X \geq 0$ es una fuerte restricción.

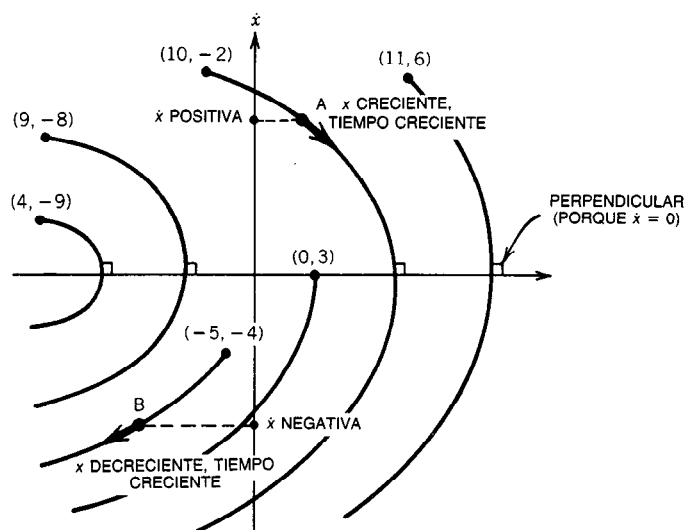


Fig. 34-36. Trayectorias completas en el plano de fase de una piedra lanzada verticalmente hacia arriba. Condición inicial: $(v_0, x_0) = [\dot{x}(0), x(0)]$. La piedra puede caer por debajo del nivel de referencia $x = 0$. (p. ej., puede ser lanzada desde la orilla de un risco). Asimismo, la determinación de la dirección del tiempo creciente a lo largo de las trayectorias. En la flecha del tiempo A , \dot{x} es positiva y, por tanto, X es creciente (con el tiempo). En la flecha del tiempo B , \dot{x} es negativa y decreciente (a la inversa del tiempo).

En la ecuación 34-59 puede despejarse t :

$$t = \frac{\dot{x} - V_0}{-g} = \frac{V_0 - \dot{x}}{g}$$

Este valor puede sustituirse en la ecuación 34-60 para eliminar t :

$$x = V_0 \left[\frac{V_0 - \dot{x}}{g} \right] + x_0 - \frac{g}{2} \left[\frac{V_0 - \dot{x}}{g} \right]^2$$

Tras una manipulación, el resultado de \dot{x} es:

$$\dot{x} = \pm \sqrt{V_0^2 + 2g(x_0 - x)} \quad (34-61)$$

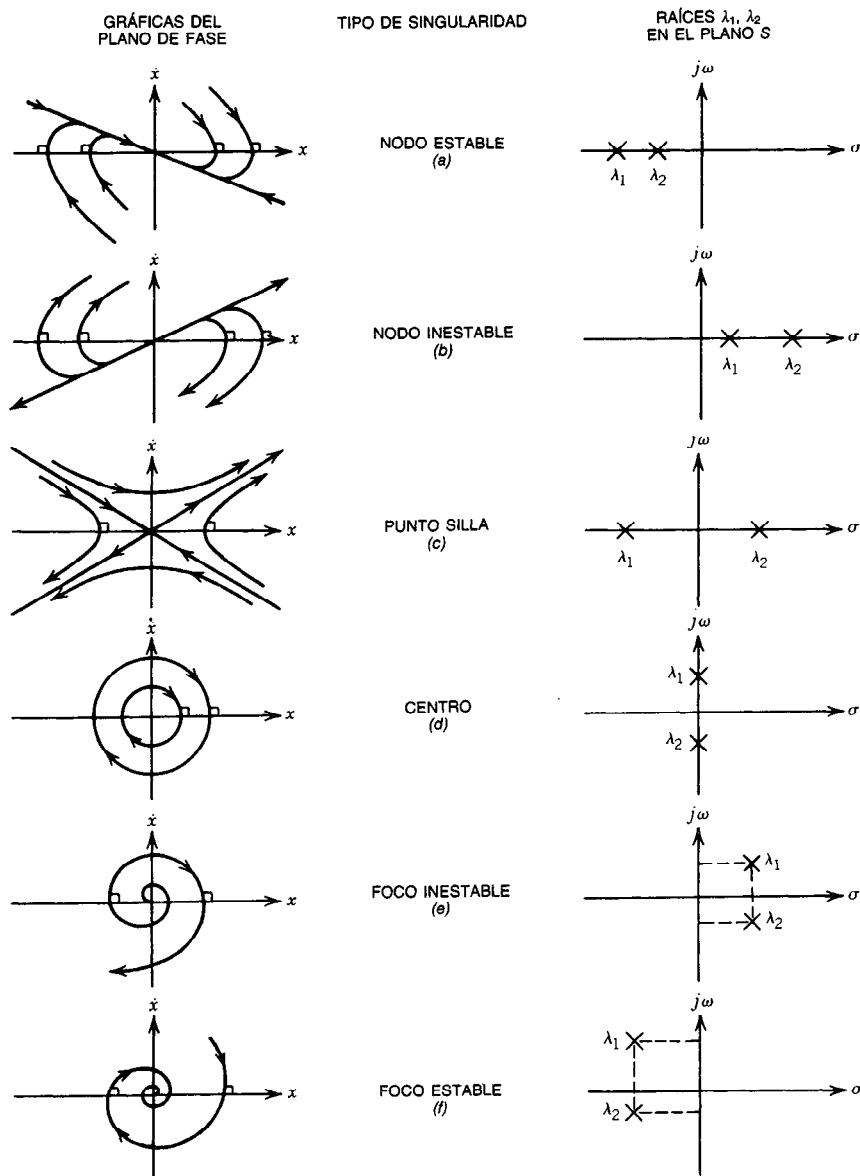


Fig. 34-37. Seis posibles puntos de equilibrio o singulares del plano de fase. Las raíces son valores característicos de $\ddot{x} + a\dot{x} + bx = 0$, o bien $(S - \lambda_1)(S - \lambda_2) = 0$.

Este resultado hace posible trazar familias de trayectorias en el plano \dot{x}, x [para diversas condiciones iniciales $\dot{x}(0), x(0) = V_0, x_0$].

En la figura 34-35 se muestran varias de estas trayectorias. Como el movimiento de la piedra cesa cuando ésta choca contra el suelo, no se muestran trayectorias para la altura negativa x . Sin embargo, si la piedra se arrojara hacia arriba desde la orilla de un risco, un nivel que podría tomarse como el origen de las coordenadas, entonces una altura negativa correspondiente a la caída de la piedra risco abajo será perfectamente razonable.

En la figura 34-36 se ilustra una gráfica de fase generalizada, la cual hace posible que se arroje una piedra por debajo y también por encima del nivel de referencia para la velocidad positiva o negativa. Esta segunda figura es una gráfica del plano de fase típica, en la que todo el plano de fase se llena con trayectorias. Las flechas indican la dirección del tiempo creciente. Una vez que se especifica una condición inicial, se especifica una trayectoria particular. La dinámica del sistema, descrita por el par de variables de estado x, \dot{x} , se desplaza en forma continua por esta trayectoria del plano de fase en la dirección de las flechas del tiempo.

El procedimiento para asignar la dirección de las flechas del tiempo es como sigue. Se elige un punto en que la trayectoria tenga una pendiente relativamente pequeña y magnitud \dot{x} relativamente grande, tal como el punto A de la figura 34-36. En el punto A, \dot{x} es positiva, y por tanto x es creciente. Así, la flecha del tiempo apunta en la dirección de x creciente a lo largo de la trayectoria, como se muestra. En el punto B, \dot{x} es negativa y por tanto x es decreciente. Entonces, la flecha del tiempo apunta en la dirección de x decreciente a lo largo de la trayectoria. La dirección del tiempo no se invierte a lo largo de ninguna trayectoria. Por consiguiente, cuando se determina una flecha del tiempo, el resto se traza con rapidez.

Una aplicación inmediata y muy práctica de la gráfica del plano de fase es determinar la estabilidad de ciclos límite por una simple inspección de la gráfica terminada. (No se requiere trabajo analítico; basta con una ojeada rápida.) Existen seis tipos básicos de puntos de equilibrio o singulares en el origen para la ecuación diferencial lineal de segundo orden básica:

$$\ddot{x} + a\dot{x} + bx = 0 \quad (34-62)$$

Mientras el sistema no lineal investigado sea analítico en la vecindad del origen (sin saltos ni pendientes infinitas en la proximidad de $\dot{x}, x = 0,0$), el sistema no lineal se puede aproximar por medio de la ecuación lineal 34-62 en una pequeña región alrededor del origen. Los valores característicos λ , o raíces de la ecuación característica 34-62, están dados por las soluciones de:

$$\lambda^2 + \lambda a + b = 0 \quad (34-63)$$

Los seis posibles pares de soluciones, y el tipo de puntos de equilibrio o singulares correspondientes, se muestran en la figura 34-37.

Obsérvese que los ciclos límite no se incluyen en esta figura. Los ciclos límite son movimientos periódicos u oscilaciones de amplitud fija que sólo presentan los sistemas no lineales no conservativos. En un sistema no conservativo, la energía no se conserva y debe haber una fuente de energía que sustente la oscilación del ciclo límite. El factor de amortiguamiento equivalente de un sistema que exhibe un ciclo límite es cero, y los límites son únicos y están aislados entre sí si existe más de uno. Este factor diferencia un ciclo límite de una oscilación no amortiguada del sistema lineal. La gráfica del plano de fase de $\lambda_1, \lambda_2 = \pm j\omega$ es un conjunto de óvalos (o círculos), donde el punto singular se denomina centro, como se muestra en la figura 34-37.

Existe una infinidad de estas trayectorias oscilatorias cerradas, dependiendo de las condiciones iniciales específicas. Por tanto, el sistema lineal puede presentar oscilaciones de una amplitud cualquiera, todas con frecuencia ω . En la figura 34-38 se ilustra un ejemplo de los ciclos límite que existen en el plano de fase. Obsérvese que los ciclos límite tienen amplitudes fijas (no exhiben una infinidad de trayectorias cerradas de amplitud variante). El péndulo se puede poner en movimiento con una oscilación de amplitud grande o pequeña. La oscilación se estabiliza con el tiempo a una amplitud constante fija, independiente de las condiciones iniciales al comenzar la oscilación. La amplitud de

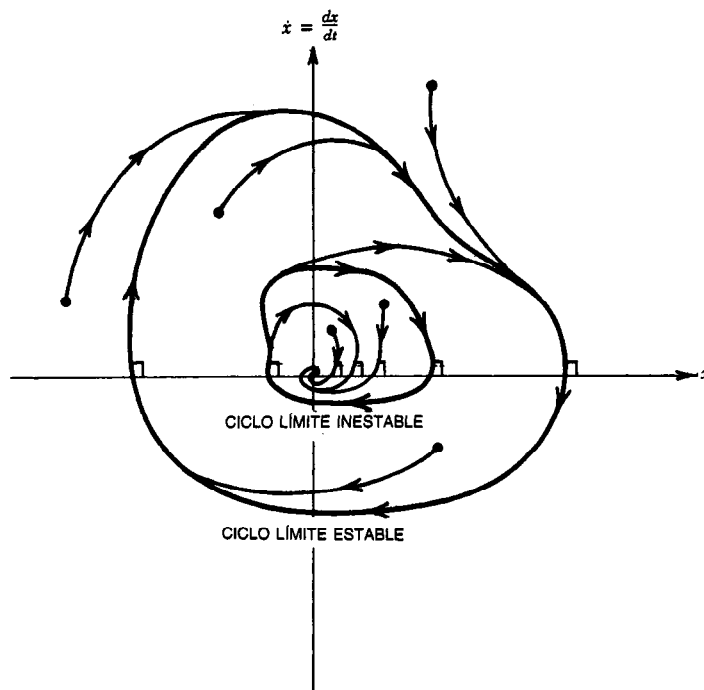


Fig. 34-38. Retrato del plano de fase de un ciclo límite estable y otro inestable.

esta oscilación de ciclo límite depende del funcionamiento interno del sistema, no de las condiciones iniciales. Los ciclos límite pueden ser estables o inestables, como se muestra en la figura 34-38. Los ciclos límite inestables no se pueden observar, debido a que las perturbaciones o ruidos en el sistema cambian con rapidez el estado del sistema a la trayectoria inestable divergente que lo lleva a salir del ciclo límite inestable.

Excepto en sistemas en extremo simples, resulta muy complicado determinar ciclos límite en forma analítica. La ubicación, forma y amplitud exactas de los ciclos límite se determinan con mayor facilidad utilizando métodos gráficos, experimentales o de simulación¹⁸.

Determinación por computadora del retrato de fase

La computadora digital es omnipresente en la actualidad, y se puede emplear para simular sistemas no lineales o para generar gráficas de plano de fase. Por otra parte, la computadora analógica puede producir gráficas de plano de fase con mucho menos tiempo de programación que el que se requiere en la computadora digital. De hecho, si se ha simulado un sistema en una computadora analógica (véase el capítulo 38, Modelación y simulación), no se requiere más labor de programación; basta conectar una graficadora $x - y$ a la variable de salida (x) y su derivada (\dot{x}), establecer las condiciones iniciales $x(0)$ y $\dot{x}(0)$, y encender la computadora analógica. (En forma alternativa, podría conectarse la derivada \dot{x} a la entrada vertical y x a la entrada horizontal de un osciloscopio con persistencia larga.) La computadora hace que la graficadora trace la trayectoria del plano de fase comenzado en $x(0)$ y $\dot{x}(0)$, y por tanto, que genere una trayectoria del retrato de fase completo. Después, el operador repite el procedimiento con diferentes condiciones iniciales para completar el retrato del plano de fase.

A menos que se disponga de programas de simulación especializados para la computadora digital, este tipo de computadora requiere un esfuerzo de programación mucho mayor que una computadora analógica para producir una gráfica de fase. Aun si se dispone de estos programas, el tiempo que se necesita para dominar su operación excederá con toda probabilidad el requerido para dominar el uso de la computadora analógica. Ésta es tan sólo una razón por la que continúan existiendo computadoras analógicas en la era de las digitales.

Construcción del retrato de fase por el método de las isoclinas

El método de las isoclinas es el procedimiento estándar para calcular manualmente un retrato de fase. La construcción depende de la búsqueda de una isoclina, que es una línea o lugar geométrico con pendiente de trayectoria constante en el plano (x, \dot{x}) . Considérese la forma general de una ecuación de estado no lineal de segundo orden:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= f(x_1, x_2)\end{aligned}\quad (34-64)$$

La velocidad \dot{x}_1 (o x_2) se grafica en la ordenada o eje y , y la posición x_1 se grafica en la abscisa o eje x . La pendiente de una trayectoria en un punto cualquiera está dada entonces por m :

$$\begin{aligned}m &= \text{pendiente de trayectoria} = \frac{dy}{dx} = \frac{d\dot{x}_1}{dx_1} = \\ &= \frac{dx_2}{dx_1} = \frac{dx_2/dt}{dx_1/dt} = \frac{\dot{x}_2}{\dot{x}_1}\end{aligned}\quad (34-65)$$

Se pueden elegir diferentes valores constantes de la pendiente de trayectoria m , como $m=0, 1, 2, 3, -1, -2, \infty$, e insertarse en la ecuación 34-65, que después puede utilizarse para graficar el lugar geométrico de todos los puntos que tengan la pendiente m . En muchos casos, el lugar geométrico de la pendiente de trayectoria constante es una recta, de manera que la isoclina es una recta con pendiente a .

Es importante no confundir la pendiente de la isoclina a con la pendiente de las trayectorias m . El método más adecuado consiste en trazar rayas cortas de pendiente m a todo lo largo de la isoclina de pendiente a . Por tanto, las rayas representan la dirección de las trayectorias. Si las rayas se extienden hasta que se conecten, se produce un retrato de fase más o menos poligonal. El procedimiento se ilustra en el ejemplo 34.9.

Ejemplo 34.9. Constrúyase la gráfica de plano de fase de:

$$\ddot{x} + 2\dot{x} + 3x = 0$$

Definiendo las variables de estado como:

$$x_1 = x$$

$$x_2 = \dot{x}$$

entonces:

$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$\dot{x}_2 = \ddot{x} = -2\dot{x} - 3x = -2x_2 - 3x_1 \quad (34-66)$$

La ecuación de la isoclina, 34-65, produce:

$$\begin{aligned}m &= \text{pendiente de trayectoria} = \frac{\dot{x}_2}{\dot{x}_1} = \frac{-2x_2 - 3x_1}{x_2} = \\ &= -2 - 3 \cdot \frac{x_1}{x_2} = -2 - 3\left(\frac{x}{\dot{x}}\right)\end{aligned}$$

Ahora, $x_1 = x$ será el eje x de la gráfica y $x_2 = \dot{x}_1 = \dot{x}$ será el eje y de la gráfica. Por tanto las razones constantes de x_1/x_2 o x/y corresponden a las rectas que pasan por el origen del plano de fase con pendiente $a = dy/dx = y/x = \dot{x}/x$. El procedimiento más simple consiste en elegir razones enteras de $\dot{x}/x =$ pendiente de las isoclinas a y tabular las pendientes de trayectoria correspondientes que se obtienen al evaluar la ecuación 34-65.

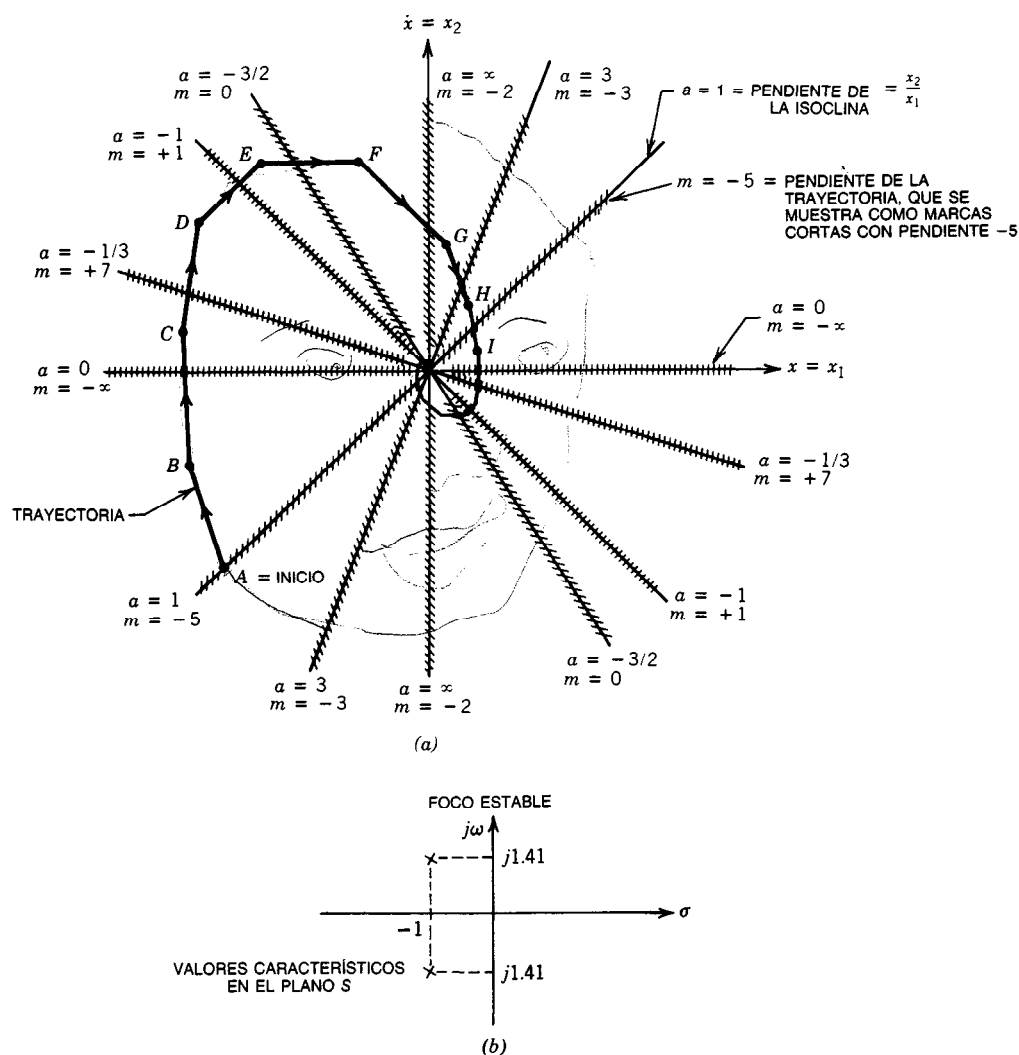


Fig. 34-39. Lugar geométrico isoclinal del ejemplo 34.9. a) Gráfica del plano de fase de $\ddot{x} + 2\dot{x} + 3x = 0$. Las isoclinas son las líneas radiales, con una pendiente a . Las marcas cortas, con una pendiente M , indican la pendiente de la trayectoria en una isoclina específica. Las flechas indican el tiempo creciente, de A a B a C , etc.; b) Valores característicos del plano S , foco estable. $\lambda^2 + 2\lambda + 3 = 0$; $\lambda_1 = -1.0 + j1.41$; $\lambda_2 = -1.0 - j1.41$.

$\dot{x}/x =$ pendiente isoclinal a	x/\dot{x}	$-3(x/x)$	$-2 - 3(x/\dot{x}) =$ pendiente de trayectoria = pendiente de marcas pequeñas = m
0	∞	$-\infty$	$-\infty$
1	1	-3	-5
3	$1/3$	-1	-3
∞	0	0	-2
-3	$-1/3$	+1	-1
$-1/3$	-3	+2	0
-1	-1	+3	+1
$-1/3$	-3	+9	+7

Empleando las pendientes de las isoclinas de a que aparecen en la tabla de al lado y trazando rayas cortas de trayectoria con pendiente m que cruzan las isoclinas, se puede construir la trayectoria de fase de la figura 34-39.

Una vez trazadas las isoclinas y las rayas cortas de trayectoria, la construcción de las trayectorias es un procedimiento relativamente simple.

A partir de una condición inicial especificada, como el punto A , la raya corta de pendiente -5 se extiende más o menos hasta la mitad de la distancia a la siguiente isoclina, el punto B . Después, la pendiente de la trayectoria se desplaza al siguiente valor, $m = -\infty$, y prosigue con una pendiente constante de $-\infty$ de B a C . En C la pendiente de la trayectoria cambia a

$m = +7$ y continúa hacia D . Este proceso genera rápidamente una trayectoria completa, con la condición inicial A .

Es importante destacar que la exactitud de la trayectoria resultante depende de que se utilice la mayor cantidad posible de isoclinas a . Las flechas del tiempo se colocan empleando el método que se analizó junto con la ecuación 34-61.

Un conjunto de trayectorias completo se construye fácilmente repitiendo el proceso con diferentes condiciones iniciales.

Para un sistema no lineal complejo, las isoclinas a menudo son curvas, tales como las parábolas, o son discontinuas, como en el caso de un sistema que cambia a un valor para $x > 0$ y a un valor diferente para $x < 0$. Por ejemplo, considérese un cohete en el espacio. Supóngase que se emplean propulsores de iones hacia adelante y hacia atrás que consumen muy poca masa, de manera que la masa del cohete se mantenga constante en esencia. La ecuación de movimiento del cohete a lo largo de su trayectoria de vuelo en línea recta es:

$$\pm F = MA \quad (34-67)$$

donde M = masa del cohete

$A = \ddot{x}$ = aceleración del cohete

$+F$ = propulsión hacia adelante

$-F$ = propulsión hacia atrás

La trayectoria del cohete en el plano de fase (x, \dot{x}) se deduce para $-F$ en las ecuaciones 34-57 a 34-67 junto con el análisis de la trayectoria de un cohete lanzado que obedece la ecuación idéntica: $-mg = -F = MA$. Las trayectorias para $+F$ son simplemente reflexiones

invertidas respecto al eje \dot{x} , de manera que $+x$ se convierte en $-x$. Esto se muestra en la figura 34-40, que se obtiene de la figura 34-36 agregando una gráfica invertida de $+F$. Es posible pasar de un punto cualquiera en el plano de fase a otro punto cualquiera cambiando de una trayectoria $+F$ (o $-F$) a una trayectoria $-F$ (o $+F$) en el punto apropiado. En la figura 34-40 se muestra una trayectoria de tiempo mínimo como una línea gruesa del punto A (posición x grande, velocidad negativa $-\dot{x}$ grande) al reposo (velocidad 0, posición 0) en el punto C . La conmutación se realiza de la propulsión hacia adelante ($+F$, trayectoria AB) a la propulsión hacia atrás ($-F$, trayectoria BC) en el punto de conmutación B . Para permanecer en reposo en C , la propulsión debe apagarse, $F=0$. Puede demostrarse que dado un sistema no lineal de segundo orden cualquiera, a lo sumo se requiere una conmutación para una trayectoria de tiempo mínimo¹⁷.

Determinación del tiempo de la trayectoria. Es posible determinar el tiempo que se necesita para recorrer un segmento cualquiera de una trayectoria del plano de fase, por ejemplo, el tiempo requerido para ir del punto B al punto C en la figura 34-40. El procedimiento se basa en la siguiente manipulación de las variables del plano de fase:

$$\begin{aligned} \text{eje } y = x_2 = \dot{x}_1 = \dot{x} &= \frac{dx}{dt} \\ \text{eje } x = x_1 = x & \end{aligned} \quad (34-68)$$

$$t_{AB} = \int_A^B dt = \int_A^B \frac{dt}{dx} dx = \int_A^B \frac{1}{x_2} dx_1 = \int_A^B \frac{1}{\dot{x}} dx$$

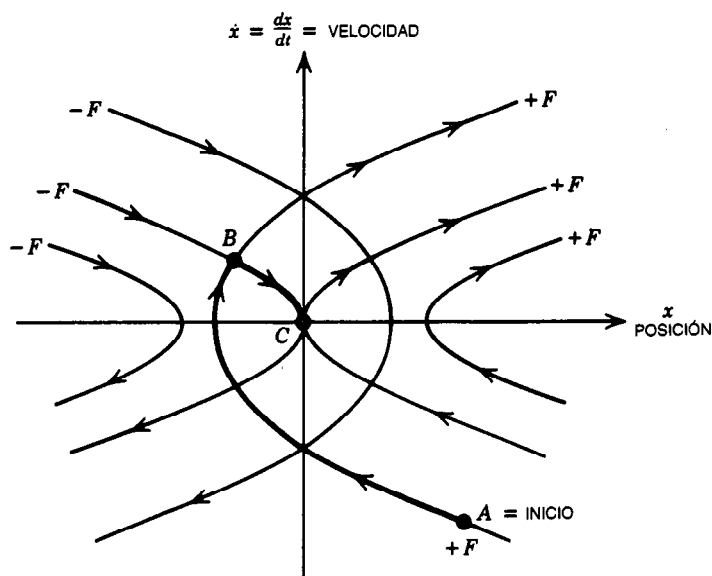


Fig. 34-40. Gráfica del plano de fase de un cohete con propulsores de avance ($+F$) y de retroceso ($-F$). La trayectoria de tiempo mínimo al origen = $A - B - C$. B = punto de conmutación de $+F$ a $-F$.

Para evaluar la integral de la ecuación 34-68 en forma gráfica, se debe construir una nueva gráfica. Se requiere un nuevo eje y igual al recíproco del eje del plano de fase, es decir, $1/\dot{x}$ o $1/\dot{x}$. El eje x se mantiene sin cambios. El área bajo la curva trazada en el eje $(1/\dot{x}, x)$ es igual a la diferencia de tiempo entre los puntos extremos A y B. Ocurre un problema cuando \dot{x} o x_2 tienden a cero, de manera que los recíprocos $1/\dot{x}$ o $1/x_2$ tienden a infinito. La solución consiste en limitar la proximidad de la tendencia a cero a algún valor formalmente finito (p. ej., entre el 1 y el 10% del intervalo total). Si un área gráfica se divide en 10 a 20 regiones con un incremento igual del eje x , el problema se evita con facilidad. En la figura 34-41 se da un ejemplo de esto.

34.9.3 Método de la función descriptora

Quizá el método más directo para trabajar con sistemas no lineales implica la aproximación de los sistemas no lineales por medio de un sistema lineal. La utilidad de este método es directamente proporcional a aquella cantidad del rendimiento del sistema atribuible a la parte lineal de éste. Dicho método funciona bien para sistemas que sólo son ligeramente no lineales, en los que quizá el 75% o más de la señal de salida se relaciona en forma lineal con la entrada. Cuando se relaciona de esta manera menos de la mitad de la salida del sistema, una aproximación de linealización resulta muy deficiente y por lo general no vale la pena intentarla.

El método de la función descriptora, un método directo, es una posible aproximación lineal a un sistema no lineal. Una senoide de amplitud, frecuencia y fase arbitrarias se aplica como entrada a la no linealidad. La fase arbitraria suele elegirse como cero grados, de manera que la función de entrada es:

$$R(t) = R \sin(\omega_0 t + \theta_r) \quad (34-69)$$

donde θ_r = fase de $R(t)$ (por lo general 0°)

R = magnitud de $R(t)$

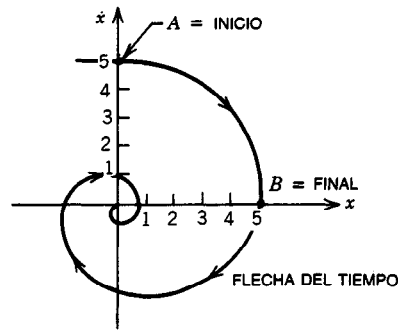
ω_0 = frecuencia de $R(t)$

Entonces puede obtenerse la salida de estado estable del sistema $C(t)$. $C(t)$ será por lo general una función no lineal no sinusoidal de $R(t)$, con comportamiento periódico de estado estable. Después, esta salida no sinusoidal se divide en una suma infinita de sinusoides, mediante el desarrollo en serie de Fourier. Todos los términos se descartan, salvo el término fundamental de frecuencia ω_0 ; por tanto:

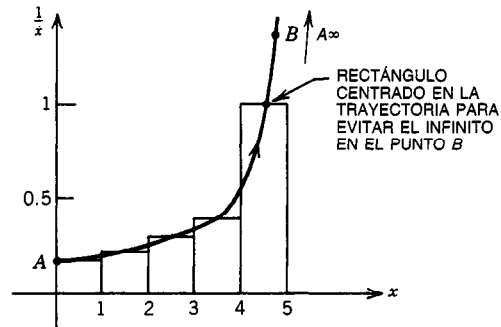
$$C(t) = C_0 + C_1 \sin(\omega_0 t + \phi_1) + C_2 \sin(2\omega_0 t + \phi_2) + \dots$$

$$C(t) \cong C_1 \sin(\omega_0 t + \phi_1)$$

La función descriptora se define como la razón de la componente de frecuencia fundamental de la señal de salida sobre la señal de entrada (que sólo tiene una componente fundamental). Analíticamente, la función descriptora se define por medio de la siguiente relación:



(a)



(b)

Fig. 34-41. Determinación del tiempo a partir de una gráfica del plano de fase \dot{x} recíproco:

a) Gráfica del plano de fase ordinario. Para determinar el tiempo de A a B se encuentra $1/\dot{x}$ y se grafica en función de x .

x	\dot{x}	$1/\dot{x}$
0	5	0.20
1	4.8	0.21
2	4.2	0.24
3	3.4	0.29
4	2	0.50
5	0	∞
4.5	1	1

b) Gráfica del plano de fase recíproco. Tiempo = área bajo $1/\dot{x}$ en función de la gráfica de x . $\int (1/\dot{x}) dx = \int (1/(dx/dt)) dx = \int (dt/dx) dx = \int dt = t$.

Rectángulo	Altura	Área
1	$1/4.9$	0.204
2	$1/4.5$	0.222
3	$1/3.8$	0.263
4	$1/2.7$	0.370
5	$1/1$	1.00

Obsérvese que se excluyen $x = 5$, $\dot{x} = 0$, $1/\dot{x} = \infty$. El punto medio $x = 4.5$, $\dot{x} = 1$, $1/\dot{x} = 1$ se utiliza para la altura del rectángulo entre $x = 4$ y $x = 5$. El área total de A a B = $0.204 + 0.222 + 0.263 + 0.370 + 1.00 = 2.06$ s. Las unidades de x y \dot{x} deben ser homogéneas; es decir, si x se expresa en metros, entonces \dot{x} se debe expresar en metros por segundo.

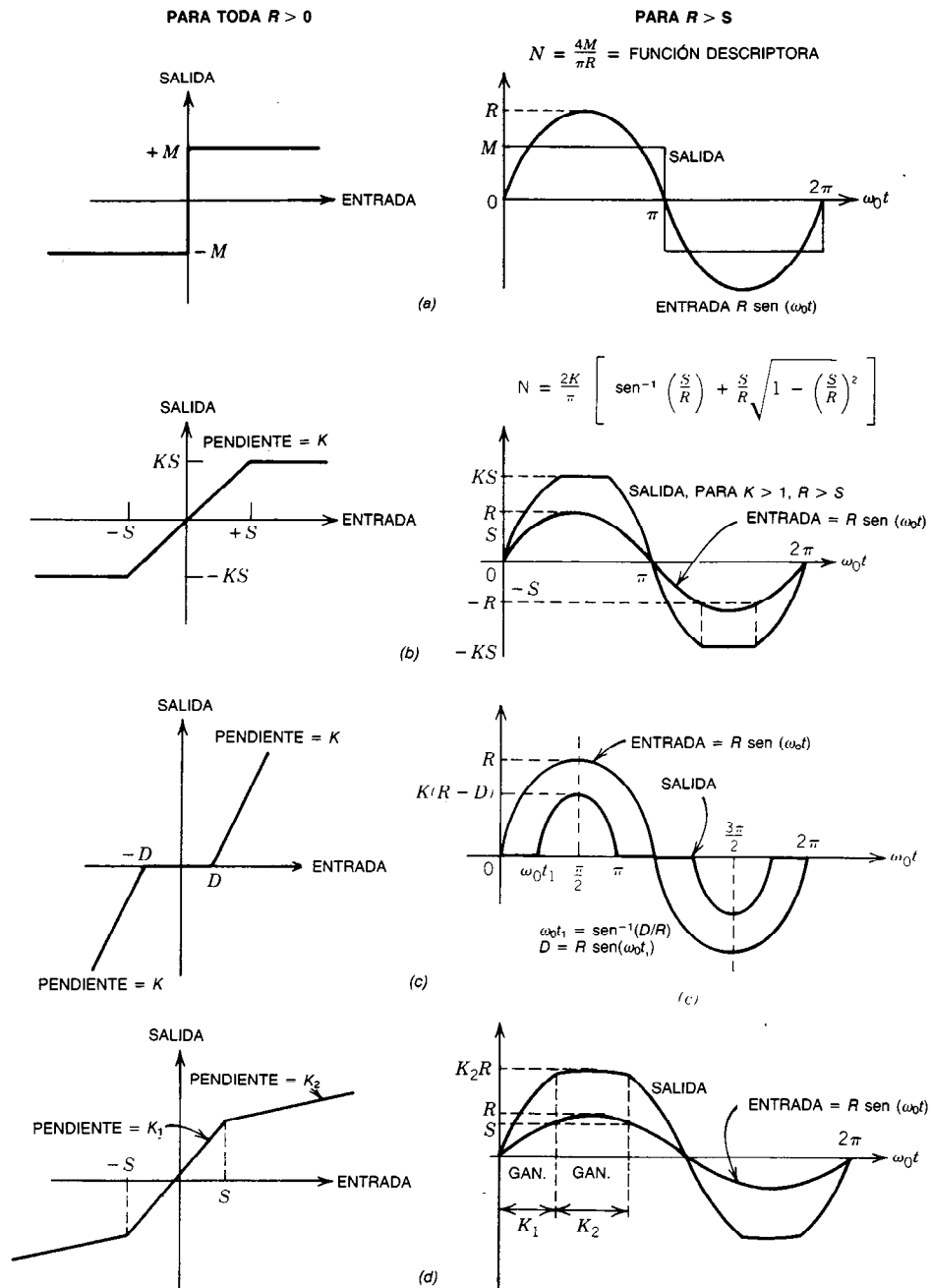


Fig. 34-42. Funciones descriptoras N para algunas no linealidades comunes con una función impulsora de entrada sinusoidal de $R \sin(\omega t)$. En general, N es una función de la magnitud de entrada R y la frecuencia de entrada ω_0 : $N = N(R, \omega_0)$. Sin embargo, para las cuatro no linealidades que se tabulan, N es solamente función de R : $N = N(R)$. a) Función de conmutación. M = magnitud de salida, R = magnitud de entrada, $R \sin(\omega_0 t)$ = función de entrada. b) Saturación. S = nivel de saturación de entrada, R = magnitud de entrada, KS = nivel de salida máximo. Obsérvese que si $R > S$ o $S/R > 1$, no existe saturación y $N = K$. c) Zona muerta. D = magnitud de entrada de la zona muerta, R = magnitud de entrada. $N = K - (2K/\pi) [\sin^{-1}(D/R) + (D/R) \sqrt{1 - (D/R)^2}]$. Nótese que si $R < D$ o $D/R > 1$, la salida es cero y $N = 0$. d) Ganancia alta o baja. S = magnitud de la conmutación de la ganancia de entrada, R = magnitud de entrada, K_1 = ganancia alta, K_2 = ganancia baja. GAN. = ganancia. Para $R > S$, $N = K_2 + [2(K_1 - K_2)/\pi] [\sin^{-1}(S/R) + (S/R) \sqrt{1 - (S/R)^2}]$. Obsérvese que si $R < S$ o $S/R > 1$, la ganancia no conmuta y $N = K_1$. Dibujado en base a los datos de Ogata⁶.

$$\text{Fn Des} = N = \frac{C_1 e^{j\phi_1}}{R e^{j\theta r}} = \frac{C_1}{R} e^{j(\phi_1 - \theta r)} \quad (34-70)$$

Si θ , se elige como cero, entonces:

$$\text{Fn Des} = N = \frac{C_1}{R} e^{j\phi_1} \quad (34-71)$$

La función descriptora es un número complejo de magnitud C_1/R y con fase de ϕ_1 grados. En general, C_1 está en función de R y de diversos parámetros del sistema.

En la figura 34-42 se presentan algunas no linealidades comunes y las funciones descriptoras correspondientes. Para utilizar una función descriptora, la no linealidad se sustituye por la ganancia y las fases complejas dadas por aquella función.

Para ilustrar el procedimiento de obtención de una función descriptora, en el ejemplo 34.10 se genera la función descriptora de una no linealidad de conmutación o de relevador (fig. 34-43a).

Ejemplo 34.10. Evaluación de la función descriptora de una no linealidad de conmutación. Recordando la ecuación 34-71 y observando la figura 34-43, se tiene la expresión:

$$\text{Fn Des} = \frac{C_1}{R} e^{j\phi_1} \quad (34-71)$$

De las reglas para la combinación de sinusoides:

$$C_1 = \sqrt{A_1^2 + B_1^2} \quad (34-72)$$

$$\phi_1 = \tan^{-1} \frac{A_1}{B_1} \quad (34-73)$$

En base a las ecuaciones del coeficiente de un desarrollo en serie de Fourier, se tiene que:

$$B_n = 2c(t) \sin(n\omega_0 t) \quad f(t) = \text{valor promedio de } f(t) \quad (34-74)$$

$$A_n = 2c(t) \cos(n\omega_0 t) \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (34-75)$$

Los números 2 son necesarios debido a que el valor promedio de $\sin^2 x$ o $\cos^2 x$ es $1/2$, puesto que $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$. El término de frecuencia de CD o término de frecuencia cero es un caso especial dado por $A_0/2$. Como sólo se necesitan A_1 y B_1 , descartando todos los armónicos superiores y haciendo $n = 1$:

$$B_1 = 2c(t) \sin(\omega_0 t) = 2 \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} c(t) \sin(\omega_0 t) d(\omega_0 t) \quad (34-76)$$

$$A_1 = 2c(t) \cos(\omega_0 t) = 2 \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} c(t) \cos(\omega_0 t) d(\omega_0 t) \quad (34-77)$$

Como la salida $c(t)$ está en fase en el tiempo con la senoide de entrada y presenta todas las simetrías de

una onda senoidal, $c(t)$ tendrá sólo componentes de onda senoidal en su desarrollo en serie de Fourier. Esto ocurre porque el valor promedio de una onda senoidal y una onda cosenoidal de frecuencias idénticas o diferentes y cero defasamiento siempre es cero. Analíticamente, $c(t)$ es una función impar; es decir, $c(-t) = -c(t)$. Para una función impar cualquiera, el desarrollo en serie de Fourier contendrá sólo términos seno, que también son funciones impares.

Por tanto, $A_1 = 0$, ya que no hay términos coseno en el desarrollo de la función impar $c(t)$. Al evaluar B_1 mediante la sustitución formal de los valores gráficos de $c(t)$ de la figura 34-43c en la ecuación 34-76, se obtiene:

$$B_1 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} c(t) \sin(\omega_0 t) d(\omega_0 t) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi M \sin(\omega_0 t) d(\omega_0 t) + \frac{1}{\pi} \int_\pi^{2\pi} -M \sin(\omega_0 t) d(\omega_0 t) \quad (34-78)$$

Integrando [para lo cual se recurre a la identidad $\int \sin(ax) d(ax) = -\cos(ax)$]:

$$B_1 = \frac{1}{\pi} [-M \cos(\omega_0 t)]_0^\pi + -\frac{1}{\pi} [-M \cos(\omega_0 t)]_\pi^{2\pi} \quad (34-79)$$

Evaluando los límites de la variable ($\omega_0 t$):

$$B_1 = \frac{-M}{\pi} [\cos(\pi) - \cos(0)] + \frac{M}{\pi} [\cos(2\pi) - \cos(\pi)] \quad (34-80)$$

$$B_1 = \frac{-M}{\pi} [-1 - 1] + \frac{M}{\pi} [1 - -1] = \frac{4M}{\pi}$$

En este caso más bien especial, B_1 resulta independiente de la magnitud de la función impulsora de la entrada R . Por lo general esto no sucede. Además, como no hay un término A_1 , el ángulo de defasamiento ϕ_1 es cero, ya que $\tan^{-1}(A_1/B_1) = \tan^{-1}(0) = 0$ (en la ec. 34-73).

Por tanto, insertando la ecuación 34-80 en la 34-72 se obtiene:

$$C_1 = \sqrt{A_1^2 + B_1^2} = \sqrt{0 + B_1^2} = B_1 = \frac{4M}{\pi} \quad (34-81)$$

Finalmente, la función descriptora N se evalúa a partir de la ecuación 34-71:

$$N = \frac{C_1}{R} e^{j\phi} = \frac{4M/\pi}{R} e^{j0} = \frac{4M}{\pi R} \quad (34-82)$$

ya que $e^{j0} = e^0 = 1$

En resumen, la función descriptora que se acaba de determinar, y todas las funciones descriptoras que se

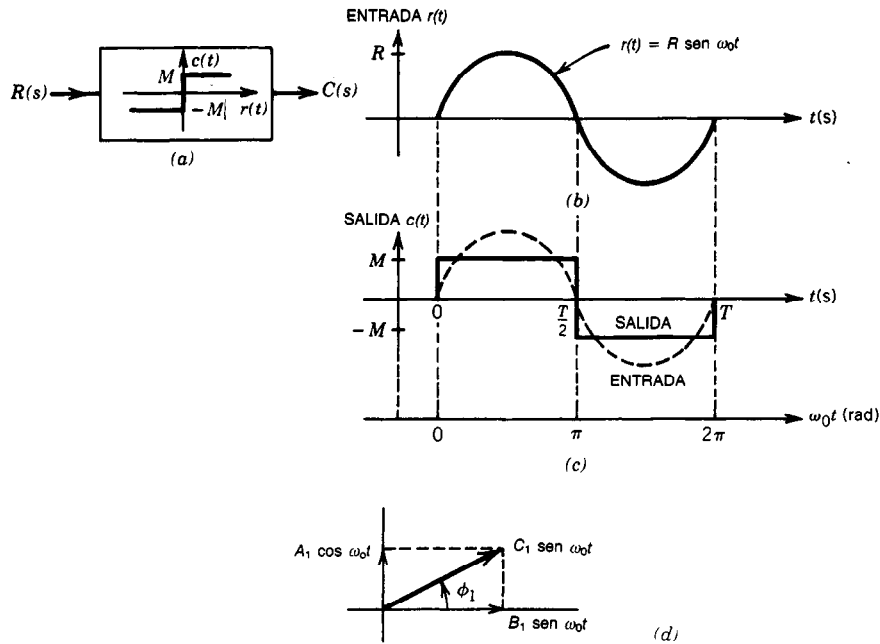


Fig. 34-43. Evaluación de la función descriptora de no linealidad de conmutación. Véase el ejemplo 34.10. *a)* Bloque que contiene una no linealidad de conmutación con una magnitud de salida M . *b)* Entrada a la no linealidad. *c)* Salida de la no linealidad. *d)* Combinación de vectores.

citan en la figura 34-42, son valores complejos que tienen magnitud y fase. Relacionan la componente lineal (fundamental) de la salida de un sistema no lineal con una función impulsora de la entrada sinusoidal lineal.

En términos generales son funciones de la magnitud y la frecuencia de la entrada sinusoidal.

Un sistema lineal produce una salida sinusoidal de frecuencia idéntica pero magnitud y fase diferentes cuando es impulsado por una entrada sinusoidal. La magnitud y la fase del sistema lineal se obtienen sustituyendo formalmente $j\omega_0$ por la variable S en la función de transferencia de ciclo cerrado del sistema $G(s)$, donde ω_0 es la frecuencia de entrada aplicada. Por otra parte, un sistema no lineal puede producir una frecuencia cero (o una salida de CD) así como una gran cantidad de salidas de frecuencia armónica, además de la salida de la componente fundamental (o frecuencia lineal).

La función descriptora es simplemente la razón de la componente de frecuencia fundamental linealmente relacionada de la salida sobre la función impulsora de la entrada sinusoidal. Se desprecian todas las componentes de frecuencia superior o inferior de la salida no lineal.

Estabilidad de un sistema no lineal. Una de las principales aplicaciones del método de la función descriptora es la predicción de la estabilidad del sistema. Considérese el sistema de la figura 34-44, que contiene un elemento no lineal N , un amplificador que se satu-

ra con voltajes de entrada mayores de $\pm S$ volts, en serie con una planta lineal $G(s)$. La ecuación característica del sistema es:

$$1 + NG = 0 \quad (34-83)$$

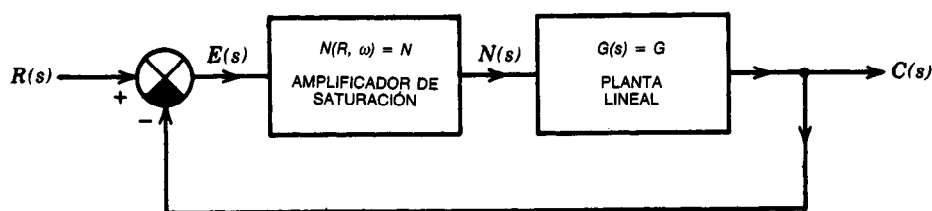
o, de manera equivalente:

$$G = \frac{-1}{N} \quad (34-84)$$

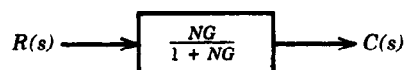
o bien, especificando los argumentos:

$$G(j\omega) = \frac{-1}{N(R, \omega)} \quad \text{con } s \rightarrow j\omega \quad (34-85)$$

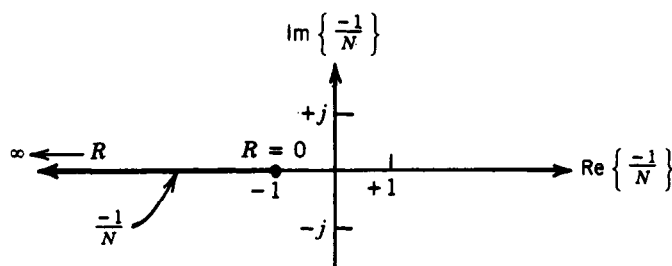
La ecuación 34-85 puede emplearse directamente para verificar la estabilidad de un sistema no lineal de la forma que se muestra en la figura 34-44 y para determinar cualquier frecuencia de oscilación posible. El método es directo. Se traza una gráfica de $G(j\omega)$ en coordenadas rectangulares (real e imaginaria) en función de ω (fig. 34-44d). Éste es idéntico al procedimiento de la gráfica de Nyquist. Sin embargo, en vez de revisar si el punto $(-1 + j0)$ está encerrado en un círculo, la prueba se convierte en una revisión para establecer si el lugar geométrico o la gráfica de $1/N$, trazados sobre los mismos ejes, son cortados por la gráfica de $G(j\omega)$. Si las dos gráficas se intersectan, el sistema es inestable con un ciclo límite de frecuencia aproximadamente igual a la frecuencia de $G(j\omega)$ en el punto de



(a)



(b)



(c)

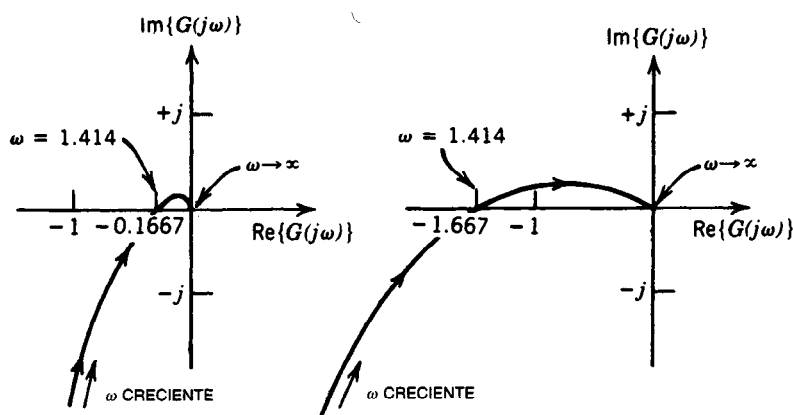
CASO 1
GRÁFICA PARA $K = 1$ CASO 2
GRÁFICA PARA $K = 10$

Fig. 34-44. Estabilidad de un sistema de control no lineal, con ejemplos de la existencia de un ciclo límite estable y de la ausencia de ciclo límite. $N = N(R, \omega)$ = función descriptora del elemento no lineal; $G = G(s)$ = planta o ganancia lineal en sentido directo; $s = j\omega$ para gráficas; $R(s)$ = entrada al sistema; $C(s)$ = salida del sistema; $E(s)$ = señal de error = entrada a la no linealidad; $N(s)$ = salida de la no linealidad; S = nivel de saturación de no linealidad, una constante.

a) Diagrama de bloques.

b) Función de transferencia de ciclo cerrado equivalente.

c) Gráfica de no linealidad de saturación, expresada como $-1/N$, en el plano complejo. En este caso, $N(R, \omega) = N(R)$; es decir, N no es función de ω . Véase la figura 34-42b. Para la saturación, $N = N(R) = 2K/\pi[\sin^{-1}(s/R) + s/R\sqrt{1-(s/R)^2}]$.

d) Gráfica de $G(j\omega)$ en el plano complejo. Sea $G(s) = K/[s(s+1)(s+2)]$ = planta lineal.

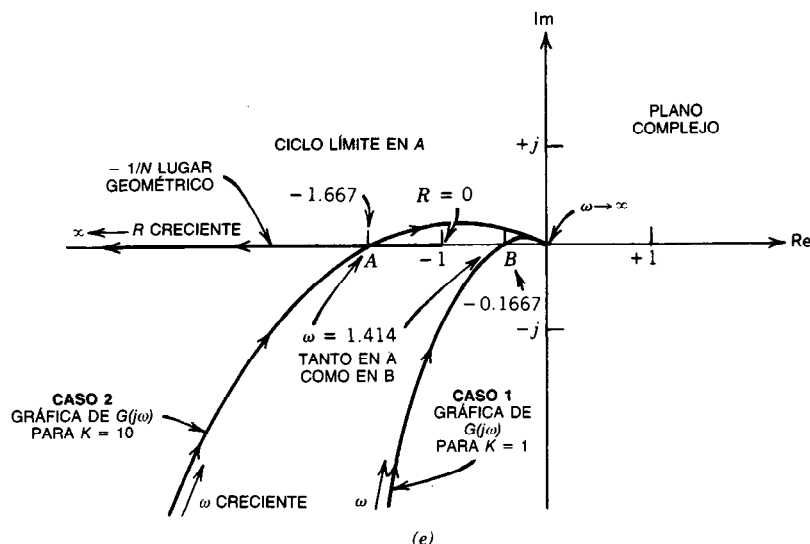


Fig. 34-44 (cont.). Estabilidad de un sistema de control no lineal.

e) Gráfica combinada de $-1/N$ y $G(j\omega)$ para $K=1$ y $K=10$. $N = N(R, \omega) = N(R)$ es la función descriptora de una no linealidad de saturación. R = magnitud de la entrada del sistema, $R \sin(\omega t)$. El punto A ($K=10$) denota la intersección del lugar geométrico $-1/N$ y el lugar geométrico $G(j\omega)$ en $\omega = 1.414$, lo que indica la existencia de un ciclo límite. La topología de la intersección indica que el ciclo límite es estable. (Véase la fig. 34-45). El punto B ($K=1$) denota la ausencia de un ciclo límite; no hay intersección ni ciclo límite. El sistema es estable para $K=1$, ya que el punto $-1 + j0$ no está encerrado por el lugar geométrico $G(j\omega)$.

intersección. Esta intersección (en el punto A) se muestra en la figura 34-44e para $K=10$. Obsérvese que cuando K disminuye a 1, la intersección ya no ocurre y el sistema se vuelve estable.

El ciclo límite para $K=10$ puede exhibir oscilaciones sostenidas o puede desviarse, según la dirección del lugar geométrico $-1/N(R, \omega)$ cuando cruza el lugar geométrico $G(j\omega)$. Esto se ilustra en la figura 34-45, que indica que el ciclo límite de la figura 34-44 es estable.

Si los lugares geométricos $G(j\omega)$ y $-1/N(R, \omega)$ se intersecan a un ángulo muy pequeño o son tangentes en algún punto, probablemente la exactitud de la prueba sea deficiente. Sin embargo, esto último no ocurre si se sabe que las componentes de alta frecuencia de la salida no lineal se atenúan rápidamente. En uno u otro caso, cuando los lugares geométricos $G(j\omega)$ y $-1/N(R, \omega)$ se intersecan en un ángulo pequeño, los resultados de la prueba deben confirmarse por otro método de análisis de la estabilidad de un sistema no lineal o mediante la simulación del sistema no lineal.

Ogata⁶, Shinnars⁸, Gibson¹⁷ y Graham y McRuer¹⁸ analizan las funciones descriptoras con mayor detalle.

34.9.4 Criterio de estabilidad de Liapunov

La obra de Liapunov (o Lyapunov) *On the general problem of stability of motion* fue editada en ruso por Kharkov en 1892. Fueron necesarios casi 50 años para que el método de Liapunov adquiriera aceptación a nivel mundial.

El criterio de estabilidad de Liapunov difiere en el enfoque fundamental de todas las otras pruebas de estabilidad en que esta última se determina a partir de una medición de la tasa de cambio de la energía. Se puede aplicar a sistemas lineales y no lineales, pero como las pruebas de estabilidad de sistemas lineales estándares producen otra información significativa, como el grado de estabilidad, el criterio de estabilidad de Liapunov se ha identificado con la determinación de la estabilidad de sistemas no lineales.

Base fundamental del criterio de estabilidad de Liapunov. Se puede explicar de la siguiente forma intuitiva. Considérese un sistema mecánico que impulsa de alguna manera una masa en respuesta a una señal de control. La masa en movimiento tiene una energía cinética $1/2 m V^2$. Si esta energía aumenta de manera uniforme hacia el infinito, la velocidad de la masa también aumenta hacia el infinito y el sistema es inestable. La derivada de la energía cinética con respecto al tiempo de este sistema mecánico es positiva, ya que la energía cinética aumenta con el tiempo. Por otra parte, si la derivada de la energía cinética con respecto al tiempo siempre es negativa, la energía cinética siempre disminuye hacia cero y el sistema es estable porque la velocidad de la masa también decrece hacia cero.

La energía cinética no puede volverse negativa, puesto que es una función de una variable elevada al cuadrado, V^2 . Una función como $1/2 m V^2$, que siempre es positiva y puede ser cero sólo cuando su argumento V es cero, se denomina función positiva definida.

Base de la prueba de estabilidad de Liapunov. Consiste en determinar una función llamada de Liapunov $V(x)$ que sea una función positiva definida de una variable de estado del sistema (x) y después obtener la derivada con respecto al tiempo de esa función. Si la derivada es negativa, el sistema es estable.

El procedimiento real implica cierta terminología especializada y en él se consideran tipos de estabilidad. La terminología, que se puede dominar sin dificultad, se presenta en la tabla 34-28. Sin embargo, un factor fundamental complica la aplicación de la prueba de Liapunov y no se puede obviar. La dificultad reside en la elección de la función de Liapunov positiva definida. Se puede elegir una función positiva definida arbitraria, con coeficientes arbitrarios.

En el ejemplo intuitivo que se acaba de analizar, donde $1/2mV^2$ fue la función de Liapunov, se habría podido elegir una infinidad de otras funciones, como $4mV^6$ o $1/16V^8$ (donde $V = x_1 =$ una variable de estado). El procedimiento consiste en escoger una función después de la otra o generar de algún modo una función de Liapunov, trabajando de manera retrospectiva a partir de una función generalizada $dV(x)/dt$ que es negativa definida.

Habitualmente, una función de Liapunov positiva definida tiene forma cuadrática que contiene todas las variables de estado elevadas al cuadrado y ninguno, algunos o todos los posibles términos producto cruz.

Funciones de Liapunov de forma cuadrática

$$V(x) = X^T A X, X = x_1, x_2, x_3, \dots$$

$$V_1(x_1, x_2) = 2x_1^2 + x_2^2 = [x_1 x_2] \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \quad (34-86)$$

$$V_2(x_1, x_2) = x_1^2 + Kx_1x_2 + 4x_2^2 = [x_1 x_2] \begin{bmatrix} 1 & \frac{K}{2} \\ \frac{K}{2} & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \quad (34-87)$$

$$V_3(x_1, x_2) = 2x_1^2 + 10x_1x_2 + 3x_2^2 = [x_1 x_2] \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 5 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \quad (34-88)$$

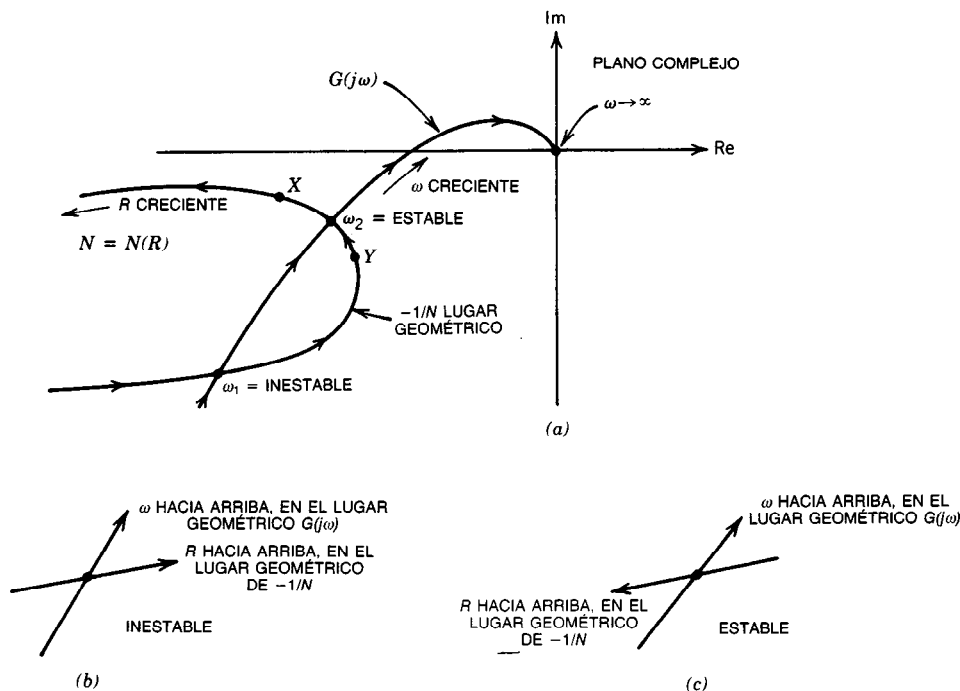


Fig. 34-45. Determinación de ciclos límite estables e inestables a partir de las intersecciones de los lugares geométricos $G(j\omega)$ y $-1/N$. a) Gráfica en el plano complejo. b) Intersección inestable. c) Intersección estable. El lugar geométrico $-1/N$ hace el papel del punto $(-1 + j0)$ en la prueba de la estabilidad de Nyquist. Considérese el punto Y . Está circundado por el lugar geométrico $G(j\omega)$; por tanto es "estable" y crecerán las amplitudes de las señales (R). Conforme crece R , la operación en el lugar geométrico $-1/N$ se mueve al punto ω_2 . Ahora considérese el punto X . Éste no está encerrado por el lugar geométrico $G(j\omega)$, por lo que es "inestable" y las amplitudes de las señales decrecerán. Conforme decrece R , la operación en el lugar geométrico $-1/N$ se mueve al punto ω_2 . Por tanto, ω_2 corresponde a un ciclo límite estable, ya que las perturbaciones alejadas de ω_2 se devuelven a ω_2 . A la inversa, ω_1 corresponde a un ciclo límite inestable, por un razonamiento análogo. Obsérvese que ω_1 y ω_2 son sólo frecuencias aproximadas del ciclo límite, dependiendo de la idoneidad de la aproximación de la función descriptora a la no linealidad real.

$$V_4(x_1, x_2, x_3) = \{x_1^2 + 4x_1x_2 + 3x_2^2 + 12x_1x_3 + 5x_3^2 + 6x_2x_3\} = [x_1, x_2, x_3] \begin{bmatrix} 1 & 2 & 6 \\ 2 & 3 & 3 \\ 6 & 3 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \quad (34-89)$$

$$V_5(x_1, x_2) = 7x_1^2 = [x_1, x_2] \begin{bmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \quad (34-90)$$

Una forma cuadrática puede ser positiva definida, positiva semidefinida o de signo indefinido si los coeficientes de los términos elevados al cuadrado son positivos (véase la tabla 34-28). Si estos coeficientes son negativos, la forma cuadrática puede ser negativa definida, negativa semidefinida o de signo indefinido.

Una prueba directa (criterio de Sylvester) determina la definición del signo de una forma cuadrática en términos de la representación en forma de matriz simétrica ($a_{ij} = a_{ji}$) de la forma cuadrática (ecs. 34-86 a 34-90). La prueba consiste en evaluar los menores principales ($\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3, \dots$) de la matriz de coeficientes de la forma cuadrática. Los menores principales son de 1×1 , 2×2 , 3×3 , ..., comenzando en el término a_{11} y descendiendo a lo largo de la diagonal principal para agregar el término a_{22} y después el término a_{33} , hasta que el determinante de toda la matriz pasa a ser el último menor principal. Si los menores principales son mayores que cero, la forma cuadrática es positiva definida.

$$A_e = \begin{bmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \Delta_1 = |7| = 7 > 0$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 7(0) - 0(0) = 0$$

\therefore positiva semidefinida (todo $\Delta \geq 0$)

(34-96)

$$A_f = \begin{bmatrix} -7 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \Delta_1 = |-7| = 7 < 0$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} -7 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = -7(0) - 0(0) = 0$$

\therefore negativa semidefinida (todo $\Delta \leq 0$)

(34-97)

Es posible generar una matriz A que siempre produzca una forma cuadrática positiva definida, eligiendo una matriz cuadrada D con coeficientes positivos y evaluando:

$$A = D^T D \quad (34-98)$$

Por ejemplo, si se elige:

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$$

entonces:

$$A = D^T D = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 11 \\ 11 & 25 \end{bmatrix} \quad (34-99)$$

Forma cuadrática

$$x^T A x \quad (34-91)$$

$$A_a = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \Delta_1 = |2| = 2 \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 2(1) - 0(0) = 2$$

$\Delta_1 > 0 \quad \Delta_2 > 0 \quad \therefore$ positiva definida (todo $\Delta > 0$)

(34-92)

$$A_b = \begin{bmatrix} 1 & \frac{K}{2} \\ \frac{K}{2} & 4 \end{bmatrix} \quad \Delta_1 = |1| = 1 \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & \frac{K}{2} \\ \frac{K}{2} & 4 \end{vmatrix} = 1(4) - \frac{K}{2}\left(\frac{K}{2}\right) = 4 - \frac{K_2}{4} \quad (34-93)$$

Si $K < 4$:

$$\Delta_1 > 0 \quad \Delta_2 > 0 \quad \therefore \text{positiva definida si } K < 4$$

$$A_c = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 5 & 3 \end{bmatrix} \quad \Delta_1 = |2| = 2 \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} = 2(3) - 5(5) = -19$$

$\Delta_1 > 0 \quad \Delta_2 < 0 \quad \therefore$ de signo indefinido (algunos Δ son > 0 , otros son < 0)

(34-94)

$$A_d = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 6 \\ 2 & 3 & 3 \\ 6 & 3 & 5 \end{bmatrix} \quad \Delta_1 = |1| = 1 > 0$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 1(3) - 2(2) = -1 < 0$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 6 \\ 2 & 3 & 3 \\ 6 & 3 & 5 \end{vmatrix} = 1(3)5 + 2(3)6 + 6(2)3 - 6(3)6 - 3(3)1 - 5(2)2 = -50 < 0 \quad (34-95)$$

\therefore signo indefinido

La forma cuadrática asociada con la matriz x de la ecuación 34-99 es positiva definida; esta afirmación puede demostrarse mediante la aplicación del criterio de Sylvester:

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 11 \\ 11 & 25 \end{bmatrix} \quad \Delta_1 = |5| = 5 > 0$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 5 & 11 \\ 11 & 25 \end{vmatrix} = 5(25) - 11(11) = 4 > 0$$

\therefore positiva definida (todo $\Delta_i > 0$)

Ejemplo 34.11. Determinar si la siguiente forma cuadrática es negativa definida:

$$V_1(x_n) = -x_1^2 - 5x_2^2 - 10x_3^2 + 2x_1x_2 - 4x_2x_3 - 6x_1x_3$$

Procedimiento. Se demuestra que $-V(x_n)$ es positiva definida:

$$-V_1(x_n) = x_1^2 + 5x_2^2 + 10x_3^2 - 2x_1x_2 + 4x_2x_3 + 6x_1x_3$$

La forma cuadrática se puede escribir como una matriz simétrica:

$$-V_1(x_n) = [x_1 x_2 x_3] \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ -1 & 5 & 2 \\ 3 & 2 & 10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = x^T A x$$

Aplicando el criterio de Sylvester a A , se obtienen las expresiones:

$$\Delta_1 = |1| = 1 > 0$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} = 1(5) - (-1)(-1) = 4 > 0$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ -1 & 5 & 2 \\ 3 & 2 & 10 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 1(5)10 + (-1)(2)3 + 3(-1)(2) \\ -3(5)3 - 2(2)1 - 10(-1)(-1) \end{vmatrix} = -21 < 0$$

Como Δ_1 y $\Delta_2 > 0$ pero $\Delta_3 < 0$, la forma cuadrática es de signo indefinido. Repitiendo la prueba para:

$$V_2(x_n) = -7x_1^2 - 5x_2^2 - 10x_3^2 + 2x_1x_2 - 4x_2x_3 - 6x_1x_3$$

$$-V_2(x_n) = 7x_1^2 + 5x_2^2 + 10x_3^2 - 2x_1x_2 + 4x_2x_3 + 6x_1x_3$$

$$-V_2(x_n) = [x_1 x_2 x_3] \begin{bmatrix} 7 & -1 & 3 \\ -1 & 5 & 2 \\ 3 & 2 & 10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

$$\Delta_1 = |7| = 7 > 0$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 7 & -1 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} = 7(5) - (-1)(-1) = 34 > 0$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 7 & -1 & 3 \\ -1 & 5 & 2 \\ 3 & 2 & 10 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 7(5)10 + (-1)(2)3 + 3(-1)2 \\ -3(5)3 - 2(2)7 - 10(-1)(-1) \end{vmatrix} = 225 > 0$$

Dado que todos los términos Δ_i son mayores que cero, $-V_2(x_n)$ es positiva definida, y $V_2(x_n)$ es por tanto negativa definida.

Ejemplo 34.12. Determinar la estabilidad en el origen del siguiente sistema lineal:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

Multiplicando:

$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$\dot{x}_2 = -2x_1 - 3x_2$$

Como consecuencia de que el sistema es lineal, la siguiente función de energía de Liapunov resulta la elección apropiada:

$$V(x_n) = a_1 x_1^2 + a_2 x_2^2 \quad a_1, a_2 > 0$$

Entonces:

$$\dot{V}(x_n) = \frac{\partial V}{\partial x_1} \dot{x}_1 + \frac{\partial V}{\partial x_2} \dot{x}_2 \quad \text{(Derivada respecto al tiempo de la función de Liapunov, tabla 34-28)}$$

Sustituyendo $\partial V/\partial x_1$, y $\partial V/\partial x_2$:

$$\dot{V}(x_n) = (2a_1 \dot{x}_1) \dot{x}_1 + (2a_2 \dot{x}_2) \dot{x}_2$$

Sustituyendo \dot{x}_1 , y \dot{x}_2 :

$$\dot{V}(x_n) = (2a_1 x_1) x_2 + (2a_2 x_2)(-2x_1 - 3x_2)$$

Multiplicando:

$$\dot{V}(x_n) = 2a_1 x_1 x_2 - 4a_2 x_1 x_2 - 6a_2 x_2^2$$

Se requiere que $a_2 > 0$ y $2a_1 x_1 x_2 - 4a_2 x_1 x_2 = 0$. Por tanto, $a_2 > 0$ y $a_1 = 2a_2$.

Si se elige $a_2 = 1$, entonces $a_1 = 2$ y el resultado es $\dot{V}(x_n) = -6(1)x_2^2 = -6x_2^2$ = negativa semidefinida, ya que x_1 no está presente.

Sin embargo, es posible demostrar que $\dot{V}(x_n)$ sólo puede hacerse cero en el origen $x_1 = x_2 = 0$ y por tanto, por el teorema IV de la tabla 34-28, el sistema es asintóticamente estable. Esto también se cumple en general debido a que $V(x_n) \rightarrow \infty$ cuando $\|x_n\| \rightarrow \infty$ (teorema II).

Para ilustrar el hecho de que $\dot{V}(x_n)$ sólo puede hacerse cero en el origen, examínese $V(x_n) = -6x_2^2$. Si $\dot{V}(x_n)$ fuese idénticamente cero todo el tiempo, enton-

Tabla 34-28. Criterio de estabilidad de Liapunov, definición de términos

Término	Definición
Ecuación del sistema	$\dot{x}_n = f_n(x_n t)$ (donde $\dot{x} \equiv dx/dt$, t = tiempo) $\dot{x}_n = \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} \quad f_n = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_n \end{bmatrix} \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$
Vector de estado	X_n , vector n -dimensional
Función de ecuaciones del sistema	f_n , vector n -dimensional cuyos elementos son funciones de x_1, x_2, \dots, x_n y t
Punto de equilibrio	$f_n(x_n, t) = 0^a$; todas las derivadas son iguales a cero y todas las variables de estado son constantes en el punto de equilibrio
Sistema lineal invariante en el tiempo	$\dot{x}_n = A \cdot x_n$ o bien $f_n(x_n, t) = A \cdot x_n$; es decir, la función del sistema consta de un arreglo de constantes
Función de Liapunov	$V(x_n, t)$ o $V(x_n)$ si el tiempo no es una variable explícita, que es el caso usual. La función de Liapunov debe ser: a. Positiva definida b. Escalar [sólo hay una ecuación $V(X_n, T)$ que cuando se evalúa produce un solo número escalar] c. Diferenciable, hasta el grado de que tenga primeras derivadas parciales continuas
Global	La función de Liapunov puede ser global o extenderse en todo el espacio de estados, si $V(x_n, t) \rightarrow \infty$ cuando $\ X_n\ \rightarrow \infty$
Norma	$\ X_n\ = (x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2)^{1/2} = (x_n^T x_n)^{1/2}$ (x_n^T = transpuesta de x_n)
Derivada respecto al tiempo de la función de Liapunov	$\dot{V}(x_n, t) = \dot{V}(x_n) = \frac{dV(x_n)}{dt}$ $\frac{dV}{dt} = \frac{\partial V}{\partial x_1} \frac{dx_1}{dt} + \frac{\partial V}{\partial x_2} \frac{dx_2}{dt} + \dots + \frac{\partial V}{\partial x_n} \frac{dx_n}{dt}$ o bien $\frac{dV}{dt} = \frac{\partial V}{\partial x_1} \dot{x}_1 + \frac{\partial V}{\partial x_2} \dot{x}_2 + \dots + \frac{\partial V}{\partial x_n} \dot{x}_n$ pero $\dot{x}_1, \dot{x}_2, \dots, \dot{x}_n$ son simplemente los renglones f_1, f_2, \dots, f_n de la ecuación del sistema. Por tanto: $\frac{dV}{dt} = \frac{\partial V}{\partial x_1} f_1(x_n) + \frac{\partial V}{\partial x_2} f_2(x_n) + \dots + \frac{\partial V}{\partial x_n} f_n(x_n)$
Positiva definida	La función escalar $V(x_n)$ es positiva definida en la región R del espacio de estados incluyendo el origen si: a. $V(x_n) > 0$ $x_n \neq 0$ b. $V(0_n) = 0$ es decir, $V(x_n)$ es cero <i>sólo</i> cuando todos los términos x_n son iguales a cero. Ejemplo: $V(x_n) = x_1^2 + x_2^2$ positiva definida $V(x_n) = (x_1 + x_2)^2$ no positiva definida, ya que $V(x_n) = 0$ cuando $x_1 = -x_2$; por ejemplo, $x_1 = 3$ y $x_2 = -3$. Éste es un ejemplo de función positiva semidefinida
Positiva semidefinida	La función escalar $V(x_n)$ es positiva definida en la región R del espacio de estados incluyendo el origen si: a. $V(x_n) \geq 0$ Nótese que $V(x_n)$ puede ser igual a cero en cualquier b. $V(0_n) = 0$ parte del espacio de estados y no sólo en el origen

Tabla 34-28. Criterio de estabilidad de Liapunov, definición de términos (continuación)

Término	Definición
De signo indefinido	La función escalar es de signo indefinido en la región R del espacio de estados incluyendo el origen si en cualquier parte de la región R : a. $V(x_{n1}) > 0$ Puede ocurrir cambio de signo b. $V(x_{n2}) < 0$ Dicho sencillamente, la función de signo indefinido algunas veces es positiva y otras negativa
Negativa definida	$V(x_n)$ es negativa definida si $-V(x_n)$ es positiva definida
Negativa semidefinida	La función $V(x_n)$ es negativa semidefinida si $-V(x_n)$ es positiva semidefinida
Estabilidad asintótica, teorema I^b	El sistema es asintóticamente estable si, cuando se perturba lejos del valor cero, las variables de estado vuelven a cero (punto de equilibrio original) conforme aumenta el tiempo. El punto de equilibrio está dado por $f_n(0, t) = 0$, como se especifica en la definición del punto de equilibrio. El sistema será asintóticamente estable si se puede determinar la función de Liapunov $V(x_n, t)$ o $V(x_n)$ tal que: a. $V(x_n, t)$ o $V(x_n)$ sea positiva definida b. $\dot{V}(x_n, t)$ o $\dot{V}(x_n)$ sea negativa definida
Estabilidad asintótica global, teorema II (o estabilidad asintótica en grande)	Se establece a partir de la estabilidad asintótica, teorema I, con el requisito c) agregado: a. $V(x_n)$ es positiva definida b. $\dot{V}(x_n)$ es negativa definida c. $V(x_n) \rightarrow \infty$ cuando $\ x_n\ \rightarrow \infty$
Estabilidad en el sentido de Liapunov, teorema III^c	Forma de estabilidad más débil, donde el sistema puede oscilar indefinidamente en el ciclo límite y, mientras las variables de estado no crezcan hacia el infinito, el sistema se denomina estable en el sentido de Liapunov; el oscilador es estable en tal sentido. Las condiciones son las mismas de la estabilidad asintótica, teorema I, donde la condición b) se relaja de negativa definida a negativa semidefinida: a. $V(x_n)$ es positiva definida b. $\dot{V}(x_n)$ es negativa semidefinida o cero
Estabilidad asintótica, teorema IV	a. $V(x_n)$ es positiva definida b. $\dot{V}(x_n)$ es negativa semidefinida c. $\dot{V}(x_n)$ no se hace idénticamente cero a lo largo de trayectoria alguna en el espacio de estados x_n salvo en el origen, $x_n = 0$, cuando $t \rightarrow \infty$ Los requisitos b) y c) del teorema IV permiten la omisión de algunas de las variables de estado en $\dot{V}(x_n)$ en tanto que $\dot{V}(x_n)$ nunca se haga idénticamente cero cuando t tienda a infinito (véase el ejemplo 34.12)
Inestabilidad, teorema V	Ésta se deduce a partir de la estabilidad asintótica, teorema I, donde el signo de la derivada de la función de Liapunov cambia de negativo a positivo. La derivada positiva corresponde al crecimiento sin fin, que es inestabilidad. El sistema será inestable y el origen será el punto de equilibrio inestable si: a. $V(x_n, t)$ o $V(x_n)$ es positiva definida b. $\dot{V}(x_n, t)$ o $\dot{V}(x_n)$ es positiva definida

^a Por medio de una transformación de coordenadas ($x_n^* = x_n \pm K_n$), el punto de equilibrio siempre se puede trasladar al origen, $x_n = 0$ o $f_n(0, t) = 0$. El punto de equilibrio o punto singular puede ser estable o inestable.

^b Éste es el principal teorema de estabilidad de Liapunov, que también se conoce como segundo método de Liapunov o método directo de Liapunov. Lo importante aquí es que no se tienen que resolver las ecuaciones diferenciales que describen el sistema no lineal (la ecuación del sistema, primera definición) para determinar la estabilidad por el segundo método de Liapunov. El primer método de Liapunov consiste en resolver las ecuaciones del sistema o una aproximación linealizada de la serie de Taylor de las ecuaciones del sistema. Si las raíces de la ecuación característica linealizada son distintas de cero y tienen partes reales negativas; es decir, si yacen en el semiplano izquierdo, y el sistema no lineal es asintóticamente estable en el sentido de Liapunov. Nada sorprendentemente nuevo hay en el primer método de Liapunov. Es el segundo método de Liapunov el que es único y extremadamente poderoso si se puede encontrar el término $V(x_n, t)$ correcto. El problema está en obtener correctamente este término.

^c Es posible demostrar la estabilidad asintótica, y no simplemente la estabilidad en el sentido de Liapunov, mediante el requisito menos restrictivo de que $V(x_n)$ sea negativa semidefinida, agregando el requisito adicional (c) $V(x_n) \rightarrow \infty$ cuando $\|x_n\| \rightarrow \infty$.

ces x_2 tendría que ser cero y \dot{x}_2 también sería cero; de lo contrario x_2 se apartaría de cero. Las ecuaciones de estado son:

$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$\dot{x}_2 = -2x_1 - 3x_2$$

Sustituyendo $x_2 = 0$ y $\dot{x}_2 = 0$:

$$\dot{x}_1 = 0$$

$$0 = -2x_1 - 3(0)$$

Por inspección, $x_1 = 0$ y $\dot{x}_1 = 0$.

Por tanto, $V(x_n)$ puede ser idénticamente cero todo el tiempo sólo en el origen, requisito de estabilidad asintótica del teorema IV de la tabla 34-28.

Ejemplo 34.13. Determinar la estabilidad en el origen del sistema no lineal que sigue:

$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$\dot{x}_2 = -2x_1^3 - 3x_2$$

Procedimiento. Se elige una función de Liapunov positiva definida tal que su derivada contenga un término x_1^3 , de manera que ocurra cancelación. Sea:

$$V(x_n) = a_1 x_1^4 + a_2 x_2^2$$

Después, diferenciando:

$$\dot{V}(x_n) = (4a_1 x_1^3) \dot{x}_1 + (2a_2 x_2) \dot{x}_2$$

Sustituyendo \dot{x}_1 y \dot{x}_2 :

$$\dot{V}(x_n) = (4a_1 x_1^3) x_2 + (2a_2 x_2)(-2x_1^3 - 3x_2)$$

$$\dot{V}(x_n) = 4a_1 x_1^3 x_2 - 4a_2 x_1^3 x_2 - 6a_2 x_2^2$$

Suponiendo que $a_2 = 1$ y $a_1 = 1$ (la elección es arbitraria), entonces:

$$\dot{V}(x_n) = -6x_2^2 = \text{positiva semidefinida}$$

Mediante los mismos argumentos del ejemplo 34-12, el sistema es asintóticamente estable en general.

Resumen. Los aspectos importantes concernientes al método directo o segundo de Liapunov son:

1. Una función de Liapunov es una función de energía generalizada ($mV^2/2$, $CV^2/2$, $LI^2/2$, $KX^2/2$) y tiene las siguientes propiedades:

- a. No es una función única para algún sistema dado.
- b. Es una función escalar, que se evalúa a un número simple.
- c. Es positiva definida. Esto significa que:

$$V(x_n, t) \text{ o bien } V(x_n) > 0$$

$$V(0, t) \text{ o bien } V(0) = 0$$

- d. Para sistemas estables, la derivada con respecto al tiempo de la función de Liapunov es negativa.

2. Existe una gran diferencia entre estable y asintóticamente estable. Un sistema estable puede tener una oscilación de ciclo límite acotada, que es estable en el sentido de que la oscilación no crece. La estabilidad asintótica es la forma ordinaria de la estabilidad, en la que todo el movimiento termina cuando t se hace infinito.
3. Si el origen de un sistema dado es estable, entonces existen funciones de Liapunov que prueban que hay estabilidad, aunque la obtención de una puede ser complicada. La incapacidad de obtener una función de Liapunov que pruebe estabilidad no demuestra inestabilidad. Las condiciones de estabilidad para una función V suelen ser suficientes pero no necesarias.
4. El segundo método de Liapunov puede aplicarse a sistemas lineales así como a no lineales con coeficientes constantes o variantes en el tiempo. Sin embargo, suele aplicarse sólo al análisis de sistemas no lineales, ya que para realizar el análisis de sistemas lineales se dispone de muchos métodos que ofrecen mayor información.
5. El poder real del método de Liapunov radica en los ingeniosos métodos generados para definir la función de Liapunov requerida, para aplicar el método por vez primera. Véase lo que sigue.

- a. Método $Q - P$ del sistema lineal[†]:

$$\dot{x}_n = Ax_n$$

$$V(x_n) = x_n^* P x_n$$

$$\dot{V}(x_n) = x_n^* (A^* P + P A) x_n$$

$$\dot{V}(x_n) = -x_n^* Q x_n \text{ para estabilidad}$$

$$Q = -(A^* P + P A) \text{ para estabilidad}$$

donde x_n^* = transpuesta conjugada y Q, P = matriz hermitiana positiva definida.

- b. El teorema de Krasovskii[‡]:

$$\dot{x}_n = f_n(x_n)$$

$$V(x_n) = f_n^*(x_n) f_n(x_n) = \text{norma cuadrada}$$

$$F_n(x_n) = \text{jacobiano de } f_n(x_n)$$

$$\hat{F}_n(x_n) = F_n^*(x_n) + F_n(x_n) = \text{definición}$$

$$\dot{V}(x_n) = f_n^*(x_n) \hat{F}_n(x_n) f_n(x_n)$$

es asintóticamente estable si $F(x_n)$ es negativa definida. $f^*(x_n)$ = transpuesta conjugada

[†]Véase Ogata⁶, pág. 726.

[‡]Véase Ogata⁶, pág. 735.

de $f_n(x_n)$, jacobiano = derivada parcial de cada renglón con respecto a cada variable:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} f_1 & \frac{\partial}{\partial x_2} f_1 \\ \frac{\partial}{\partial x_1} f_2 & \frac{\partial}{\partial x_2} f_2 \end{bmatrix} = F_n(x_n) = \text{jacobiano de } f_n(x_n)$$

para una matriz de 2×2 .

c. Método de gradiente variable[§]:

$$x_n = f_n(x_n)$$

$$\dot{V} = (\nabla V)' \dot{x}$$

$$\text{o bien } \dot{V} = \begin{bmatrix} \frac{\partial V}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial V}{\partial x_n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \vdots \\ \dot{x}_n \end{bmatrix}$$

donde ∇V = gradiente de V

$$\nabla V = \begin{bmatrix} \frac{\partial V}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial V}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$

y $(\nabla V)'$ = transpuesta de ∇V ; es asintóticamente estable si el n -ésimo rotacional dimensional de ∇V es igual a cero. Para $n = 3$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \nabla V_2}{\partial x_1} &= \frac{\partial \nabla V_1}{\partial x_2}, \quad \frac{\partial \nabla V_3}{\partial x_1} = \\ &= \frac{\partial \nabla V_1}{\partial x_3}, \quad \frac{\partial \nabla V_3}{\partial x_2} = \frac{\partial \nabla V_2}{\partial x_3}, \end{aligned}$$

$$\text{o bien } \frac{\partial \nabla V_i}{\partial x_j} = \frac{\partial \nabla V_j}{\partial x_i} \quad (i, j = 1, 2, \dots, n)$$

d. El criterio del círculo de Popov se genera a partir del método directo de Liapunov y se presenta a continuación.

34.9.5 Criterio del círculo de Popov

La interpretación de un teorema de estabilidad de sistemas no lineales hecha por Popov²⁰ es particularmente fácil de emplear. La siguiente interpretación es conservadora y agrupa diversos tipos de no linealidades

§ Véase Lasalle y Lefschetz¹⁹, pág. 59, u Ogata⁶, pág. 737.

que Popov trató como casos individuales (no linealidades univalueadas, histéresis pasiva e histéresis activa). El agrupamiento incrementa el efecto conservador, con lo que el criterio es suficiente pero no necesario. Si el lugar geométrico $G(j\omega)$ no corta ni encierra el círculo de Popov, el sistema no lineal es estable, como si el círculo de Popov fuese el punto $(-1 + j0)$ del criterio de estabilidad de Nyquist para sistemas lineales. Por otra parte, si el lugar geométrico $G(j\omega)$ no corta ni encierra el círculo de Popov, el sistema no es necesariamente inestable. Este criterio de Popov sirve para demostrar que un sistema no lineal de la forma que se muestra en la figura 34-46 es estable.

Obsérvese que la figura impone varias restricciones al sistema por analizar. Primero, el sistema debe contener una función de transferencia lineal estable en la salida. Esta restricción se cumple si todos los polos de $G(s)$ yacen en la mitad izquierda del plano s y si $G(s)$ tiene más polos que ceros. Segundo, la no linealidad está acotada por dos líneas rectas de pendiente K_1 y K_2 (fig. 34-46). Si K_2 es igual a ∞ y K_1 , igual a 0, las cotas se abren para incluir el primer y tercer cuadrantes en su totalidad, lo cual se ajusta a casi cualquier no linealidad concebible. Por desgracia, en este caso el criterio de Popov se vuelve muy riguroso y el círculo de Popov degenera en toda la mitad izquierda del plano $G(j\omega)$. Éste es el caso de un relevador ideal (fig. 34-47), que muestra las pendientes K_1 y K_2 para varias otras no linealidades, incluso la saturación, y un relevador con una zona muerta. Una vez que las pendientes K_1 y K_2 se han evaluado, el procedimiento es:

1. Graficar la parte imaginaria en función de la parte real de $G(j\omega)$ cuando ω varía de cero a infinito. Esta gráfica es idéntica a la gráfica de Nyquist de sistemas lineales.
2. Localizar los puntos $-1/K_1$ y $-1/K_2$.
3. Hacer pasar una circunferencia por estos dos puntos, centrada entre ellos. El centro de la circunferencia se puede encontrar con un compás o en forma analítica:

$$\begin{aligned} \text{Centro} &= \frac{-1/K_1 - 1/K_2}{2} = \frac{-(K_2 + K_1)/K_1 K_2}{2} = \\ &= \frac{-(K_1 + K_2)}{2K_1 K_2} \end{aligned} \quad (34-100)$$

4. Determinar por inspección la estabilidad del sistema. Si el círculo no es cortado o encerrado por la gráfica $G(j\omega)$, el sistema es estable.
5. Si el lugar geométrico de $G(j\omega)$ corta o encierra el círculo, la prueba es inconcluyente.

Obsérvese que si el sistema es lineal, de manera que $N[e(t)]$ se convierte en una ganancia lineal unitaria, entonces $K_2 = K_1 = 1$. Insertando $K_1 = K_2 = 1$ en la ecuación 34-100 se produce:

$$\text{Centro} = \frac{-(K_1 + K_2)}{2K_1 K_2} = -\frac{1+1}{2(1)(1)} = -\frac{2}{2} = -1 \quad (34-101)$$

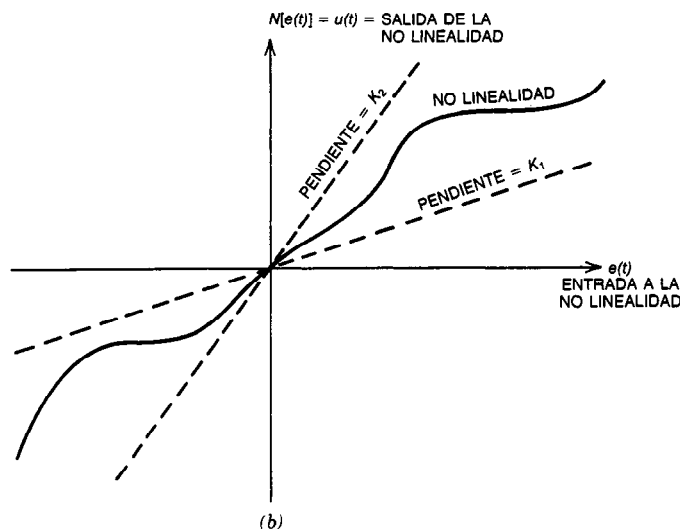
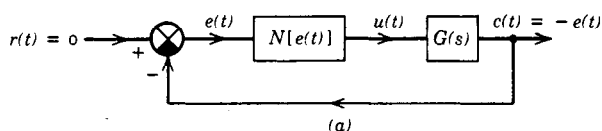


Fig. 34-46. a) Sistema de control de ciclo cerrado no lineal para el análisis de estabilidad de Popov. Condiciones: 1) $G(s)$ es lineal y es estable en la salida (tiene más polos que ceros, no tiene cancelaciones de polos, y todos los polos tienen parte real negativa) y 2) la no linealidad $N[e(t)]$ está acotada por dos rectas de pendiente K_1 y K_2 que pasan por cero, como se muestra en (b). $\infty \geq K_2 > K_1 \geq 0$.

Por tanto, el círculo de Popov degenera en el punto $(-1) = (-1 + j0)$ para un sistema lineal y se convierte en el criterio de estabilidad de Nyquist.

En la figura 34-48 se muestra un ejemplo de gráfica de Popov. Obsérvese que si $K_1 = 0$, que es el caso de todas las no linealidades de esa figura, el círculo de Popov degenera en una línea vertical que pasa por el punto:

$$\operatorname{Re}\{G(j\omega)\} = -\frac{1}{K_2} \quad (34-102)$$

Ejemplo 34.14. Dado un actuador lineal con función de transferencia $G_A(s)$ impulsado por un amplificador de CD que se satura con señales de entrada mayores de 10 V, determinar la máxima ganancia permisible del amplificador de CD no lineal. Compárese esta ganancia con la máxima ganancia permisible si el amplificador no se saturara y fuera lineal:

$$G_A(s) = \frac{1}{s(s+1)(s+10)} \quad (\text{dada}) \quad (34-103)$$

$$G_A(j\omega) = \frac{1}{j\omega(1+j\omega)(10+j\omega)} \quad (34-104)$$

Determinando las partes real e imaginaria de $G(j\omega)$ se tiene:

$$G_A(j\omega) = \frac{-11}{(10-\omega^2)^2 + 121\omega^2} + j \frac{-(10-\omega^2)}{\omega[(10-\omega^2)^2 + 121\omega^2]} \quad (34-105)$$

Evaluando puntos de la gráfica Popov:

ω	$G(j\omega)$	$\operatorname{Re}\{G(j\omega)\}$	$\operatorname{Im}\{G(j\omega)\}$
0.001	40 dB $\angle -90^\circ$	-0.11	-100.0
0.01	20 dB $\angle -91^\circ$	-0.11	-10.0
0.1	0.04 dB $\angle -96^\circ$	-0.11	-1.0
1.0	-23 dB $\angle -141^\circ$	-0.05	-0.04
10.0	-63 dB $\angle -219^\circ$	-0.0005	+0.0004
$\sqrt{10} = 3.16$	-41 dB $\angle -180^\circ$	0.009091	0.0

La no linealidad, que se muestra en la figura 34-49, está acotada por $K_1 = 0$, $K_2 = K$, donde K es la ganancia del amplificador de CD antes de la saturación; por tanto:

$$\frac{-1}{K_1} \rightarrow -\infty \quad \text{y} \quad \frac{-1}{K_2} = \frac{-1}{K} \quad (34-106)$$

Así, el círculo de Popov degenera en una línea vertical en $\operatorname{Re}\{G(j\omega)\} = -1/K$. La magnitud máxima del valor negativo de $\operatorname{Re}\{G(j\omega)\}$ es -0.11 (fig. 34-49).

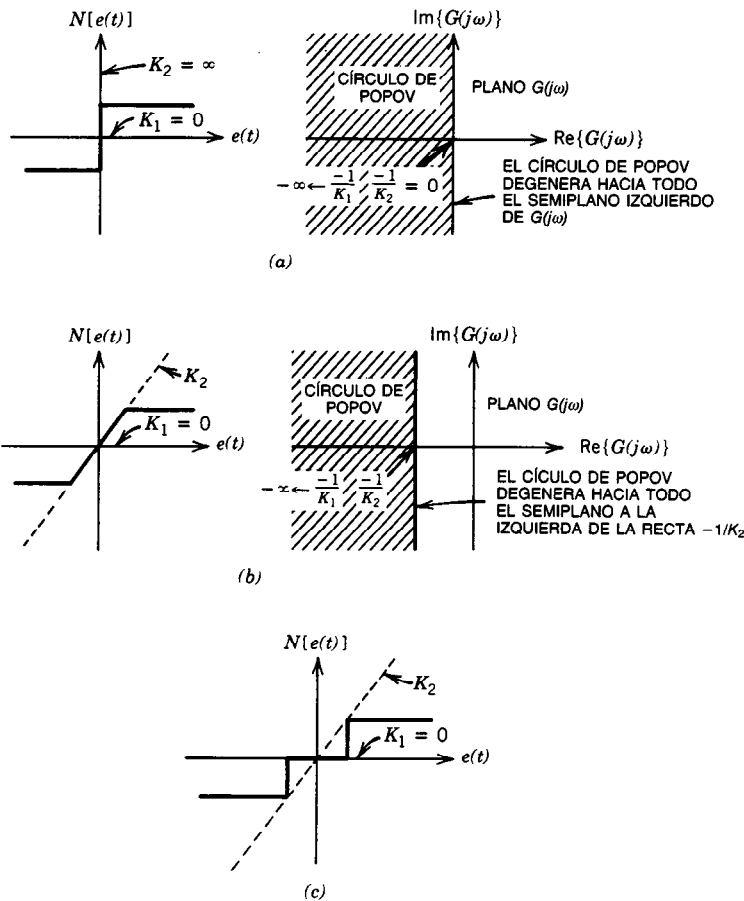


Fig. 34-47. Algunas no linealidades comunes, sus pendientes de Popov limitantes, K_1 y K_2 y sus círculos de Popov. a) Relevador ideal. b) Saturación. c) Relevador con zona muerta. El círculo de Popov es idéntico al de (b). Obsérvese que en el caso representado aquí, el círculo de Popov tiene radio infinito y degenera en una línea vertical en $-1/K_2$.

De la ecuación 34-102, para evitar una intersección del lugar geométrico de $\bar{G}(j\omega)$ y el círculo de Popov:

$$\operatorname{Re}\{G(j\omega)\} = -0.11 > \frac{-1}{K_2} - \frac{1}{K} \quad (34-107)$$

o bien:

$$0.11 < \frac{1}{K} \quad (\text{los signos negativos invierten una desigualdad})$$

o bien:

$$K < \frac{1}{0.11} = 9.1 \quad (34-108)$$

Por tanto, la ganancia del amplificador de CD deberá ser menor de 9.1 para que el sistema no lineal sea estable conforme al criterio de Popov. Obsérvese que el nivel real de saturación del amplificador de CD no se

utilizó en absoluto. Ésta es una razón por la cual el método de Popov es conservador. Con una ganancia de 9.1, el sistema es estable si el amplificador de CD se satura en 1, 10 o 100 V. Esto significa que en realidad se puede permitir una ganancia mayor de 9.1. El método de Popov indica que si la ganancia es 9.1 o menor, el sistema es estable. Esto no significa que si la ganancia pasa de 9.1 el sistema se vuelva inestable.

La ganancia máxima de un amplificador sin saturación se determina empleando el arreglo de Routh-Hurwitz, con la ganancia K agrupada con $G_A(s)$:

$$1 + G_A(s)H(s) = 1 + \frac{K}{s(s+1)(s+10)} \quad \text{ya que } H(s) = 1 \quad (34-109)$$

Así, la ecuación $D(s)$ del sistema lineal es:

$$s(s+1)(s+10) + K = s^3 + 11s^2 + 10s + K \quad (34-110)$$

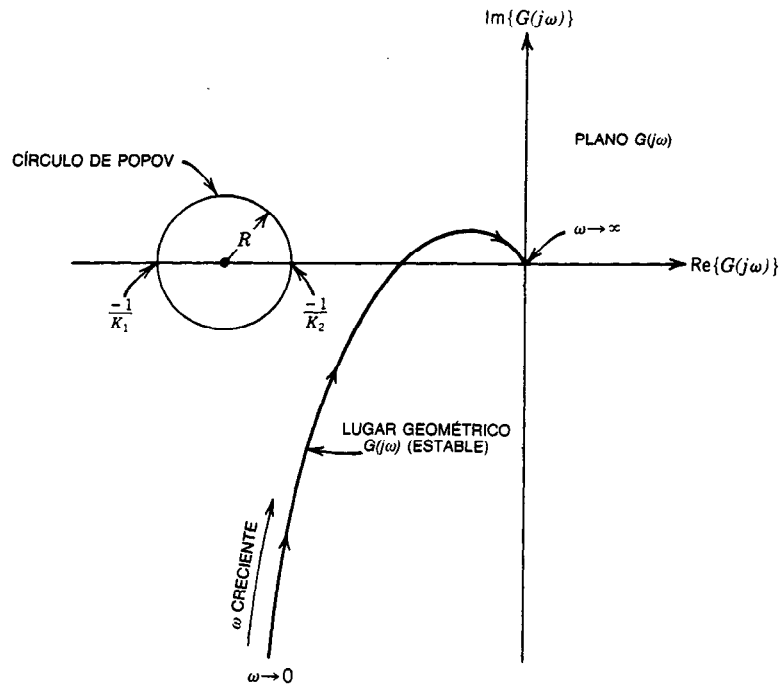


Fig. 34-48. Gráfica de $G(j\omega)$ con un círculo de Popov, para $\infty > K_2 > K_1 > 0$. El sistema es estable si el lugar geométrico $G(j\omega)$ no interseca el círculo de Popov. Si $G(j\omega)$ corta o encierra el círculo, la prueba es incluyente y no demuestra inestabilidad.

Círculo de Popov

$$\text{Centro: } -\frac{K_1 + K_2}{2K_1K_2}$$

$$\text{Radio: } R = \frac{K_2 - K_1}{2K_1K_2}$$

Al realizar la verificación del arreglo de Routh-Hurwitz se obtiene:

	$s^3 + 11s^2$	$+ 10s + K$
s^3	1	10
s^2	11	K
s^1	$\frac{110 - K}{11}$	$(K < 110)$
s^0	K	$(K > 0)$

Para que haya estabilidad, $(110 - K)/11 > 0$ y $K > 0$. Por inspección del renglón s^1 del arreglo de Routh-Hurwitz, el valor máximo de la ganancia del amplificador de CD es 110 si no ocurre saturación. Ésta es 12 veces mayor que la ganancia de 9.1 permitida en caso de saturación.

El resultado de la prueba de Routh-Hurwitz se confirma con referencia al segmento de la gráfica de Nyquist de la gráfica de Popov; es decir, la gráfica de $G(j\omega)$.

A partir de los datos tabulados que siguen a la ecuación 34-105, la gráfica de $G(j\omega)$ para la ganancia unitaria cruza el eje real en:

$$G(j\omega)|_{\omega_0=\sqrt{10}} = -41 \text{ dB} \angle -180^\circ = \quad (34-111)$$

$$= -0.009091 + j0.0$$

El sistema lineal se hará inestable si se suma ganancia suficiente para que $G(j\omega)_0$ se convierta en $(-1 + j0)$.

Por tanto, la máxima ganancia estable K para un sistema puramente lineal es:

$$K(-0.009091 + j0) = -1 + j0$$

o bien:

$$K = \frac{-1}{-0.009091} = 110$$

Este resultado de la gráfica de Nyquist coincide con el del arreglo de Routh-Hurwitz.

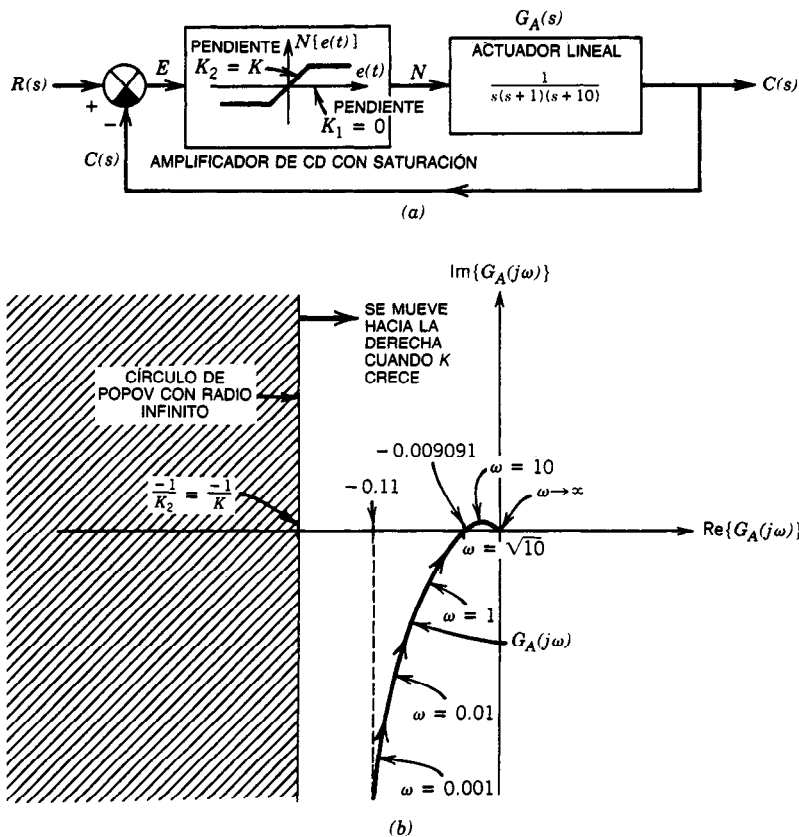


Fig. 34-49. Ejemplo 34.14, solución por la gráfica de Popov. a) Diagrama de bloques del amplificador de CD de saturación con ganancia K y actuador lineal $G_A(s)$. b) Gráfica de Popov. Con saturación, la ganancia K puede incrementarse hasta que el "círculo" degenerado de Popov (en realidad, una línea recta) se vuelva tangente al lugar geométrico $G_A(j\omega)$. El resultado, $\bar{K} = 1/0.11 = 9.1$, es conservador. K = ganancia del amplificador; K máxima con saturación = $1/0.11 = 9.1$; K máxima sin saturación = $1/0.009091 = 110$.

34.10 CONTROL MODERNO

El término sancionado "control moderno" se refiere a un método de análisis y diseño que regresa a las ecuaciones diferenciales básicas que describen un sistema. Por lo general, en este diseño un sistema de n -ésimo orden es descrito por un conjunto de n ecuaciones diferenciales de primer orden, que se expresan en forma matricial y se denominan ecuaciones de estado. Esto es lo opuesto al control clásico, en el que el sistema es descrito por una ecuación diferencial de n -ésimo orden y se analiza con técnicas del dominio de la frecuencia (o transformadas de Laplace).

El control moderno ha tenido éxito gracias a la disponibilidad de computadoras digitales que resuelven un conjunto de ecuaciones diferenciales acopladas de n -ésimo orden. Un punto importante es que la notación matricial empleada es compacta, y una ecuación matricial rige un sistema de cualquier orden.

En el control moderno se emplea otro concepto fundamental diferente de los métodos del control clásico: la "optimización", que se logra minimizando una "fun-

ción de costo" C . El diseño especifica ciertas funciones positivas del rendimiento del sistema, tales como el cuadrado del error o el cuadrado del esfuerzo de control, con objeto de establecer una función de costo. La función de costo, que siempre es positiva, se integra entonces para obtener el "índice de rendimiento" J del sistema. Puesto que J es la integral de una cantidad positiva (o cero), como el error del sistema elevado al cuadrado, J con el tiempo siempre aumenta (o se mantiene constante). Si se minimiza J , se minimiza la integral del error, lo cual es un posible procedimiento de diseño óptimo. Obsérvese que este procedimiento guarda ciertas semejanzas con el método directo de Liapunov. Para ser específicos, se formula una función de las variables del sistema que siempre sea positiva y después se examina su comportamiento.

Si el diseño de control moderno tiene alguna falla, ésta se encuentra cuando el diseñador elige la función de costo. Si el diseñador elige simplemente minimizar el error empleando una función de costo C_1 :

$$C_1 = e_n(t)^2 \quad (34-112)$$

donde $e_n(t)$ = vector de error del sistema con n componentes, y el índice de rendimiento asociado J_1 :

$$J_1 = \int_0^{\infty} C_1 dt = \int_0^{\infty} e_n(t)^2 dt \quad (34-113)$$

entonces es posible (y en realidad probable) generar un diseño insatisfactorio o irrealizable que requiera esfuerzos de control irrealizables (p. ej., se puede requerir un esfuerzo de control muy grande, impulsivo o infinito). Este problema puede superarse insertando en el índice de rendimiento un término que contenga el esfuerzo de control, $U(t)$. De este modo, un índice de rendimiento J_2 más adecuado podría ser:

$$J_2 = \int_0^{\infty} [e_n(t)^2 + U_m(t)^2] dt \quad (34-114)$$

donde $U_m(t)$ = vector de control con m componentes.

Sin embargo, el diseñador podría decidir que un factor de la función de costo es más importante para la operación satisfactoria del sistema que otro, de manera que se debe asignar una ponderación adecuada a las componentes de la función de costo $e_n(t)^2$ y $U_m(t)^2$. Esto se logra introduciendo las constantes de ponderación K_1 y K_2 , de modo que el índice de rendimiento mejorado J_3 se convierte en:

$$J_3 = \int_0^{\infty} [K_1 e_n(t)^2 + K_2 U_m(t)^2] dt \quad (34-115)$$

Éste es un índice de rendimiento útil, utilizado en 1952 por Bryson²¹ junto con el control de un misil autodirigido. El término del esfuerzo de control $U_m(t)$ tuvo un significado especial en el caso de Bryson, ya que el esfuerzo de control del timón del misil era provisto por un acumulador hidráulico. Un acumulador hidráulico es un recipiente sellado que contiene fluido hidráulico sometido a presión. Una vez que se agota el fluido, el misil se vuelve incontrolable. En este caso, el dilema del diseñador es evidente: un misil que pierde el blanco es insatisfactorio. Por tanto, se debe asignar al error una ponderación mucho mayor que al esfuerzo de control. Sin embargo, un misil que se torna incontrolable no puede dar en el blanco, por lo que debe darse al esfuerzo de control una mayor ponderación que al error. Estos requisitos contradictorios no se pueden cumplir al mismo tiempo, y por tanto se observa que el control óptimo requiere soluciones intermedias de ingeniería (así como los procedimientos de diseño tradicionales).

El diseñador debe especificar exactamente qué desea y a qué costo. Dado que el planteamiento claro de un problema parece producir en realidad una buena parte de la solución, el método de control óptimo es atractivo porque requiere un enunciado claro de las metas de diseño del sistema.

En el diseño de sistemas a gran escala (donde el control óptimo encuentra su aplicación más extensa), el método del índice de rendimiento y la función de costo presenta otra ventaja importante: el diseñador tiene que manejar una sola función de costo, aunque

complicada, a fin de especificar el rendimiento del sistema. En el método de la teoría del control clásico, el diseñador tendría que manejar un gran número de criterios de rendimiento, como estabilidad, tiempo de ascenso, tiempo de estabilización, errores de estado estable, sobrecorrección porcentual, amortiguación, respuesta a perturbaciones, etc. Todos estos criterios de rendimiento son sustituidos por la función de costo única. La lógica de optimización, que se basa en el cálculo variacional, comúnmente está integrada en un programa de computadora que selecciona la o las mejores combinaciones de parámetros y ganancias de control para minimizar la función de costo elegida. Sin embargo, pocos sistemas reales se diseñan exclusivamente por medio del control óptimo. El control óptimo sirve como un excelente punto de partida para el diseño de un sistema; pero como el diseñador quizá haya pasado por alto algún factor de rendimiento importante al especificar el índice de rendimiento del sistema, casi es obligatorio revisar o modificar el diseño supuestamente clásico (como análisis de errores de estado estable, respuesta de frecuencia o análisis del lugar geométrico de la raíz o, con mayor probabilidad, un estudio completo de simulación del sistema). La simulación, el ensayo de un modelo físico o, más probablemente, un modelo generado por computadora del sistema recién diseñado, casi se han convertido en un requisito de diseño por los métodos de control moderno.

Es importante insistir en que el índice de rendimiento de la ecuación 34-115 no requiere estabilidad y puede resultar que el sistema de control óptimo sea inestable, por tanto siempre se debe revisar.

34.10.1 Ecuaciones espaciales de estado

Las ecuaciones espaciales de estado que se emplean en la teoría del control moderno son un conjunto de n ecuaciones diferenciales acopladas de primer orden que describen un sistema de n -ésimo orden. Las variables de estado no necesitan ser cantidades físicamente medibles u observables, pero en realidad es preferible, ya que la ley de control óptimo puede requerir retroalimentación de todas ellas (con ponderación adecuada). Para un sistema puramente mecánico, las variables de estado elegidas serían casi siempre la posición y la velocidad del sistema en el caso de sistemas de segundo orden, o bien posición, velocidad y aceleración en el caso de un sistema de tercer orden. Para una red eléctrica pasiva, las variables de estado elegidas casi siempre serían las corrientes que pasan por cada inductor y el voltaje de cada capacitor.

En el caso de un sistema general de n -ésimo orden con variables de salida $c(t)$ y de entrada $r(t)$, descrito por la ecuación diferencial:

$$\frac{d^n}{dt^n} c(t) + a_1 \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}} c(t) + \dots + a_{n-1} \frac{d}{dt} c(t) + a_n c(t) = r(t) \quad (34-116)$$

las variables de estado casi siempre se eligen como:

$$x_1 = c(t)$$

$$x_2 = \dot{c}(t) = \frac{d}{dt} c(t) = \frac{d}{dt} x_1 = \dot{x}_1$$

$$x_3 = \ddot{c}(t) = \frac{d^2}{dt^2} c(t) = \frac{d}{dt} \frac{d}{dt} c(t) = \frac{d}{dt} x_2 = \dot{x}_2$$

$$\vdots$$

$$x_n = \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}} c(t) = \dot{x}_{n-1} \quad (34-117)$$

El conjunto de ecuaciones 34-117 está formado por $(n - 1)$ de las n ecuaciones de estado diferenciales de primer orden que se requieren; en forma muy simple:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= x_3 \\ \dot{x}_3 &= x_4 \\ &\vdots \\ \dot{x}_{n-1} &= x_n \end{aligned}$$

La última ecuación para \dot{x}_n se obtuvo despejando de la ecuación diferencial básica 34-116 la derivada de orden superior (n -ésima) y después sustituyendo en $x_1 = c(t)$, $x_2 = \dot{c}(t)$, $x_3 = \ddot{c}(t)$, etcétera, de modo que:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= x_3 \\ \dot{x}_3 &= x_4 \\ &\vdots \\ \dot{x}_{n-1} &= x_n \\ \dot{x}_n &= -a_n x_1 - a_{n-1} x_2 - \dots - a_1 x_n + r(t) \end{aligned} \quad (34-118)$$

La ecuación 34-118 suele expresarse en forma matricial:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \vdots \\ \dot{x}_{n-1} \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & -a_{n-3} & \dots & -a_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} U(t) \quad (34-119)$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} U(t)$$

donde $r(t) = U(t)$ es la función de entrada.

En notación matricial compacta, la ecuación 34-119 se expresa como:

Ecuación de estado

$$\dot{\mathbf{x}}_n = \mathbf{A}\mathbf{x}_n + \mathbf{B}U \quad (34-120)$$

donde la salida $c(t) = x_1$ está dada por:

$$c(t) = [1 \ 0 \ \dots \ 0] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad (34-121)$$

o en notación matricial:

Ecuación de salida

$$c(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}_n \quad (34-122)$$

El problema se establece en forma más clara por medio de un ejemplo.

Ejemplo 34.15. Dado un sistema descrito por la ecuación diferencial:

$$\ddot{y} + 9\ddot{y} + 26\dot{y} + 24y = 3U \quad (34-123)$$

donde $U(t)$ es la entrada del sistema [$U(t) = U$] e $y(t)$ es la salida [$y(t) = y$], encontrar la descripción de las variables de estado del sistema.

Paso 1. Se definen las n variables de estado por medio de:

$$x_1 = y, \quad x_2 = \dot{y}, \quad x_3 = \ddot{y} \quad (34-124)$$

Obsérvese que no se define ninguna variable de estado para la derivada de orden superior \ddot{y} , ya que \ddot{y} se iguala a x_3 .

Paso 2. Se obtienen las primeras $(n - 1)$ ecuaciones de variables de estado directamente del paso 1 de la siguiente forma:

$$\dot{x}_1 = \dot{y} = x_2$$

$$\dot{x}_2 = \ddot{y} = x_3$$

Paso 3. Se despeja la derivada de orden superior \ddot{y} y se sustituyen por las variables de estado las variables de la ecuación diferencial \ddot{y} , \dot{y} e y :

$$\ddot{y} = -24y - 26\dot{y} - 9\ddot{y} + 3U$$

$$\dot{x}_3 = -24x_1 - 26x_2 - 9x_3 + 3U$$

Paso 4. Se expresa la ecuación de estado en forma matricial:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -24 & -26 & -9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} U \quad (34-125)$$

$$[\dot{\mathbf{x}}_n] = [\mathbf{A}] [\mathbf{x}_n] + [\mathbf{B}] U$$

y:

$$y = [1 \ 0 \ 0] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = [\mathbf{C}] [\mathbf{x}_n]$$

Es en extremo importante observar que las variables de estado no son únicas, y que si se cambiara la definición de dichas variables (ec. 34-124), la ecuación final de variables de estado (ec. 34-125) sería diferente. Algunas asignaciones de variables de estado válidas y diferentes son:

Conjunto 1	Conjunto 2	Conjunto 3
$x_1 = y$	$x_1 = \dot{y}$	$x_1 = y$
$x_2 = \dot{y}$	$x_2 = y$	$x_2 = \dot{x}_1 + K_2 U = \dot{y} + K_2 U$
$x_3 = \ddot{y}$	$x_3 = \ddot{y}$	$x_3 = \dot{x}_2 + K_1 U = \ddot{y} + K_2 U + K_1 U$

El conjunto 1 es la elección original, que produce la ecuación 34-125. El conjunto 2 meramente desplaza los elementos de la ecuación 34-125 y carece de utilidad práctica. El conjunto 3 es muy útil, porque si la función activadora (impulsora) de entrada contiene términos derivados, este conjunto puede utilizarse para eliminar tales derivadas. Entonces se produce la misma matriz A de la ecuación 34-125, y se obtiene una matriz B diferente a partir de los términos (KU) agregados en el conjunto 3. $(K_1 U)$ eliminaría cualquier término de primera derivada, y $(K_2 U)$ cualquier término de segunda derivada. Esto se ilustra en el ejemplo 34.16.

Ejemplo 34.16. Repetir el ejemplo 34.15 con un término $5\dot{U}$ agregado a la función activadora de entrada. Por tanto, la ecuación diferencial del sistema es:

$$\ddot{y} + 9\dot{y} + 26y = 3U + 5\dot{U} \quad (34-126)$$

Paso 1

$$x_1 = y$$

$$x_2 = \dot{x}_1 = \dot{y}$$

$$x_3 = \dot{x}_2 + K_1 U = \ddot{y} + K_1 U$$

o bien

$$\ddot{y} = x_3 - K_1 U$$

Paso 2. Se obtienen relaciones para \dot{x}_n :

$$\dot{x}_1 = \dot{y} = x_2$$

$$\dot{x}_2 = \dot{y} = x_3 - K_1 U$$

$$\dot{x}_3 = \ddot{y} + K_1 \dot{U} \quad \text{o bien} \quad \ddot{y} = \dot{x}_3 - K_1 \dot{U}$$

Paso 3. Se despeja \ddot{y} y se sustituye en x_1, x_2, x_3 :

$$\ddot{y} = -24\dot{y} - 26y - 9\ddot{y} + 3U + 5\dot{U}$$

$$\dot{x}_3 - K_1 \dot{U} = -24x_2 - 26x_1 - 9(x_3 - K_1 U) + 3U + 5\dot{U}$$

Paso 4. Se elimina el término \dot{U} mediante la elección apropiada de K_1 . En este caso se elige $K_1 = -5$:

$$\dot{x}_3 + 5\dot{U} = -24x_2 - 26x_1 - 9(x_3 - 5\dot{U}) + 3U + 5\dot{U}$$

← eliminado por $K_1 = -5$ →

$$\dot{x}_3 = -24x_2 - 26x_1 - 9x_3 - 45U + 3U$$

$$\dot{x}_3 = -24x_2 - 26x_1 - 9x_3 - 42U$$

Paso 5. Se enuncia el conjunto completo de ecuaciones de estado reinsertando el o los valores de K_1 en el paso 2, lo que produce $\dot{x}_2 = x_3 + 5U$ y $\dot{x}_1 = x_2$, y después se utiliza la \dot{x}_3 equivalente del paso 4:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -24 & -26 & -9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 5 \\ -42 \end{bmatrix} [U]$$

$$[\dot{\mathbf{x}}_n] = [\mathbf{A}] [\mathbf{x}_n] + [\mathbf{B}_1] U \quad (34-127)$$

y:

$$y = [1 \ 0 \ 0] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = [\mathbf{C}] [\mathbf{x}_n]$$

Para eliminar dos términos derivados de la función activadora de entrada, primero se eliminaría la derivada de orden superior ($K_2 \dot{U}$), y el valor resultante de K_2 se reinsertaría en el paso 4 para eliminar la derivada de primer orden ($K_1 \dot{U}$). Este proceso es un procedimiento algebraico directo que se puede resolver en términos generales. Sin embargo, éstos son difíciles de memorizar y presentan poca simplificación sobre el método K_1, K_2, \dots, K_n . Kuo⁷ deduce la forma general.

34.10.2 Soluciones de las ecuaciones de estado

La ecuación general de estado (donde \mathbf{x}_n = vector de estado, \mathbf{U} = vector de entrada y \mathbf{A}, \mathbf{B} = matrices constantes):

$$\dot{\mathbf{x}}_n = \mathbf{A} \mathbf{x}_n + \mathbf{B} \mathbf{U} \quad (34-128)$$

puede resolverse por medio de las técnicas directas de la transformada de Laplace, si se siguen las reglas del álgebra de matrices.

Encontrando la transformada de Laplace:

$$s\mathbf{x}_n(s) - \mathbf{x}_n(t)|_{t=0} = \mathbf{A}\mathbf{x}_n(s) + \mathbf{B}\mathbf{U}(s)$$

Desplazando términos:

$$s\mathbf{x}_n(s) - \mathbf{A}\mathbf{x}_n(s) = \mathbf{x}_n(t)|_{t=0} + \mathbf{B}\mathbf{U}(s)$$

Factorizando:

$$[s\mathbf{I} - \mathbf{A}]\mathbf{x}_n(s) = \mathbf{x}_n(0) + \mathbf{B}\mathbf{U}(s)$$

donde \mathbf{I} = matriz identidad:

$$\mathbf{I} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

para una matriz de 3×3 . Premultiplicando por $[s\mathbf{I} - \mathbf{A}]^{-1}$, la matriz inversa de $[s\mathbf{I} - \mathbf{A}]$:

$$\mathbf{x}_n(s) = [s\mathbf{I} - \mathbf{A}]^{-1}\mathbf{x}_n(0) + [s\mathbf{I} - \mathbf{A}]^{-1}\mathbf{B}\mathbf{U}(s)$$

Se encuentra la transformada inversa de Laplace y se observa que $\mathbf{x}_n(0)$, la condición inicial de la variable de estado, es un vector de constantes, mientras que $\mathbf{U}(s)$ es función de (s) . Por tanto, el segundo término de $\mathbf{x}_n(s)$ contiene un producto de transformadas:

$$\mathbf{x}_n(t) = L^{-1}\{[s\mathbf{I} - \mathbf{A}]^{-1}\mathbf{x}_n(0) + L^{-1}\{[s\mathbf{I} - \mathbf{A}]^{-1}\mathbf{B}\mathbf{U}(s)\} \quad (34-129)$$

donde L^{-1} = operador de la transformada inversa de Laplace.

La matriz de transición de estado, $\Phi(t)$, se representa como la transformada inversa de Laplace de la inversa de la matriz $[s\mathbf{I} - \mathbf{A}]$:

$$\Phi(t) = L^{-1}\{[s\mathbf{I} - \mathbf{A}]^{-1}\} \quad (34-130)$$

Insertando la ecuación 34-130 en la 34-129 [y recordando que la transformada inversa de Laplace de $F_1(s)F_2(s)$ está dada por la integral de convolución $\int_0^t f_1(\gamma)f_2(t-\gamma)d\gamma$] se produce:

$$\mathbf{x}_n(t) = \Phi(t)\mathbf{x}_n(0) + \int_0^t \Phi(\gamma)\mathbf{B}\mathbf{U}(t-\gamma)d\gamma \quad (34-131)$$

La ecuación 34-131 es la solución general de un sistema cualquiera descrito por variables de estado en la forma de la ecuación 34-128.

Salvo en casos simples, la evaluación de $\mathbf{x}_n(t)$ es una tarea formidable. Un caso simple se presenta en el ejemplo siguiente.

Ejemplo 34.17. Dado el sistema:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} U(t) \quad (34-132)$$

$U(t)$ = función de escalón unitario

Primero se determina la matriz de transición de estado $\Phi(t)$. De la ecuación 34-130:

$$\Phi(t) = L^{-1}\{[s\mathbf{I} - \mathbf{A}]^{-1}\}$$

Evalutando $[s\mathbf{I} - \mathbf{A}]$ mediante el uso de la matriz \mathbf{A} que se presenta en la ecuación 34-132 se obtiene la siguiente expresión:

$$[s\mathbf{I} - \mathbf{A}] = \begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s & -1 \\ +2 & s+3 \end{bmatrix}$$

Encontrando la inversa de $[s\mathbf{I} - \mathbf{A}]$.

$$[s\mathbf{I} - \mathbf{A}]^{-1} = \frac{\begin{bmatrix} s+3 & 1 \\ -2 & s \end{bmatrix}}{\begin{vmatrix} s & -1 \\ +2 & s+3 \end{vmatrix}} = \frac{\begin{bmatrix} s+3 & 1 \\ -2 & s \end{bmatrix}}{s(s+3)+2} \quad (34-133)$$

$$[s\mathbf{I} - \mathbf{A}]^{-1} = \frac{\begin{bmatrix} s+3 & 1 \\ -2 & s \end{bmatrix}}{s^2+3s+2}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{s+3}{(s+1)(s+2)} & \frac{1}{(s+1)(s+2)} \\ \frac{-2}{(s+1)(s+2)} & \frac{s}{(s+1)(s+2)} \end{bmatrix}$$

Desarrollando en fracciones parciales cada término de la matriz de 2×2 de la ecuación 34-133 se tiene la expresión:

$$[s\mathbf{I} - \mathbf{A}]^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{2}{s+1} + \frac{-1}{s+2} & \frac{1}{s+1} + \frac{-1}{s+2} \\ \frac{-2}{s+1} + \frac{2}{s+2} & \frac{-1}{s+1} + \frac{2}{s+2} \end{bmatrix}$$

Encontrando la transformada inversa de Laplace de $[s\mathbf{I} - \mathbf{A}]^{-1}$ mediante el uso del par transformado $K/(s+a) \rightarrow Ke^{-at}$:

$$\Phi(t) = L^{-1}\{[s\mathbf{I} - \mathbf{A}]\} = \begin{bmatrix} 2e^{-t} - e^{-2t} & e^{-t} - e^{-2t} \\ -2e^{-t} + 2e^{-2t} & -e^{-t} + 2e^{-2t} \end{bmatrix} \quad (34-134)$$

Esto completa la evaluación del primer término de las ecuaciones 34-129 y 34-131 para la respuesta del sistema.

Dicho término, que es impulsado por las condiciones iniciales $\mathbf{x}_n(0)$, a menudo se denomina respuesta homogénea del sistema. Es la respuesta del sistema cuando no está presente función de entrada alguna (sólo hay condiciones iniciales).

La respuesta al término de entrada se obtiene posteriormente.

El segundo término de la ecuación 34-131 es:

$$\int_0^t \Phi(\gamma) \mathbf{B} \mathbf{U}(t - \gamma) d\gamma$$

donde $\Phi(\gamma)$ está dada por la ecuación 34-134 (con t sustituida por γ), \mathbf{B} es una cantidad que se da en la ecuación 34-132, a saber $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, y $\mathbf{U}(t)$ es la función escalón unitario $\mathbf{U}(t) = 1$ para $t > 0$, de manera que $\mathbf{U}(t - \gamma)$ también es igual a uno, en el intervalo de integración $\gamma = "0"$ a " t ". Al insertar todos estos valores se obtiene:

$$\int_0^t \begin{bmatrix} \frac{2e^{-\gamma} - e^{-2\gamma}}{-2e^{-\gamma} + 2e^{-2\gamma}} & \frac{e^{-\gamma} - e^{-2\gamma}}{-e^{-\gamma} + 2e^{-2\gamma}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} [1] d\gamma$$

Si se realizan primero las multiplicaciones de matrices y después se integra:

$$\int_0^t \begin{bmatrix} \frac{e^{-\gamma} - e^{-2\gamma}}{-e^{-\gamma} + 2e^{-2\gamma}} \end{bmatrix} d\gamma = \begin{bmatrix} \frac{1}{-1} \frac{e^{-\gamma} - e^{-2\gamma}}{e^{-\gamma} - e^{-2\gamma}} \end{bmatrix} \begin{matrix} \gamma = t \\ \gamma = 0 \end{matrix} \quad (34-135)$$

Evaluando en los límites:

$$\left[\frac{-e^{-\gamma} + \frac{1}{2}e^{-2\gamma}}{e^{-\gamma} - e^{-2\gamma}} \right] \gamma = t = \left[\frac{-e^{-t} + \frac{1}{2}e^{-2t} - (-e^0 + \frac{1}{2}e^0)}{e^{-t} - e^{-2t} - (e^0 - e^0)} \right]$$

Dado que $e^0 = 1$ y simplificando, se obtiene:

$$\left[\frac{-e^{-t} + \frac{1}{2}e^{-2t} + \frac{1}{2}}{e^{-t} - e^{-2t}} \right] = \text{respuesta al escalón unitario}$$

Combinando el primer término de la ecuación 34-131 (dado por la ec. 34-134) con el segundo término (dado por la ec. 34-135) se produce la respuesta total $\mathbf{x}_n(t)$ del sistema de segundo orden descrito por la ecuación 34-132:

$$\mathbf{x}_n(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2e^{-t} - e^{-2t}}{-2e^{-t} + 2e^{-2t}} & \frac{e^{-t} - e^{-2t}}{-e^{-t} + 2e^{-2t}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{2} - e^{-t} + \frac{1}{2}e^{-2t} \\ \frac{1}{2} - e^{-t} + \frac{1}{2}e^{-2t} \end{bmatrix} \quad (34-136)$$

En muchas situaciones de control comunes, las condiciones iniciales $x_1(0)$ y $x_2(0)$ son cero, antes de aplicar la entrada de escalón unitario de prueba. En esta situación, la respuesta del sistema descrito por la ecuación 34-132 se convierte en:

$$x_n(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} - e^{-t} + \frac{1}{2}e^{-2t} \\ \frac{1}{2} - e^{-t} + \frac{1}{2}e^{-2t} \end{bmatrix} \quad (34-137)$$

Si el sistema fuese mecánico, x_1 sería la posición de salida y x_2 sería la velocidad de salida, conforme al

primer renglón de la ecuación de estado $\dot{x}_1 = x_2$, de la ecuación 34-132. En la figura 34-50 se muestra una gráfica de $x_1(t)$ = posición del sistema y $x_2(t)$ = velocidad del sistema.

Exponencial de matrices

Si el sistema que se investiga fuese de primer orden, la matriz \mathbf{A} de la ecuación 34-129 sería de 1×1 ; es decir, constaría de una sola constante (escalar), por ejemplo a .

En el caso escalar, en el que la matriz \mathbf{A} se reduce a una sola constante (escalar) a , la expresión para $\Phi(t)$ (ec. 34-129) se convierte en:

$$\Phi(t) = L^{-1}\{[sI - A]^{-1}\} = L^{-1}\left\{\frac{1}{s - a}\right\}$$

que da por resultado:

$$\Phi(t) = e^{+at}$$

En el caso no escalar, la matriz de transición $\Phi(t)$ también puede expresarse como una exponencial en forma de serie:

$$\Phi(t) = e^{+|\mathbf{A}|t} \quad (34-138)$$

En este caso, la exponencial de la matriz puede evaluarse en forma cerrada a partir de la ecuación 34-129 [como se ilustra en el ejemplo 34.17 con la ec. 34-134 para $\Phi(t)$], o bien a partir de una serie infinita para e^{+x} , expresada en forma de matriz. Por tanto:

$$e^{+x} = 1 + x + \frac{1}{2!} x^2 + \frac{1}{3!} x^3 + \dots$$

y:

$$e^{|\mathbf{A}|t} = I + [\mathbf{A}]t + \frac{1}{2!} [\mathbf{A}][\mathbf{A}]t^2 + \frac{1}{3!} [\mathbf{A}][\mathbf{A}][\mathbf{A}]t^3 + \dots \quad (34-139)$$

Es posible evaluar la matriz de transición de estado $\Phi(t)$ a partir de $e^{|\mathbf{A}|t}$ dada por la ecuación 34-139, en particular si se programa una computadora para sumar la serie en forma numérica. Si la serie no converge no se puede obtener un resultado finito en esta forma.

Como la matriz de transición de estado $\Phi(t)$ tiene las propiedades de una exponencial, cumple las reglas siguientes:

1. $\Phi(t) = e^{[\mathbf{A}]t}$ = exponencial de matriz = $I + [\mathbf{A}]t + \frac{1}{2!}[\mathbf{A}]^2t^2 + \dots$
2. $\Phi(0) = e^{[\mathbf{A}]0} = [I]$ = matriz identidad.
3. $\Phi^{-1}(t) = e^{-[\mathbf{A}]t} = e^{[\mathbf{A}](-t)} = \Phi(-t)$ = matriz inversa $\Phi(-t)$.
4. $\Phi(t_1 + t_2) = e^{[\mathbf{A}](t_1+t_2)} = e^{[\mathbf{A}]t_1}e^{[\mathbf{A}]t_2} = \Phi(t_1)\Phi(t_2)$.
5. $[\Phi(t)]^2 = e^{[\mathbf{A}]t}e^{[\mathbf{A}]t} = e^{[\mathbf{A}](2t)} = \Phi(2t)$.
6. $[\Phi(t)]^n = \Phi(nt)$.

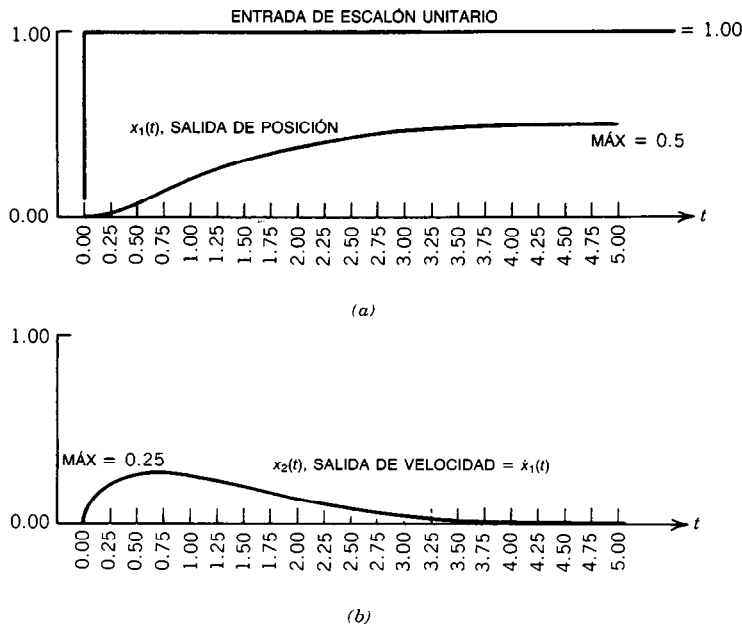


Fig. 34.50. Gráficas de a) $x_1(t)$ y b) $x_2(t)$ para el sistema del ejemplo 34.17. $\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{A}\mathbf{X} + \mathbf{B}\mathbf{U}$, donde $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, \mathbf{U} = escalón unitario, $x_1(t) = 1/2 - e^{-t} + 1/2e^{-2t}$ = respuesta de posición a una entrada de escalón unitario y $x_2(t) = e^{-t} - e^{-2t}$ = respuesta de velocidad a una entrada de escalón unitario. Condiciones iniciales: $x_1(0) = 0$, $x_2(0) = 0$.

34.11 TÉCNICAS DE CONTROL ÓPTIMO

El control óptimo y los conceptos de función de costo e índice de rendimiento se presentaron en la sección 34.10 (ecs. 34-112 a 34-115).

El índice de rendimiento J_3 , dado por la ecuación 34-115 y que se repite aquí, es sólo una opción posible:

$$J_3 = \int_0^{\infty} [K_1 e_n(t)^2 + K_2 U_m(t)^2] dt \quad (34-115)$$

donde K_1, K_2 = constantes de ponderación

$e_n(t)$ = vector de error con n componentes

$U_m(t)$ = vector de control con m componentes

El índice de rendimiento J_3 es importante porque fue uno de los primeros que se utilizaron en el diseño óptimo de un controlador de sistemas. Si se minimiza J_3 entonces también se minimizan el error del sistema $e_n(t)$ y el esfuerzo de control del sistema $U_m(t)$.

A continuación se presenta una lista de otros posibles índices de rendimiento⁸:

$$\int_0^{\infty} e_n^2(t) dt = \text{integral del error cuadrático (ISE) [se usa en la ec. 34-115 para } J_3] \quad (34-140)$$

$$\int_0^{\infty} t e_n^2(t) dt = \text{integral del error cuadrático por el tiempo (ITSE)} \quad (34-141)$$

$$\int_0^{\infty} |e_n(t)| dt = \text{integral del error absoluto (IAE)} \quad (34-142a)$$

$$\int_0^{\infty} t |e_n(t)| dt = \text{integral del tiempo multiplicada por el error absoluto (ITSE)} \quad (34-142b)$$

$$\int_0^{\infty} [e_n^2(t) + \dot{e}_n^2(t)] dt = \text{integral del error cuadrático más el índice de error cuadrático (ISE + ERS)} \quad (34-143)$$

$$\int_0^{\infty} t[|e_n(t)| + |\dot{e}_n(t)|] dt = \text{integral del tiempo por el índice de error absoluto más el índice de error absoluto (ITAE + AER)} \quad (34-144)$$

$$\int_0^{\infty} \mathbf{x}'_n(t) \mathbf{Q} \mathbf{x}_n(t) dt = \text{índice de rendimiento cuadrático} \quad (34-145)$$

donde $\mathbf{x}'_n(t)$ = transpuesta de $\mathbf{x}_n(t)$ · $\mathbf{x}_n(t)$ = vector de estado del sistema. Si el valor final que se busca es el origen, entonces $\mathbf{x}(t)$ actúa como el error del sistema. \mathbf{Q} = matriz positiva definida (o semidefinida):

$$\int_0^{\infty} [\mathbf{x}'_n(t)\mathbf{Q}\mathbf{x}_n(t) + \mathbf{U}'_m(t)\mathbf{R}\mathbf{U}_m(t)] dt = \quad (34-146)$$

= índice de rendimiento cuadrático que pondera el vector de estado del sistema $\mathbf{x}_n(t)$

por medio de la matriz positiva (o semidefinida) \mathbf{Q} , y que pondera el vector de control del sistema $\mathbf{U}_m(t)$ por medio de la matriz positiva definida (o semidefinida) \mathbf{R} .

Por ejemplo, si \mathbf{Q} y \mathbf{R} son matrices diagonales:

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} q_1 & 0 & 0 \\ 0 & q_2 & 0 \\ 0 & 0 & q_3 \end{bmatrix} \quad \mathbf{R} = \begin{bmatrix} r_1 & 0 \\ 0 & r_2 \end{bmatrix}$$

$\mathbf{U}'_m(t)$ = transpuesta del vector de control

entonces la ecuación 34-146 se convierte en:

$$\int_0^{\infty} [q_1 x_1^2(t) + q_2 x_2^2(t) + q_3 x_3^2(t) + r_1 U_1^2(t) + r_2 U_2^2(t)] dt \quad (34-147)$$

Si el error del sistema se define como:

$$e_n(t) = d_n(t) - x_n(t) \quad (34-148)$$

donde $d(t)$ es el estado final que se busca, y si dicho estado es el origen del espacio de estado $d_n(t) = 0$, entonces la ecuación 34-148 se transforma en:

$$e_n(t) = -x_n(t) \text{ y } e_n^2(t) = x_n^2(t) \quad (34-149)$$

Por tanto, en estas circunstancias el término $x(t)$ de la ecuación 34-148 se convierte en $e(t)$ y el índice de rendimiento cuadrático de la ecuación 34-147 se vuelve idéntico al de rendimiento original J_3 dado por la ecuación 34-115, que fue utilizado en 1952 por Bryson²¹. La diferencia es de generalidad. Las formas cuadráticas $\mathbf{x}'_n\mathbf{Q}\mathbf{x}_n$ y $\mathbf{U}'_m\mathbf{R}\mathbf{U}_m$ son más generales que x_n^2 y U_m^2 . Las formas cuadráticas son ventajosas porque permiten aplicar el segundo método de Liapunov (sección 34.9) al diseño de un controlador óptimo.

34.11.1 Optimización por el segundo método de Liapunov

Considérese el sistema:

$$\dot{\mathbf{x}}_n(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}_n(t) \quad (34-150)$$

donde \mathbf{A} = matriz estable, en la que todos los valores característicos de \mathbf{A} tienen partes reales negativas, y $x_n(\infty) = 0$ (el sistema es asintóticamente estable).

El índice de rendimiento por minimizar es el índice de rendimiento cuadrático de la ecuación 34-145, a saber:

$$J = \int_0^{\infty} \mathbf{x}'_n(t)\mathbf{Q}\mathbf{x}_n(t) dt = \int_0^{\infty} \mathbf{x}'\mathbf{Q}\mathbf{x} dt \quad (34-151)$$

donde $\mathbf{x}_n(t)$ se ha sustituido por \mathbf{x} para simplificar la exposición que sigue.

Se selecciona una función de Liapunov positiva definida:

$$V(\mathbf{x}) = \mathbf{x}'\mathbf{P}\mathbf{x} \quad (34-152)$$

Como se postula que el sistema $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}$ es asintóticamente estable, $V(\mathbf{x})$ debe ser negativa definida. Supóngase que puede encontrarse una matriz \mathbf{Q} , tal que la función de Liapunov negativa definida $\dot{V}(\mathbf{x})$ sea:

$$\dot{V}(\mathbf{x}) = -\mathbf{x}'\mathbf{Q}\mathbf{x} \quad (34-153)$$

donde \mathbf{x}' = transpuesta de \mathbf{x} .

La relación que se requiere entre \mathbf{P} y \mathbf{Q} se determina después a partir de las ecuaciones 34-152 y 34-153:

$$\dot{V}(\mathbf{x}) = -\mathbf{x}'\mathbf{Q}\mathbf{x} = \frac{d}{dt} V(\mathbf{x}) = \frac{d}{dt} (\mathbf{x}'\mathbf{P}\mathbf{x}) \quad (34-154)$$

Aplicando la regla de la cadena de la diferenciación y observando que \mathbf{P} es una matriz de constantes, se tiene:

$$\left[\frac{d}{dt} (f_1 f_2) = \dot{f}_1 f_2 + f_1 \dot{f}_2 \right], \quad \left[\frac{d}{dt} f_1 = \dot{f}_1 \right]$$

$$\frac{d}{dt} (\mathbf{x}'\mathbf{P}\mathbf{x}) = \dot{\mathbf{x}}'\mathbf{P}\mathbf{x} + \mathbf{x}'\dot{\mathbf{P}}\mathbf{x} \quad (34-155)$$

Combinando las ecuaciones 34-154 y 34-155:

$$-\mathbf{x}'\mathbf{Q}\mathbf{x} = \dot{\mathbf{x}}'\mathbf{P}\mathbf{x} + \mathbf{x}'\dot{\mathbf{P}}\mathbf{x} \quad (34-156)$$

Pero, a partir de la ecuación 34-150, $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}$, y también se recuerda que la transpuesta de un producto matricial está dada por $(BC)' = C'B'$ o bien $\mathbf{x}' = \mathbf{x}'\mathbf{A}'$.

Insertando estos valores en la ecuación 34-156:

$$-\mathbf{x}'\mathbf{Q}\mathbf{x} = \mathbf{x}'\mathbf{A}'\mathbf{P}\mathbf{x} + \mathbf{x}'\mathbf{P}\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{x}'(\mathbf{A}'\mathbf{P} + \mathbf{P}\mathbf{A})\mathbf{x} \quad (34-157)$$

Por tanto, igualando las matrices de forma cuadrática de los extremos de la ecuación 34-157:

$$-\mathbf{Q} = \mathbf{A}'\mathbf{P} + \mathbf{P}\mathbf{A} \quad \text{o bien} \quad \mathbf{Q} = -[\mathbf{A}'\mathbf{P} + \mathbf{P}\mathbf{A}] \quad (34-158)$$

Así, la hipótesis de que el sistema $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}$ es asintóticamente estable hizo posible determinar \mathbf{Q} en términos de \mathbf{P} y \mathbf{A} aplicando el segundo método de

Liapunov (como lo da la ec. 34-158). Además, el índice de rendimiento J de la ecuación 34-151 se evalúa fácilmente como sigue. Empleando la ecuación 34-154, $-\mathbf{x}'\mathbf{Q}\mathbf{x} = d/dt (\mathbf{x}'\mathbf{P}\mathbf{x})$:

$$J = \int_0^{\infty} \mathbf{x}'\mathbf{Q}\mathbf{x} dt = \int_0^{\infty} -\frac{d}{dt} (\mathbf{x}'\mathbf{P}\mathbf{x}) dt = -\mathbf{x}'\mathbf{P}\mathbf{x} \Big|_0^{\infty}$$

o bien:

$$J = -\mathbf{x}'(\infty)\mathbf{P}\mathbf{x}(\infty) - (-\mathbf{x}'(0)\mathbf{P}\mathbf{x}(0))$$

Como el sistema es estable y $\mathbf{x}(\infty) \rightarrow 0$, como se postula, el término $-\mathbf{x}'(\infty)\mathbf{P}\mathbf{x}(\infty) \rightarrow 0$, y:

$$J = +\mathbf{x}'(0)\mathbf{P}\mathbf{x}(0) \quad (34-159)$$

Por tanto, el índice de rendimiento J está dado por $\mathbf{x}'(0)\mathbf{P}\mathbf{x}(0)$. Si se desea minimizar J con respecto a algún parámetro variable contenido en la matriz de variables de estado \mathbf{A} , entonces se minimiza $\mathbf{x}'(0)\mathbf{P}\mathbf{x}(0)$ con respecto al parámetro variable en vez de minimizar una integral elaborada de J .

\mathbf{P} se encuentra a partir de \mathbf{A} y de \mathbf{Q} (que son cantidades dadas) evaluando la ecuación 34-158, $\mathbf{Q} = -[\mathbf{A}'\mathbf{P} + \mathbf{P}\mathbf{A}]$.

En este problema homogéneo no existe una función activadora de entrada. El sistema responde conforme a sus condiciones iniciales, $\mathbf{x}(0)$, que se pueden considerar la entrada, y donde el valor final es $\mathbf{x}(\infty) \rightarrow 0$. Si un sistema tiene una entrada, este método puede aplicarse sin dificultad definiendo \mathbf{x} como el error del sistema, que debe hacerse cero para que se pueda aplicar esta técnica.

El ejemplo que sigue ilustra el procedimiento.

Ejemplo 34.18⁶. Optimización del coeficiente de amortiguamiento del sistema de segundo orden. Se muestra en la figura 34-51. Es un sistema tipo 1 con un factor único de s en el denominador de $G(s)$, y por tanto el sistema tiene un error de posición igual a cero. Así, el error se puede identificar con las variables de estado y satisfacer la condición $x_n(\infty) \rightarrow 0$ utilizada en la deducción del índice de rendimiento J en la ecuación 34-159. De la figura 34-51, se tiene:

$$\begin{aligned} \frac{C(s)}{R(s)} &= \frac{G}{1+GH} = \frac{G}{1+G} = \frac{1}{s(s+2d)+1} = \\ &= \frac{1}{s^2 + 2ds + 1} \end{aligned} \quad (34-160)$$

donde d es la constante de amortiguamiento de la ecuación característica de segundo orden normalizada $s^2 + 2d\omega_n s + \omega_n^2$, donde $\omega_n = 1$ y $d > 0$.

El problema consiste en determinar el valor óptimo de d que minimice el índice de rendimiento J , cuando el sistema esté sujeto a una entrada de escalón unitario $r(t) = 1, t > 0$:

$$J = \int_0^{\infty} \mathbf{x}'\mathbf{Q}\mathbf{x} dt \quad [\text{dado en la ec. (34-159)}] \quad (34-161)$$

donde:

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_n(t) = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ \dot{x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e \\ \dot{e} \end{bmatrix}$$

y:

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{dado})$$

Ahora se necesita encontrar la ecuación de variables de estado $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}$. De la ecuación 34-160:

$$C(s)[s^2 + 2ds + 1] = R(s) \quad (34-162)$$

Encontrando la transformada inversa de Laplace:

$$\ddot{e}(t) + 2d\dot{e}(t) + e(t) = r(t) \quad (34-163)$$

En base a la exposición inicial, la variable de estado $x(t)$ debe elegirse como el error del sistema $e(t) = x(t) = r(t) - c(t)$. Por tanto:

$$x(t) = r(t) - c(t)$$

$$\dot{x}(t) = 0 - \dot{c}(t) \quad \text{ya que } r(t) = 1 \text{ para } t > 0$$

$$\ddot{x}(t) = 0 - \ddot{c}(t) \quad (34-164)$$

Insertando estas variables en la ecuación 34-163:

$$-\ddot{x}(t) - 2d\dot{x}(t) - x(t) = 0$$

o bien:

$$\ddot{x}(t) + 2d\dot{x}(t) + x(t) = 0 \quad (34-165)$$

Obsérvese que la ecuación 34-165 está en la forma homogénea que se requiere, y no aparece en ella ninguna función de entrada $r(t)$. La entrada se ha incorporado en las condiciones iniciales de $x_n(t)$, que son:

$$x(t)|_{t=0+} = r(0+) - c(0+) = 1 - 0 = 1$$

$$\dot{x}(t)|_{t=0+} = -\dot{c}(0+) = 0 \quad (34-166)$$

Se supone en este ejemplo que el sistema arranca desde el reposo, de manera que $c(0+) = \dot{c}(0+) = 0$. Las ecuaciones 34-165 y 34-166 pueden expresarse ahora en forma de variables de estado:

$$x_1 = x(t)$$

$$x_2 = \dot{x}(t) \quad (34-167)$$

Después, de las ecuaciones 34-167 y 34-165:

$$\dot{x}_1 = \dot{x}(t) = x_2$$

$$\dot{x}_2 = \ddot{x}(t) = -2d\dot{x}(t) - x(t) = -2dx_2 - x_1 \quad (34-168)$$

o, en forma matricial:

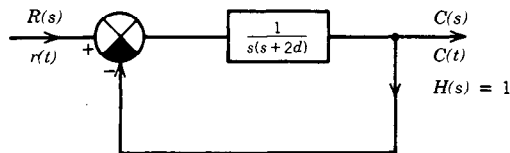


Fig. 34-51. Sistema de segundo orden con amortiguación variable d .

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{G}{1 + GH} = \frac{G}{1 + G} = \frac{1}{s(s + 2d) + 1} = \frac{1}{s^2 + 2ds + 1}$$

$$C(s) [s^2 + 2sd + 1] = R(s)$$

La transformada inversa de Laplace es:

$$\ddot{c}(t) + 2dc(t) + \dot{c}(t) = r(t)$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (34-169)$$

De manera equivalente:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} \quad \text{donde} \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2d \end{bmatrix} \quad (34-170)$$

Dado que la ecuación 34-170 es homogénea y \mathbf{A} es una matriz estable [p. ej., $x_n(\infty) \rightarrow 0$], el valor de J está dado por la ecuación 34-159, que se repite a continuación:

$$J = \mathbf{x}'(0)\mathbf{P}\mathbf{x}(0) \quad (34-159)$$

donde P está dada por la ec. 34-158, que se repite a continuación:

$$\mathbf{Q} = -[\mathbf{A}'\mathbf{P} + \mathbf{P}\mathbf{A}] \quad \text{o bien} \quad \mathbf{A}'\mathbf{P} + \mathbf{P}\mathbf{A} = -\mathbf{Q} \quad (34-158)$$

Insertando los valores conocidos de \mathbf{A} y \mathbf{Q} en la ecuación 34-158 se obtiene:

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -2d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{12} & P_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{12} & P_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \quad (34-171)$$

Como P es la matriz de forma cuadrática, se elige simétrica, con $P_{12} = P_{21}$.

Multiplicando la ecuación 34-171 se produce:

$$\begin{bmatrix} -P_{12} & -P_{22} \\ P_{11} - 2dP_{12} & P_{12} - 2dP_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -P_{12}P_{11} - 2dP_{12} & -P_{22}P_{12} - 2dP_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \quad (34-172)$$

Igualando las "esquinas" o los elementos de la ecuación 34-172:

$$-P_{12} + -P_{12} = -1 \quad (34-173a)$$

$$-P_{22} + P_{11} - 2dP_{12} = 0 \quad (34-173b)$$

$$P_{11} - 2dP_{12} - P_{22} = 0 \quad (34-173c)$$

$$P_{12} - 2dP_{22} + P_{12} - 2dP_{22} = -1 \quad (34-173d)$$

Las ecuaciones 34-173b y c son idénticas. Por tanto, sólo se generan tres ecuaciones independientes, lo cual es una consecuencia de hacer $P_{12} = P_{21}$. Resolviendo la ecuación 34-173a:

$$P_{12} = \frac{1}{2} \quad (34-174a)$$

Insertando $P_{12} = 1/2$ en la ecuación 34-173d resulta:

$$\frac{1}{2} - 2dP_{22} + \frac{1}{2} - 2dP_{22} = -1$$

$$\text{o bien} \quad -4dP_{22} = -2 \quad \text{o bien} \quad P_{22} = \frac{1}{2d} \quad (34-174b)$$

Sustituyendo $P_{12} = 1/2$ y $P_{22} = 1/2d$ en la ecuación 34-173b se obtiene:

$$-\frac{1}{2d} + P_{11} - 2d \frac{1}{2} = 0 \quad \text{o bien} \quad P_{11} = d + \frac{1}{2d} \quad (34-174c)$$

$$\text{o bien} \quad P_{11} = \frac{2d^2 + 1}{2d}$$

Por tanto, el resultado para la matriz \mathbf{P} es:

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} \frac{2d^2 + 1}{2d} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2d} \end{bmatrix} \quad (34-175)$$

El índice de rendimiento $J = \mathbf{x}'(0)\mathbf{P}\mathbf{x}(0)$ es:

$$J = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{2d^2 + 1}{2d} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2d} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (34-176)$$

o bien:

$$J = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{2d^2 + 1}{2d} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix} = \frac{2d^2 + 1}{2d}$$

Para minimizar el índice de rendimiento J con respecto a la razón de amortiguamiento d , sea $\partial J / \partial d = 0$:

$$\frac{\partial J}{\partial d} = \frac{2d(4d) - (2d^2 + 1)2}{(2d)^2} = 0 \quad (34-177)$$

(La derivada se evaluó empleando $(U/V)' = (VU' - UV')/V^2$, donde $U' = \partial U / \partial d$, $V' = \partial V / \partial d$.)

Despejando d :

$$8d^2 - 4d^2 - 2 = 0 \text{ o bien } 4d^2 = 2$$

$$\text{o bien } d = \frac{1}{\sqrt{2}} = 0.707 \quad (34-178)$$

Por tanto el valor óptimo del coeficiente de amortiguamiento d del sistema de segundo orden normalizado dado y la matriz \mathbf{Q} del índice de rendimiento dado es $d = 0.707$, valor que se utilizó mucho antes del advenimiento del control óptimo.

El valor de la razón de amortiguamiento depende de la ponderación de x_1 y x_2 , el error y el índice de error, como lo especifica la matriz \mathbf{Q} . Si sólo el error se pondera y se ignora el índice de error, de manera que \mathbf{Q} se elija como:

$$\mathbf{Q}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (34-179)$$

entonces la solución óptima de la razón de amortiguamiento d se convierte en:

$$d_1 = \frac{1}{2} \quad (34-180)$$

Es posible repetir la solución para la razón de amortiguamiento d cuando se aplican unas operaciones arbitrarias K_1 y K_2 al error y al índice de error, de manera que \mathbf{Q} se elija como \mathbf{Q}_{12} , donde:

$$\mathbf{Q}_{12} = \begin{bmatrix} K_1 & 0 \\ 0 & K_2 \end{bmatrix} \quad (34-181)$$

El resultado para d es d_{12} , donde:

$$d_{12} = \sqrt{\frac{K_1 + K_2}{4K_1}} = \frac{1}{2} \sqrt{1 + K_2/K_1} \quad (34-182)$$

Tabla 34-29. Razón de amortiguamiento óptimo d en función de la ponderación del error y proporción de errores (K_1 = ponderación del error, K_2 = ponderación de la proporción de errores) para el sistema de segundo orden de la figura 34-51

K_2/K_1	d	Significancia de d
0	0.5	Valor mínimo de d que puede ser óptimo
1	0.707	Amortiguamiento óptimo clásico
3	1	Amortiguamiento crítico
> 3	> 1	Sobreamortiguamiento, respuesta lenta

donde K_1 = ponderación del error y K_2 = ponderación del índice de error.

Las siguientes observaciones concernientes a la razón de amortiguamiento d del sistema de segundo orden normalizado que se muestra en la figura 34-51 se pueden tomar de la ecuación 34-182, la cual da el valor óptimo de d que minimiza el índice de rendimiento cuadrático:

$$J = \int_0^\infty [e \quad \dot{e}] \begin{bmatrix} K_1 & 0 \\ 0 & K_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e \\ \dot{e} \end{bmatrix} dt \quad (34-183)$$

donde e = error = x_1 y \dot{e} = índice de error = x_2 .

Observaciones de la ecuación 34-182:

1. El valor mínimo de la razón de amortiguamiento d es 0.5, que se presenta para $K_2/K_1 = 0$ o en el caso de que no se aplique ponderación ($K_2 = 0$) al índice de error.
2. El amortiguamiento óptimo de $d = 0.707$ tiene lugar para $K_2/K_1 = 1$ o si se asignan ponderaciones iguales al error y al índice de error.
3. El amortiguamiento crítico de $d = 1$ se produce para $K_2/K_1 = 3$ o para una ponderación asignada al índice de error con un valor del triple de la del error.
4. Si al índice de error se le asigna una ponderación tres veces mayor que la del error, el sistema óptimo se sobreamortigua y la razón de amortiguamiento d excede de la unidad.

Estos resultados se resumen en la tabla 34-29.

34.12 CÁLCULO DE VARIACIONES

El cálculo de variaciones (o varacional) es tan antiguo como el cálculo y data de la época de Newton y de la Europa Occidental del siglo XVII. El famoso problema del cálculo de variaciones de Newton fue la determinación de la forma de un sólido de revolución con la menor resistencia al movimiento cuando se desplaza en

un fluido. Este problema es de gran interés para los diseñadores de submarinos y aeronaves, y aún se estudia tres siglos después de la época de Newton.

El cálculo de variaciones trata de la determinación de la forma, figura o valor de una cantidad desconocida f , de manera que alguna integral pueda asumir un valor máximo o mínimo J^{22} .

Obsérvese que éste es exactamente el problema de control óptimo, en el que la integral por minimizar es el índice de rendimiento J (también llamado funcional) y la cantidad que se determinará como consecuencia de minimizar J es la entrada de control óptima del sistema U (que es la cantidad incógnita f). Los nombres de los principales contribuyentes al cálculo variacional constituyen una especie de "quién es quién" de las matemáticas que incluye a Newton, Bernoulli, Euler, Lagrange, Legendre, Jacobi y Weierstrass. El método de Euler se estudia aquí porque representa la espina dorsal original del cálculo de variaciones. Sólo se desarrolla la primera variación (en un ejemplo), en la cual se utilizan primeras derivadas. La segunda variación, no se analiza muy a fondo.

El término "variación" se refiere al valor variante de la integral cuando la función f que se integra cambia. El problema general del cálculo de variaciones consiste en minimizar (o maximizar) la integral J_1 :

$$J_1 = \int f(x, y, y') dx \quad (34-184)$$

donde $y' = dy/dx$.

J se varía haciendo que y aumente una cantidad infinitesimal de KV , procedimiento empleado por Lagrange; esto produce:

$$y + KV \quad (34-185)$$

donde K = constante arbitraria infinitesimal y V = una función uniforme regular cualquiera de x , por ejemplo $V = h(x)$, con derivadas regulares contenidas en el intervalo de integración.

La integral variada J_2 es por tanto:

$$J_2 = \int f(x, y + KV, y' + KV') dx \quad (34-186)$$

donde $y' + KV' = dy/dx + K(dV/dx)$ y K es una constante y $V = h(x)$.

El cambio, diferencia o variación entre J_2 y J_1 es:

$$\Delta J = J_2 - J_1 \quad (34-187)$$

Sustituyendo las ecuaciones 34-184 y 34-186 en la 34-187 se obtiene:

$$\Delta J = \int [f(x, y + KV, y' + KV') - f(x, y, y')] dx \quad (34-188)$$

Desarrollando $f(x, y + KV, y' + 30KV')$ en una serie de Taylor con respecto al punto x, y, y' , en potencias de K , el resultado de una sola variable respecto a x_0 es:

$$F(x_0 + h) = F(x_0) + hf'(x_0) + \frac{h^2}{2!} f''(x_0) + \dots \quad (34-189)$$

donde:

$$f'(x_0) = \frac{d}{dx} f(x_0) \quad y \quad f''(x_0) = \frac{d^2}{dx^2} f(x_0) \dots$$

La ecuación 34-188 tiene dos términos que contienen los incrementos KV y KV' de las variables y e y' . Por tanto, se necesita una serie de Taylor en dos variables, con derivadas parciales respecto a las variables y e y' . La diferencia principal es que cuando se utilizan dos variables aparecen términos de derivadas parciales cruzadas (de la forma $\partial^2/\partial y \partial y'$).

Desarrollándose la serie de Taylor se obtiene:

$$\begin{aligned} f(x, y + KV, y' + KV') &= f(x, y, y') + \\ &+ KV \frac{\partial}{\partial y} f(x, y, y') + KV' \frac{\partial}{\partial y'} f(x, y, y') + \\ &+ \frac{K^2 V^2}{2!} \frac{\partial^2}{\partial y^2} f(x, y, y') + \frac{K^2 (V')^2}{2!} \frac{\partial^2}{\partial y'^2} f(x, y, y') + \\ &+ (KV)(KV') \frac{\partial^2}{\partial y \partial y'} f(x, y, y') + \text{términos de orden superior} \end{aligned} \quad (34-190)$$

Cuando la ecuación 34-190 se vuelve a insertar en ΔJ (ec. 34-188), los términos $f(x, y, y')$ se cancelan y ΔJ se puede expresar como:

$$\Delta J = KI_1 + \frac{1}{2} K^2 I_2 + R_3 \quad (34-191)$$

donde $I_1 = \int \left(V \frac{\partial f}{\partial y} + V' \frac{\partial f}{\partial y'} \right) dx$ = primera variación

$$I_2 = \int \left[V^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + 2VV' \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial y'} + (V')^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y'^2} \right] dx =$$

= segunda variación

R_3 = términos restantes del tercer orden o mayor

$$f = f(x, y, y')$$

La ecuación 34-191 se obtiene directamente de los desarrollos en serie de Taylor de dos variables de la ecuación 34-190. El primer término se cancela. Después, simplemente factorizando los términos K y K^2 , las derivadas de primer orden se condensan en una integral (la integral de la primera variación) y las derivadas de segundo orden restantes se agrupan en otra integral (la segunda variación).

La integral de la primera variación se modifica ahora integrando por partes. La regla básica es:

$$\int_a^b U dV = UV|_a^b - \int_a^b V dU \quad (34-192a)$$

El segundo término de la integral de la primera variación, ecuación 34-191, es:

$$\int V' \frac{\partial f}{\partial y'} dx \quad (34-192b)$$

Sea:

$$U = \frac{\partial f}{\partial y'}$$

$$dV = V' dx = \frac{dV}{dx} dx = dV$$

Por tanto:

$$dU = \frac{d}{dx} U dx = \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial y'} \right) dx$$

$$V = V$$

Sustituyendo estos valores en la integral por partes se produce:

$$\int_a^b V' \frac{\partial f}{\partial y'} dx = \left. \frac{\partial f}{\partial y'} V \right|_a^b - \int_a^b V \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial y'} \right) dx \quad (34-193)$$

V representa la variación de la variable y , donde y puede variar en cualquier parte menos en sus puntos extremos o límites, a y b . En estos extremos, y es fija y no puede variar; por tanto, $y + KV = y + 0$ y $V = 0$ en los puntos extremos. Se tiene entonces que:

$$\left. \frac{\partial f}{\partial y'} V \right|_a^b = 0. \quad \left. \frac{\partial f}{\partial y'} \right|_b - 0. \left. \frac{\partial f}{\partial y'} \right|_a = 0 \quad (34-194)$$

Así, la ecuación 34-193 se convierte en:

$$\int V' \frac{\partial f}{\partial y'} dx = - \int V \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial y'} \right) dx \quad (34-195)$$

Cuando este nuevo valor de la primera variación I_1 se vuelve a insertar en la ecuación 34-191 para I_1 , el resultado después de factorizar V es:

$$I_1 = \int V \left\{ \frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial y'} \right) \right\} dx \quad (34-196)$$

Volviendo a la ecuación 34-191 para la variación total $\Delta J = KI_1 + 1/2 K^2 I_2 + R_3$, obsérvese que como K es una cantidad infinitesimal, K^2 es insignificante en comparación con K . La primera variación I_1 domina a ΔJ , de manera que $\Delta J \approx KI_1$. Si K cambia de signo, ΔJ también lo hace (p. ej., una variación incrementaría ΔJ y otra la reduciría). Pero un máximo de ΔJ se caracteriza por un decremento de todas las variaciones posibles, y un mínimo, por un incremento de esas variaciones. En consecuencia, I_1 debe ser cero para que ΔJ sea un mínimo o un máximo. Este resultado, $I_1 = 0$, es:

$$I_1 = 0 = \int V \left\{ \frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial y'} \right) \right\} dx \quad (34-197)$$

V puede ser una función regular arbitraria cualquiera de x y puede ser positiva siempre que $[\partial f / \partial y - (d/dx)(\partial f / \partial y')]$ sea positivo, y negativa cuando sea negativo. Por tanto, el producto de V y $\{\partial f / \partial y - (d/dx)(\partial f / \partial y')\}$ podría ser siempre positivo y, en consecuencia, la integral no podría desaparecer (a menos que el término entre llaves fuera siempre idénticamente cero).

El resultado final es que la integral original se minimiza o se maximiza si la primera variación I_1 es cero, lo que ocurre si:

$$\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial y'} \right) = 0 \quad (34-198)$$

donde $f = f(x, y, y')$; $y' = dy/dx$.

Euler dedujo esta ecuación por primera vez en 1744. A menudo recibe el nombre de ecuación característica o ecuación de Euler, como otras ecuaciones producto de su genio. Ésta representa la primera de varias pruebas esenciales que deben satisfacerse para que una integral de la forma de la ecuación 34-184 tenga un máximo o un mínimo.

La ecuación de Euler del cálculo variacional (la ecuación característica) puede simplificarse si la integral $f(x, y, y')$ no contiene las tres variables posibles x , y e y' .

Caso I. No hay variable y . En este caso $f(x, y, y')$ se convierte en $f(x, y')$, de modo que $\partial f / \partial y = 0$ e, insertando esto en la ecuación 34-198, se produce:

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial y'} \right) = 0 \quad (34-199)$$

Como la derivada de una constante es cero, $(d/dx)(K_1) = 0$, el resultado final es:

$$\frac{\partial f}{\partial y'} = K_1 \quad (34-200)$$

donde $K_1 =$ constante arbitraria
 $f(x, y, y') = f(x, y')$ (sin variable y)
 $y' = dy/dx$

Caso II. No hay variable x . En este caso $f(x, y, y')$ se convierte en $f(y, y')$. Así, calculando la derivada parcial total de $f(y, y')$ con respecto a x :

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial y} f(y, y') \frac{dy}{dx} + \frac{\partial}{\partial y'} f(y, y') \frac{dy'}{dx}$$

o bien:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y} y' + \frac{\partial f}{\partial y'} y''$$

donde $dy'/dx = (d/dx)(dy/dx) = d^2y/dx^2 = y''$.

De la ecuación 34-198:

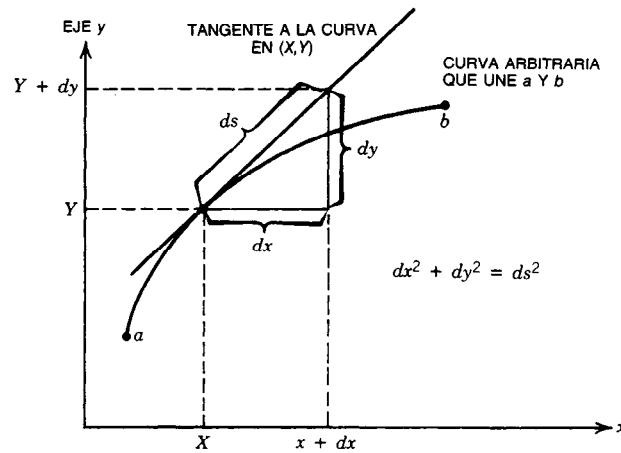


Fig. 34-52. Cálculo de variaciones, ejemplo 34.19, para hallar la curva más corta que une los puntos a y b . $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$ = incremento aproximado en la longitud de arco, para un incremento en x igual a dx .

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial y'} \right)$$

Sustituyendo la expresión de $\partial f / \partial y$ en la anterior para $\partial f / \partial x$:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial y'} \right) y' + \frac{\partial f}{\partial y'} y''$$

Integrando con respecto a x y observando que todos los términos son constantes respecto a x excepto $d/dx(\partial f / \partial y')$ se produce:

$$f = \frac{\partial f}{\partial y'} y' + K_2 \quad (34-201)$$

donde K_2 = constante arbitraria, el resultado de $\int (\partial f / \partial y') y'' dx = K_2$ entre los límites de x constante.

$$f(x, y, y') = f(y, y') \quad (\text{no hay variable } x)$$

$$y' = dy/dx$$

Estos resultados del cálculo de variaciones se emplearán ahora en un ejemplo ilustrativo. Una curva arbitraria, que está en un plano, conecta los puntos a y b . El cálculo de variaciones se empleará para determinar la ecuación de la curva que tenga la distancia más corta entre a y b . Aunque el problema es comparativamente simple y el resultado, una línea recta, es bien conocido, el procedimiento ilustra la aplicación del cálculo de variaciones en forma amplia. Forsyth²³ y Bliss²⁴ presentan otros ejemplos.

Ejemplo 34.19. Cálculo de variaciones. Determinar la ecuación de la curva en un plano que presenta la distancia más corta entre dos puntos.

Los puntos a y b y la curva arbitraria que los une se muestran en un sistema de coordenadas $x - y$ en la figura 34-52.

A partir de la figura, el incremento ds en la longitud del arco que se extiende a lo largo de la curva arbitraria que conecta los puntos a y b está dado por:

$$ds = [dx^2 + dy^2]^{1/2} \quad (34-202)$$

Factorizando dx^2 :

$$ds = \left[\left(1 + \frac{dy^2}{dx^2} \right) \right]^{1/2} dx \quad (34-203)$$

Representando dy/dx por y' :

$$ds = [1 + (y')^2]^{1/2} dx \quad (34-204)$$

Integrando ds para determinar la distancia total entre los puntos a y b :

$$\int_a^b ds = \text{distancia} = \int_a^b [1 + (y')^2]^{1/2} dx = J = \int f dx \quad (34-205)$$

Para obtener la curva de la distancia más corta entre los puntos a y b , debe minimizarse la integral J . Esto se logra mediante la aplicación del cálculo de variaciones y, en particular, la ecuación de Euler (ec. 34-198):

$$\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial y'} \right) = 0$$

donde $f = f(x, y, y') = [1 + (y')^2]^{1/2}$ = integrando e $y' = dy/dx$. Obsérvese que en este caso particular el integrando f es sólo una función de dy/dx o y' .

El integrando f no es función de x ni de y . Por tanto, como se explica en el desarrollo de la ecuación de Euler, esta ecuación se simplifica a los dos casos especiales que dan las ecuaciones 34-200 y 34-201:

$$\frac{\partial f}{\partial y'} K_1 \text{ no figura ninguna } y \text{ en } f \quad (34-200)$$

o bien:

$$f(x, y, y') \rightarrow f(x, y') \text{ donde } y' = dy/dx \quad (34-201)$$

$$f = y' \frac{\partial f}{\partial y'} + K_2 \text{ (no figura ninguna } x \text{ en } f)$$

o bien:

$$f(x, y, y') \rightarrow f(y, y') \text{ donde } y' = dy/dx$$

El procedimiento de solución es evaluar $\partial f/\partial y'$ e insertar este valor en la ecuación 34-201, que contiene K_2 , y después insertar el resultado en la ecuación 34-200, que contiene K_1 . Evaluando primero $\partial f/\partial y'$ mediante el uso de f como se especifica en la ecuación 34-205, se tiene:

$$\frac{\partial f}{\partial y'} = \frac{\partial}{\partial y'} [1 + (y')^2]^{1/2}$$

Si se recuerda que:

$$\frac{d}{dy'} x^m = m x^{m-1} \frac{dx}{dy'}$$

donde $m = 1/2$ y $m - 1 = -1/2$:

$$x = [1 + (y')^2]$$

$$dx/dy' = 2(y')$$

o bien:

$$\frac{\partial f}{\partial y'} = \frac{1}{2} [1 + (y')^2]^{-1/2} 2(y')$$

o bien:

$$\frac{\partial f}{\partial y'} = y' [1 + (y')^2]^{-1/2} \quad (34-206)$$

Insertando este resultado en la ecuación 34-201, junto con el valor de $f = [1 + (y')^2]^{1/2}$ se obtiene la expresión:

$$f = y' \frac{\partial f}{\partial y'} + K_2$$

$$f = [1 + (y')^2]^{1/2} = y' y' [1 + (y')^2]^{-1/2} + K_2$$

Multiplicando por $[1 + (y')^2]^{1/2}$:

$$[1 + (y')^2] = (y')^2 + K_2 [1 + (y')^2]^{1/2}$$

Cancelando los términos $(y')^2$:

$$1 = K_2 [1 + (y')^2]^{1/2}$$

Despejando K_2 :

$$K_2 = [1 + (y')^2]^{-1/2} = \text{constante} \quad (34-207)$$

Ahora, si $[1 + (y')^2]^{-1/2}$ es constante, entonces $[1 + (y')^2]$ e y' también deben serlo. Representando la última constante por m :

$$y' = m$$

o bien:

$$\frac{dy}{dx} = m \quad (34-208)$$

o bien:

$$dy = m dx$$

o bien:

$$\int dy = \int m dx$$

o bien:

$$y = mx + C \quad (34-209)$$

donde C = constante de integración y $m = y' = dy/dx$.

La ecuación 34-209, que es la de una recta con pendiente m y ordenada al origen C , es el resultado que se busca.

También se puede obtener sustituyendo la ecuación 34-206 por $\partial f/\partial y'$ en la ecuación 34-200, es decir, $\partial f/\partial y' = K_1$. El resultado es:

$$\frac{\partial f}{\partial y'} = y' [1 + (y')^2]^{-1/2} = K_1 \quad (34-210)$$

De la ecuación 34-207, $[1 + (y')^2]^{-1/2} = K_2$. Sustituyendo este resultado en la ecuación 34-210:

$$y' K_2 = K_1 \quad (34-211)$$

Por tanto, y' es una constante, como ya se demostró, y se obtiene el mismo resultado final. La ecuación de la curva de distancia mínima que conecta dos puntos en un plano es la línea recta:

$$y = mx + C \quad (34-212)$$

donde $m = dy/dx$ = pendiente y C = constante = ordenada al origen.

34.13 PROGRAMACIÓN DINÁMICA

La programación dinámica, una de las técnicas de optimización más útiles de que se dispone, fue generada principalmente por Bellman en la década de 1950²⁵. El concepto central de la programación dinámica implica un "proceso de decisión de etapas múltiples"²⁶ por medio del cual un problema complejo se divide en n etapas individuales. Cada etapa implica un proceso de decisión independiente, cuyos resultados se utilizan en

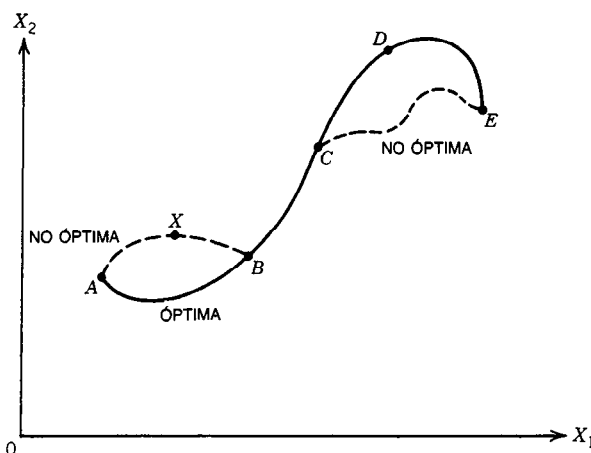


Fig. 34-53. Trayectorias óptimas en el espacio de estados. Aquí las trayectorias óptimas (suponiendo que se ha demostrado que $ABCDE$ es óptima), son: 1) AB ; 2) BC ; 3) CD ; 4) DE ; 5) ABC ; 6) BCD ; 7) CDE ; 8) $ABCD$; 9) $BCDE$. Las trayectorias no óptimas son: 1) AXB en lugar de AB ; 2) CE en lugar de CDE ; 3) $AXBCE$ en lugar de $ABCDE$.

la etapa siguiente. Por tanto, la solución avanza por una serie de procesos de decisión, donde cada uno se basa en sus predecesores. Cada proceso de decisión de un problema dado se relaciona con una clase de problemas similares, o está "inmerso" en ellos, que aumentan en complejidad conforme crece n .

Una restricción importante sobre el tipo de problemas lineales o no lineales que se pueden resolver por medio de la programación dinámica se relaciona con la separabilidad o independencia de los procesos de decisión individuales, un requisito que se describe por medio del término "proceso de Markov" o "markoviano".

Un proceso de Markov tiene la propiedad de que después de un número cualquiera de decisiones, donde cada una afecta el estado del sistema, los efectos de las decisiones remanentes dependen únicamente del estado del sistema en el momento en que se toman estas decisiones. Por tanto, las decisiones pasadas no tienen efecto sobre las decisiones futuras fuera de determinar el estado presente del sistema. Obsérvese que muchos problemas de programación dinámica se resuelven en forma invertida, de manera que el significado de pasado y futuro con respecto al tiempo real se puede invertir sin que se modifique la independencia de las decisiones que constituyen el proceso de Markov.

Bellman describió este proceso de decisión independiente como su "principio de optimalidad", el cual establece que una política óptima tiene la propiedad de que cualesquiera que sean el estado y la decisión iniciales, las decisiones restantes deben constituir una política óptima en relación con el estado resultante de la primera decisión.

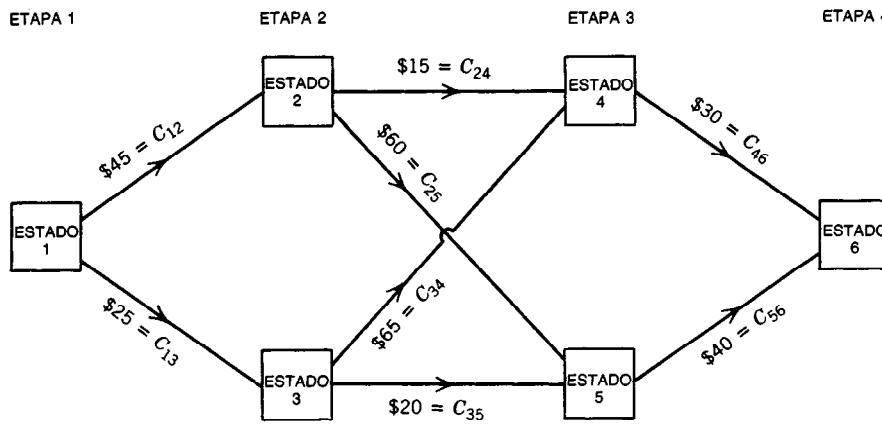
Mediante este proceso de decisión paso por paso, o política óptima, la programación dinámica produce "relaciones de recurrencia" que relacionan una solución óptima con la siguiente y así sucesivamente.

La figura 34-53 ilustra la forma en que una trayectoria o proceso de decisión óptimo se constituye de segmentos que también son trayectorias óptimas. Por tanto, si la trayectoria $ABCDE$ de la figura es óptima, entonces la trayectoria óptima entre AB es simplemente un segmento truncado de $ABCDE$, y no alguna trayectoria alternativa no óptima, como la trayectoria AXB (que se muestra en la figura).

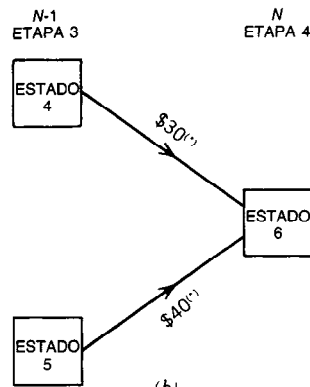
Un ejemplo de problema de programación dinámica discreta de cuatro etapas son los cuatro pasos de la figura 34-54, donde la trayectoria óptima se encuentra por medio de un proceso de solución invertido. Para este problema, con estados inicial y final únicos, también existe una solución "hacia delante" o progresiva, como se muestra en la figura 34-55. Obsérvese que en el tercer paso de la figura 34-54 se eliminaron las trayectorias 2-5-6 y 3-4-6, de manera que también se eliminaron los cálculos de costos futuros en que intervienen estas dos trayectorias (no se tienen que evaluar todas las trayectorias).

En el caso de un problema de 100 etapas, la simplificación es más notable que en el ejemplo de cuatro etapas que se ilustró.

Los ejemplos discretos de programación dinámica de las figuras 34-54 y 34-55 son relativamente fáciles de entender. Por desgracia, la mayor parte de los problemas de control son continuos. El proceso de decisión invertido de etapas múltiples aún se puede aplicar en este caso, con el fin de determinar la trayectoria óptima. Se emplea una medida de rendimiento continuo que es una integral del tiempo de alguna función de error o pérdida de las variables del sistema. Por tanto, el objetivo consiste en minimizar esta integral y de este modo minimizar el error o pérdida. Por ejemplo, se podría elegir una medida de rendimiento P como la integral de la suma de los cuadrados del error del sistema y la entrada de control u :



(a)



(b)

Fig. 34-54. Ejemplo de programación dinámica:

a) **Paso 1.** Costos de la transición de estados. Los costos podrían ser tarifas aéreas entre estados geográficos, y los estados matemáticos podrían ser estados geográficos. El problema consiste en encontrar la ruta o trayectoria con el menor costo del estado 1 (etapa 1) al estado 6 (etapa 4).

Tabla de costo		
C_{ij}		Costo
C_{12}	→	45
C_{13}	→	25
C_{24}	→	15
C_{25}	→	60
C_{34}	→	65
C_{35}	→	20
C_{46}	→	30
C_{56}	→	40

b) **Paso 2.** Trayectorias de costo mínimo de la solución hacia atrás entre los estados de la etapa $N - 1 = 3$ y la etapa $N = 4$. Como sólo hay una elección posible entre los estados 4 y 6 y 5 y 6, esa elección se toma como la trayectoria de costo mínimo (*) (= costo mínimo total al estado 6).

Tabla de costo	
Trayectoria	Costo
4-6	\$30(*)
5-6	\$40(*)

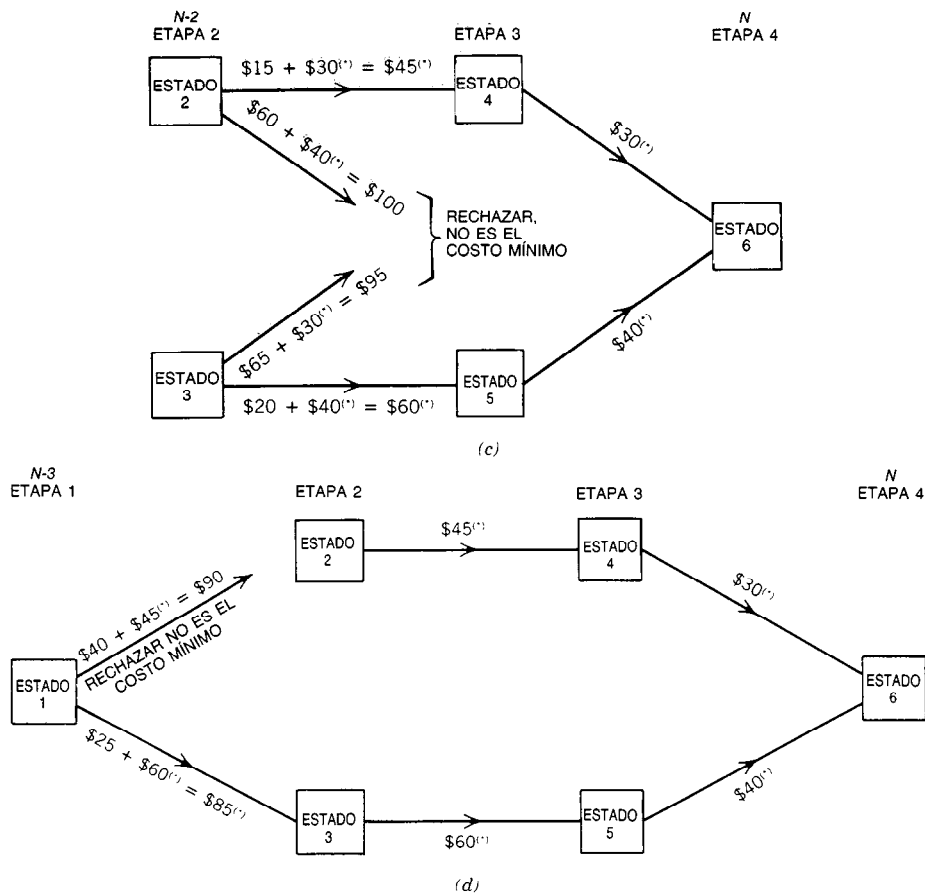


Fig. 34-54 (cont.). Ejemplo de programación dinámica:

c) **Paso 3.** Trayectorias de costo mínimo total de la solución hacia atrás entre el estado de la etapa $N - 2 = 2$ y la etapa $N = 4$. Con los valores de costo mínimo [$\$30(*)$ y $\$40(*)$] [= costo mínimo total al estado 6] de la etapa de decisión anterior se calculan los costos totales de los estados 2 a 6 y 3 a 6. A partir de los cuatro resultados se eligen las dos trayectorias de costo mínimo.

Tabla de costo	
Trayectoria	Costo
2-4-6	\$ 45(*)
2-5-6	\$100
3-4-5	\$ 95
3-5-6	\$ 60(*)

d) **Paso 4.** Trayectoria de costo mínimo total de la solución hacia atrás entre la etapa $1 = N - 3$ y la etapa $4 = N$. Obsérvese que nunca tuvieron que evaluarse las trayectorias 1-2-5-6 y 1-3-4-6, ya que las trayectorias 2-5-6 y 3-4-6 se eliminaron en el paso 3. Con los valores de costo mínimo [$\$45(*)$ y $\$60(*)$] de la etapa de decisión anterior se calcula el costo total de las etapas 1 a 6. A partir de los dos resultados, se elige el mínimo. El resultado de costo mínimo total es la trayectoria 1-3-5-6.

Tabla de costo	
Trayectoria	Costo
1-2-4-6	\$90
1-3-5-6	\$85(*)
(*) = costo mínimo total al estado 6	

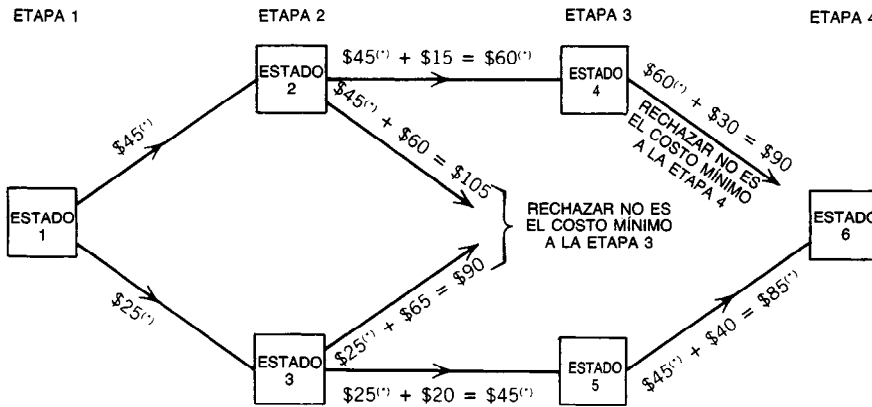


Fig. 34-55. Ejemplo de programación dinámica, pasos 2, 3 y 4 combinados. Trayectoria de costo mínimo de la solución hacia adelante entre los estados 1 y 6, etapas 1 y 4. Se utiliza el mismo procedimiento, pero en orden inverso respecto al de los pasos 2, 3 y 4 de la figura 34-54 de la solución hacia atrás. La trayectoria de costo mínimo final es la misma, estados 1-3-5-6, con un costo de \$85.

Tabla de costo	
Trayectoria	Costo
1-2-4-6	\$90
1-3-5-6	\$85(*)

$$P = \min \int_{t_0}^{t_f} [(c - r)^2 + u^2] dt \quad (34-213)$$

donde P = medida de rendimiento por minimizar

c = salida del sistema

t_0 = tiempo inicial

t_f = tiempo final

r = entrada del sistema

u = esfuerzo de control (como el consumo de combustible)

$c - r$ = error del sistema

Obsérvese que todas estas variables son funciones del tiempo; por tanto, $c = c(t)$, $r = r(t)$, etc.

La integral continua de la ecuación 34-213, abreviada por el signo de integral \int , se puede dividir en n partes, cada una de duración Δt segundos. Cada una de estas partes se manipula entonces como parte de un problema de programación dinámica de n etapas.

Para el primer incremento, suponiendo que $t_0 = 0$:

$$P = \int_0^{t_f} = \int_0^{\Delta t} + \int_{\Delta t}^{t_f} \quad (34-214)$$

Una aproximación de n etapas podría evaluarse numéricamente como se muestra a continuación:

$$P = \int_0^{t_f} = \int_0^{\Delta t} + \int_{\Delta t}^{2\Delta t} + \int_{2\Delta t}^{3\Delta t} + \int_{(n-1)\Delta t}^{n\Delta t=t_f} \quad (34-215)$$

Como cada una de las integrales de la ecuación 34-215 se evalúa respecto a un intervalo Δt muy corto, cada integral se aproxima por medio del producto del integrando y Δt , que se evalúa en los límites dados.

Por ejemplo, evaluando el integrando dado por la ecuación 34-213 en los límites $2\Delta t$ a $3\Delta t$, se produce:

$$\int_{2\Delta t}^{3\Delta t} \cong \{[c(t) - r(t)]^2 + u(t)^2\} \Big|_{t=2\Delta t}^{t=3\Delta t} \cdot (\Delta t) \quad (34-216)$$

o bien:

$$\int_{2\Delta t}^{3\Delta t} \cong \{[c(2\Delta t) - r(2\Delta t)]^2 + u(2\Delta t)^2\} \Delta t \quad (34-217)$$

Conforme al principio de optimalidad, cada integral de la ecuación 34-215 debe minimizarse a su vez, con el fin de minimizar la medida de rendimiento P . Pero cada integral se puede evaluar en forma aritmética (ec. 34-217). Por tanto, el problema será minimizar n expresiones aritméticas de la forma de la ecuación 34-217. El esfuerzo de control $u(t)$ suele estar restringido, y a $u(t)$, $c(t)$ y $r(t)$ se les asignan valores discretos para la evaluación numérica. Mickle y Sze²⁷ y Elgerd²⁸ dan ejemplos detallados. Si se busca una solución continua y no discreta, se puede demostrar que la medida de rendimiento P es minimizada por la solución de la ecuación de Hamilton-Jacobi (que produce la política del control óptimo).

En problemas de este tipo, el sistema suele describirse por medio de variables de estado $x(t)$ (véase la sec. 34.10). La medida de rendimiento P que debe minimizarse se expresa en términos de estas variables de estado $x(t)$ y la o las entradas de control $u(t)$:

$$P = \int_{t_0}^{t_f} g(x, u, t) dt \quad (34-218)$$

donde t = tiempo

$u = u(t)$ = vector de control

$x = x(t)$ = vector variable de estado

g = función integrando

P = medida de rendimiento por minimizar

Ahora el valor mínimo de la medida de rendimiento P se denota por el símbolo especial J . Por tanto, J será una función del tiempo inicial t_0 y el estado inicial $x(t_0) = x_0$:

$$J = J(x_0, t_0) = \int_{t_0}^{t_f} g(x^*, u^*, t) dt \quad (34-219)$$

donde x^* = trayectoria de la variable de estado óptima = $x^*(t)$, y u^* = control óptimo = $u^*(t)$. Las ecuaciones de variables de estado que describen el sistema son:

$$\dot{x} = f[x, u, t] \quad (34-220)$$

donde f = función de variables de estado. La ecuación de Hamilton-Jacobi²⁹ resultante es:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial J(x_0, t_0)}{\partial t_0} + g(x_0^*, u_0^*, t_0) + \\ & + \left[\frac{\partial J(x_0, t_0)}{\partial x_0} \right]^T f(x_0^*, u_0^*, t_0) = 0 \end{aligned} \quad (34-221)$$

Kirk³⁰, Moore³¹ y Sage⁹ dan varios ejemplos que demuestran la solución de la ecuación de Hamilton-Jacobi³. Todos éstos son problemas relativamente simples, debido a que la ecuación de Hamilton-Jacobi, al igual que la mayor parte de las ecuaciones diferenciales parciales, no se puede resolver fácilmente en general y en algunos casos es irresoluble. Por esta causa, la ecuación de Hamilton-Jacobi se utiliza con mucha frecuencia para verificar la optimalidad de una solución específica más que como el medio para obtener la solución³². Hadley³³, McMillan³⁴ y Owens³⁵ proporcionan unos buenos conocimientos de los diversos métodos de programación.

34.14 MÉTODO DEL MULTIPLICADOR DE LAGRANGE

El método del multiplicador de Lagrange se aplica para maximizar o minimizar una función $f(x)$ dada, sujeta a diversas restricciones $C_i(x)$ que limitan el intervalo de las componentes del vector x ³⁶.

Función por maximizar o minimizar

$$f(x) = f(x_1, x_2, x_3, \dots) \quad (34-222)$$

i -ésima ecuación de restricción

$$C_i(x) = C_i(x_1, x_2, x_3, \dots) \quad (34-223)$$

Cuando se cumple la restricción, $C_i(x) = 0$.

El término λ_i es el multiplicador de Lagrange. Cada término $C_i(x)$ se multiplica por λ_i , es decir, por $\lambda_1 C_1(x) + \lambda_2 C_2(x)$, etc.

Función de Lagrange

$$L = f(x) + \sum_i \lambda_i C_i(x) \quad (34-224)$$

que se diferencia. La maximización o minimización de $f(x)$, sujeta a las restricciones $C_i(x)$, está dada por la solución de las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_1} L &= 0 & \frac{\partial}{\partial \lambda_1} L &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial x_2} L &= 0 & \frac{\partial}{\partial \lambda_2} L &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial x_3} L &= 0 & \frac{\partial}{\partial \lambda_3} L &= 0 \\ &\vdots & &\vdots \end{aligned} \quad (34-225)$$

En muchos problemas sólo puede existir una restricción y, por tanto, solamente un λ (es decir λ_1), mientras que puede haber muchas componentes de x (es decir, x_1, x_2 y x_3).

Las ecuaciones $(\partial/\partial x_i) L = 0$, simplemente vuelven a producir las i -ésimas ecuaciones de restricción correspondientes. Obsérvese que cuando se cumplen todas las restricciones, el término $\sum_i \lambda_i C_i$ se hace cero, y la maximización de L de la ecuación 34-215 se convierte en la maximización ordinaria de $f(x)$.

El procedimiento se ilustra mejor con dos ejemplos simples. Obsérvese que todas las derivadas son parciales, donde todas las variables se tratan como constantes, salvo la variable que interviene en la diferenciación.

Ejemplo 34.20. Ejemplo 1 del multiplicador de Lagrange. Maximizar el volumen de un tanque cilíndrico sin tapa, sujeto a la restricción de que la cantidad de material de que se dispone para construirlo tiene un área de A metros cuadrados.

Paso 1. Se determina la función por maximizar, $f(x_1, x_2, x_3, \dots)$. Existen dos variables, H y R (fig. 34-56a). Sea $x_1 = R$, $x_2 = H$:

$$f(x) = f(x_1, x_2) = \text{volumen del tanque}$$

$$f(x) = \pi R^2 H = \pi x_1^2 x_2$$

Paso 2. Se determina la ecuación de restricción y se iguala a cero. Existe una restricción (el área de la superficie del tanque es igual a A); en consecuencia un λ :

$$C_1 = \text{área del tanque} - A = 0$$

$$C_1 = \text{área lateral más área de la base} - A = 0$$

[†]Ejemplo 4.4-1, pág. 77; ejemplo 4.4-2, pág. 79; ejemplo 4.4-3, pág. 81.

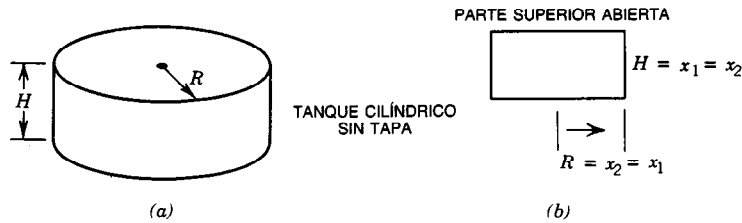


Fig. 34-56. Diagrama del ejemplo 34.20, primer ejemplo del multiplicador de Lagrange. a) Tanque cilíndrico abierto por arriba. R = radio del tanque, H = altura del tanque. b) Vista lateral del tanque. $x_1 = x_2$ o $H = R$ para el volumen máximo de un tanque cilíndrico abierto por arriba.

$$C_1 = 2\pi RH + \pi R^2 - A = 0$$

$$C_1(x_1, x_2) = 2\pi x_1 x_2 + \pi x_1^2 - A = 0$$

Paso 3. Se construye la función de Lagrange:

$$L = f(x) + \lambda_1 C_1(x_1, x_2)$$

$$L = \pi x_1^2 x_2 + \lambda_1 (2\pi x_1 x_2 + \pi x_1^2 - A)$$

Paso 4. Se encuentran las derivadas parciales de L con respecto a x_1 , x_2 y λ_1 y se igualan a cero:

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = 2\pi x_1 x_2 + \lambda_1 (2\pi x_2 + 2\pi x_1) = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_2} = \pi x_1^2 + \lambda_1 (2\pi x_1) = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda_1} = 2\pi x_1 x_2 + \pi x_1^2 - A = 0$$

Paso 5. Se despejan x_1 , x_2 y λ . A partir de $\partial L / \partial x_2$, se divide entre πx_1 , para obtener:

$$x_1 + 2\lambda_1 = 0 \text{ o bien } x_1 = -2\lambda_1$$

Sustituyendo $x_1 = -2\lambda_1$ en $\partial L / \partial x_1$:

$$2\pi (-2\lambda_1)x_2 + \lambda_1 [2\pi x_2 + 2\pi (-2\lambda_1)] = 0$$

Multiplicando:

$$-4\pi \lambda_1 x_2 + 2\pi \lambda_1 x_2 - 4\pi \lambda_1^2 = 0$$

Agrupando términos:

$$-2\pi \lambda_1 x_2 - 4\pi \lambda_1^2 = 0$$

Cancelando $(-2\pi \lambda_1)$:

$$x_2 + 2\lambda_1 = 0 \text{ o bien } x_2 = -2\lambda_1$$

Pero antes se determinó que $x_1 = -2\lambda_1$. Por tanto, $x_1 = x_2$, o el radio del tanque R es igual a la altura H . Esto da la solución general para la forma de un tanque

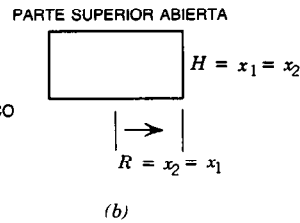


Fig. 34-57. Diagrama del ejemplo 34.21, segundo ejemplo del multiplicador de Lagrange. Vista lateral del tanque cilíndrico cerrado por arriba. $H = -4\lambda$, $R = -2\lambda$, $H = 2R$, o bien $x_1 = 2x_2$. $H = x_1 = 2x_2 = 2R$ para el volumen máximo de un tanque cilíndrico cerrado por arriba.

sin tapa con el máximo volumen. Obsérvese que el tanque es dos veces más ancho que alto. Las dimensiones reales, sujetas a la restricción área del tanque = A , ahora se determina sin dificultad a partir de:

$$\partial L / \partial \lambda_1 = 2\pi x_1 x_2 + \pi x_1^2 - A = 0$$

Insertando $x_2 = x_1$ en $\partial L / \partial \lambda_1$:

$$2\pi x_1 x_1 + \pi x_1^2 = A$$

Agrupando términos:

$$3\pi x_1^2 = A$$

Despejando x_1 :

$$x_1 = \sqrt{A/3\pi} = x_2$$

Obsérvese que no fue necesario el valor real de λ_1 para encontrar x_1 y x_2 . λ_1 se halla sin dificultad a partir de $x_1 = x_2 = -2\lambda_1$ o de $\lambda_1 = -2x_1 = -2\sqrt{A/3\pi}$. En la figura 34-56b se muestra una vista lateral del tanque.

Ejemplo 34.21. Ejemplo 2 del multiplicador de Lagrange. Si se repite el problema para un tanque cerrado, el área de la tapa se debe sumar a la ecuación de restricción (fig. 34-57). Esto agrega un segundo término πR^2 al paso 2. En consecuencia, la función de Lagrange del paso 3 se convierte en:

$$L = \pi R^2 H + \lambda (\pi R^2 + \pi R^2 + 2\pi RH - A)$$

Resolviendo esta expresión de la misma forma que en el ejemplo anterior, se produce:

$$R = -2\lambda, \quad H = -4\lambda, \quad \text{o bien} \quad H = 2R$$

Nótese que el tanque cerrado parece cuadrado en una vista lateral (fig. 34-57), en comparación con el tanque sin tapa (fig. 34-56b), que es dos veces más ancho que alto. Ambos tanques tienen el máximo volumen posible, sujetos a la restricción de un área superficial fija. Sin embargo, los volúmenes son diferentes.

Se obtienen soluciones diferentes porque se plantean dos problemas diferentes, un tanque sin tapa y otro con tapa.

La técnica de Lagrange permite encontrar la solución óptima a un problema de diseño especificado sujeto a restricciones. Es labor del diseñador formular el diseño óptimo, o sea, elegir un tanque cilíndrico sin tapa, uno rectangular, o bien un tanque elíptico o de otro tipo. La técnica de maximización o minimización de Lagrange optimiza un diseño elegido, pero no lo produce.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

1. O. Mayr, "The Origins of Feedback Control", *Scient. Am.*, pp. 110-118.
2. O. Mayr, *The Origins of Feedback Control*, MIT Press, Cambridge.
3. A. R. Ramsey, "The Thermostat or Heat Governor", *Trans. Newcomen Soc.* 25:53-54, citado en referencia 2.
4. T. Mead, "Regulation for Wind and Other Mills", British Patent (Old Series), núm. 1484, 1787, citado en referencia 2.
5. R. H. MacMillan, *Automation, Friend or Foe?*, Cambridge University Press, Cambridge.
6. K. Ogata, *Modern Control Engineering*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ.
7. B. C. Kuo, *Automatic Control Systems*, 4.^a ed., Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ.
8. S. M. Shinnars, *Modern Control System Theory and Application*, 2.^a ed., Addison-Wesley, Reading, MA.
9. M. F. Gardner y J. L. Barnes, *Transients in Linear Systems*, Wiley, Nueva York.
10. J. J. D'Azzo y C. H. Houpis, *Linear Control System Analysis and Design; Conventional and Modern*, McGraw-Hill, Nueva York.
11. W. R. Evans, "Graphical Analysis of Control Systems", *AIEE Trans.* 67(parte II):547-551.
12. S. M. Shinnars, "How to Approach the Stability Analysis and Compensation of Control Systems", *Control Eng.*
13. J. T. Tou, *Digital and Sampled-Data Control Systems*, McGraw-Hill, Nueva York.
14. J. A. Cadzow, *Discrete Time Systems*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ.
15. R. Bellman, I. Glicksberg y O. Gross, "On the Bang-Bang Control Problem", *Q. Appl. Math.* 14:11-18.
16. J. P. LaSalle, en *Contributions to Differential Equations*, Vol. 5, Princeton University Press, Princeton, NJ, pp. 1-24.
17. J. E. Gibson, *Nonlinear Automatic Control*, McGraw-Hill, Nueva York.
18. D. Graham y D. McRuer, *Analysis of Nonlinear Control Systems*, Wiley, Nueva York.
19. J. LaSalle y S. Lefschetz, *Stability by Liapunov's Direct Method, with Applications*, Academic, Nueva York.
20. V. M. Popov, "Absolute Stability of Nonlinear Systems of Automatic Control", *Automat. Rem. Contr.* 22:857-875.
21. A. E. Bryson Jr. e Y. C. Ho, *Applied Optimal Control*, Blaisdell, Waltham, MA.
22. H. Sagan, *Introduction to the Calculus of Variations*, McGraw-Hill, Nueva York.
23. A. R. Forsyth, *Calculus of Variations*, Dover, Nueva York.
24. G. A. Bliss, *Calculus of Variations*, publicado por Mathematical Association of America by Open Court, Chicago.
25. R. Bellman, *Dynamic Programming*, Princeton University Press, Princeton, NJ.
26. R. Bellman y R. Kalaba, *Dynamic Programming and Modern Control Theory*, Academic, Nueva York.
27. M. H. Mickle y T. W. Sze, *Optimization in Systems Engineering*, Intext, Scranton, PA.
28. O. I. Elgerd, *Control Systems Theory*, McGraw-Hill, Nueva York.
29. A. P. Sage, *Optimum Systems Control*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ.
30. D. E. Kirk, *Optimal Control Theory, An Introduction*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ.
31. J. B. Moore, *Linear Optimal Control*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ. (Ej. 2.2.)
32. M. Athans y P. L. Falb, *Optimal Control, An Introduction to the Theory and Its Applications*, McGraw-Hill, Nueva York. (Contiene una extensa bibliografía.)
33. G. F. Hadley, *Nonlinear and Dynamic Programming*, Addison-Wesley, Reading, MA.
34. C. McMillan Jr., *Mathematical Programming*, Wiley, Nueva York.
35. D. H. Owens, *Multivariable and Optimal Systems*, Academic, Nueva York.
36. H. Hancock, *Theory of Maxima and Minima*, Dover, Nueva York.

LIBROS Y REVISTAS

- B. D. O. Anderson y J. B. Moore, *Linear Optimal Control*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ.
- D. P. A. Atherton, *Stability of Nonlinear Systems*, Wiley, Nueva York.
- D. M. Auslander, Y. Takahashi y M. J. Rabins, *Introducing Systems and Control*, McGraw-Hill, Nueva York.
- F. Ayres, *Theory and Problems of Matrices*, Schaum, Nueva York.

- A. A. Bennett, W. E. Milne y H. Bateman, *Numerical Integration of Differential Equations*, Dover, Nueva York.
- R. B. Blackman y J. W. Tukey, *The Measurement of Power Spectra*, Dover, Nueva York.
- J. W. Brewer, *Control Systems: Analysis, Design, and Simulation*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ.
- E. O., Brigham, *The Fast Fourier Transform*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ.
- W. L. Brogan, *Modern Control Theory*, Quantum, Nueva York.
- S. S. L. Chang, *Synthesis of Optimum Control Systems*, McGraw-Hill, Nueva York.
- C. F. Chen e I. F. Haas, *Elements of Control System Analysis*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ. (Excelente presentación visual.)
- C. T. Chen, *Introduction to Linear System Theory*, Holt, Rinehart and Winston, Nueva York.
- P. M. Chirlian, *Signals, Systems and the Computer*, Intext, Nueva York.
- I. Cochlin, *Analysis and Design of Dynamic Systems*, Harper & Row, Nueva York. (Excelentes diagramas de componentes, válvulas, amplificadores, giroscopios, sistemas de palancas, suspensión de autos y aviones, y sistemas de control.)
- L. Cooper y D. Steinberg, *Introduction to Methods of Optimization*, W. B. Saunders, Filadelfia.
- H. D'Angelo, *Linear Time-Varying Systems: Analysis and Synthesis*, Allyn & Bacon, Boston.
- V. del Toro, *Electromechanical Devices for Energy Conversion and Control Systems*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ.
- C. A. Desoer, *Notes for a Second Course on Linear Systems*, Van Nostrand Reinhold, Nueva York.
- J. J. DiStefano III, A. R. Stubberud e I. J. Williams, *Theory and Problems of Feedback and Control Systems*, Schaum, Nueva York.
- R. C. Dorf, *Time-Domain Analysis and Design of Control Systems*, Addison-Wesley, Reading, MA.
- R. C. Dorf, *Modern Control Systems*, Addison-Wesley, Reading, MA. (Buen tratamiento del método del lugar geométrico de la raíz y excelentes tablas de la función de transferencia de Bode, Nyquist, Nichols y del lugar geométrico.)
- V. W. Eveleigh, *Introduction to Control Systems Design*, McGraw-Hill, Nueva York. (Tabla 56 de la transformada de Laplace.)
- D. K. Frederick y A. B. Carlson, *Linear Systems in Communication and Control*, Wiley, Nueva York. (Diagramas de ondas de forma, espectro de Fourier, convolución y muestreo.)
- E. M. Grabbe, S. Ramo y D. E. Wooldridge, *Handbook of Automation, Computation and Control*. Vol. I, *Control Fundamentals*, Vol. 3, *Systems and Components*, Wiley, Nueva York.
- S. C. Gupta y L. Hasdorff, *Fundamentals of Automatic Control*, Wiley, Nueva York.
- H. Hermes y J. P. LaSalle, *Functional Analysis and Time Optimal Control*, Academic, Nueva York.
- I. M. Horowitz, *Synthesis of Feedback Systems*, Academic, Nueva York.
- W. H. Huggins y D. R. Entwistle, *Introductory Systems and Design*, Blaisdell, Waltham, MA.
- L. B. W. Jolley, *Summation of Series*, 2.^a ed., Dover, Nueva York.
- T. Kailath, *Linear Systems*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ.
- P. Katz, *Digital Control Using Microprocessors*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ.
- B. C. Kuo, *Discrete-Data Control Systems*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ.
- B. C. Kuo, *Digital Control Systems*, Holt, Rinehart and Winston, Nueva York.
- B. P. Lathi, *Signals, Systems, and Controls*, Intext, Nueva York. (Excelente apéndice que trata de la expansión parcial fraccional con complejas y múltiples raíces, gráficas de Bode y álgebra matricial.)
- C. W. Merriam III, *Optimization Theory and the Design of Feedback Control Systems*, McGraw-Hill, Nueva York.
- G. J. Murphy, *Control Engineering*, Boston Technical, Cambridge, MA. (Extensa tabla de los componentes y de las funciones de transferencia, así como de los sistemas de control.)
- K. Ogata, *State Space Analysis of Control Systems*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ.
- P. J. O'Higgins, *Basic Instrumentation, Industrial Measurements*, McGraw-Hill, Nueva York.
- D. H. Owens, *Multivariable and Optimal Systems*, Academic, Londres.
- A. Papoulis, *Signal Analysis*, McGraw-Hill, Nueva York.
- W. R. Perkins y J. B. Cruz Jr., *Engineering of Dynamic Systems*, Wiley, Nueva York.
- E. Polak y E. Wong, *Notes For a First Course on Linear Systems*, Van Nostrand Reinhold, Nueva York.
- H. M. Power y R. J. Simpson, *Introduction to Dynamics and Control*, McGraw-Hill, Londres.
- M. F. Rubinstein, *Patterns of Problem Solving*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ. (Excelente vista general, de la que la teoría del control es sólo una parte; cubre varias teorías: el biocontrol, la teoría de la decisión, probabilidad y modelado.)
- J. E. Rubio, *The Theory of Linear Systems*, Academic, Nueva York.
- R. Saucedo y E. E. Schiring, *Introduction to Continuous and Digital Control Systems*, Macmillan, Nueva York.
- G. R. Slemon, *Transducers, Transformers and Machines*, Wiley, Nueva York.
- V. V. Solodovnikov, *Introduction to the Statistical Dynamics of Automatic Control Systems*, Dover, Nueva York.
- R. E. Stephenson, *Computer Simulation for Engineers*, Harcourt Brace Jovanovich, Nueva York.
- Y. Takahashi, M. J. Rabins y D. M. Auslander, *Control and Dynamic Systems*, Addison-Wesley, Reading, MA.
- J. T. Tou, *Modern Control Theory*, McGraw-Hill, Nueva York.
- H. W. Turnbull, *The Theory of Determinants, Matrices and Invariants*, Dover, Nueva York.

CAPÍTULO 35

Aplicaciones de los sistemas de control

Roger D. Fruechte

General Motors Research Laboratories
Warren, Michigan

Thomas E. Marlin

Exxon Research and Engineering Company
Florham Park, New Jersey

- | | |
|--|---|
| 35.1 Sistemas de control de automóviles | 35.2.2 Dinámica de procesos |
| 35.1.1 Antecedentes | 35.2.3 Control por retroalimentación de una sola variable |
| 35.1.2 Modelación de motores para el desarrollo de algoritmos de control | 35.2.4 Control por retroalimentación de variables múltiples |
| 35.1.3 Sistemas de control de ciclo cerrado en automóviles | 35.2.5 Mejoras a los métodos de control por retroalimentación |
| 35.1.4 Implementación del sistema de control | 35.2.6 Optimización del control |
| 35.1.5 Conceptos avanzados | 35.2.7 Aplicaciones del control de procesos |
| 35.2 Sistemas de control de procesos industriales | |
| 35.2.1 Importancia del control de procesos | |

35.1 SISTEMAS DE CONTROL DE AUTOMÓVILES

Roger D. Fruechte

35.1.1 Antecedentes

En los automóviles actuales se emplean muchos sistemas de control que no se consideraban posibles sólo hace muy pocos años. La motivación principal para el desarrollo de estos sistemas de control es la necesidad de cumplir con las normas de emisión de gases de escape. Sin embargo, debido a la reciente aparición de la electrónica de bajo costo, principalmente la microcomputadora, han evolucionado otros sistemas de control que mejoran la economía de combustible o el buen funcionamiento general (maneabilidad) y la comodidad del conductor. En esta sección se presenta un panorama general de los controles para automóviles aplicables a motores de gasolina ordinarios de encendido por chispa.

La *Environmental Protection Agency* del gobierno de Estados Unidos ha establecido normas para tres componentes de los gases de escape:

1. Óxido de nitrógeno (NO_x).
2. Monóxido de carbono (CO).
3. Hidrocarburos no quemados (HC).

El método actual para establecer normas relacionadas con los gases de escape es el *Federal Test Procedure*^{1, 2}, en el que se emplean métodos de conducción que son típicos de un recorrido por el centro de la ciudad de Los Ángeles. Esta prueba se realiza sobre un dinamómetro para chasis con un vehículo que sigue una trayectoria de velocidad especificada. La prueba se divide en tres fases:

- Fase 1:** Esta fase de funcionamiento transitorio en frío se inicia con el motor frío después de haber estado apagado a la intemperie toda la noche, y en ella se recorre una distancia de 3.6 millas (unos 5.8 km.)
- Fase 2:** En esta fase de funcionamiento estabilizado en frío, se recorren 3.9 millas (unos 6.3 km) con más paradas y arranques que en la primera fase; las velocidades rara vez superan las 30 mph (unos 50 km/h) y hay aproximadamente 13 periodos de marcha mínima en vacío (al ralentí).
- Fase 3:** Esta fase de funcionamiento estabilizado en caliente es una repetición de la 1, salvo que el motor se pone en marcha ya caliente.

El sistema de muestreo de gases de escape consta de una bomba de desplazamiento positivo que introduce un volumen constante de gases de escape y aire para dilución dentro de bolsas colectoras a través de una cámara de mezcla y un cambiador de calor. Las bolsas se colectan al término de cada fase. Los cálculos de las emisiones, expresados en gramos por milla, se basan en la fórmula ponderada $(0.43 C_T + C_S + 0.57 H_T)/7.5$,

donde C_T , C_S y H_T son mediciones de masa de los contaminantes producidos durante las fases de funcionamiento transitorio en frío, estabilizado en frío y estabilizado en caliente, respectivamente. Los factores de ponderación 0.43 y 0.57 de las fases de funcionamiento transitorio en frío y transitorio en caliente se basan en datos que reflejan condiciones típicas de arranque del motor promedio (algunos estarán fríos, otros calientes).

Las normas de emisión de gases de escape se han vuelto progresivamente más estrictas desde 1970, como se ilustra en la figura 35-1. Además, también se han establecido reglamentos federales sobre economía de combustible, llamadas CAFE (de *corporate average fuel economy*, economía promedio de combustible declarada por el fabricante), desde 1978. Pese a que el método más importante para satisfacer los reglamentos de economía de combustible ha sido la reducción del peso, se logran ganancias extra si el motor es operado en la forma más eficiente. Sin embargo, quizá esto no sea lo más deseable en virtud de la interacción directa entre la producción de emisiones y la economía de combustible. En la figura 35-2 se ilustra una solución intermedia típica entre emisión de hidrocarburos, emisión de óxidos de nitrógeno y economía de combustible. Para un vehículo de motor dado sin un dispositivo de tratamiento posterior de las emisiones, cualquier intento por mejorar la economía del combustible (mientras se mantiene constante el nivel de NO_x) mediante la operación del motor de manera más eficiente dará por resultado una mayor cantidad de HC. En vista de esta necesidad de "negociación", se requieren sistemas de control que regulen de manera apropiada el motor a fin de que se cumplan las normas de emisiones sin una excesiva degradación de la economía de combustible o las prestaciones (es decir, el apego de la respuesta del motor y todo el vehículo a las maniobras del conductor).

En motores ordinarios de encendido por chispa, el conductor controla la posición de la mariposa (papalote) del acelerador a través de un varillaje mecánico directo desde el pedal del acelerador, a fin de regular el gasto (caudal) del aire que entra en el múltiple de admisión. Una cantidad de combustible proporcional al flujo de aire se mezcla con la corriente de aire a través de un carburador normal (venturi) o de uno con inyectores de combustible. El movimiento de los pistones absorbe la mezcla de combustible hacia el interior de los cilindros, y se produce momento de torsión por motor cuando la chispa que salta entre los electrodos de la bujía enciende la mezcla. Los gases que se producen en esta combustión pasan por el múltiple de escape y salen por el tubo de escape.

Se utilizan tres variables principales de control para regular la emisión de gases de escape:

- Razón aire-combustible (A/F).
- Avance de la chispa (SA).
- Recirculación de los gases de escape (EGR).

Aquí se describe el efecto de cada una de éstas sobre las emisiones y la economía de combustible.

		DÉCADA DE LOS 70					DÉCADA DE LOS 80				
EMISIONES DE ESCAPE	HC (G/Ml)	4.1	3.0	1.5			0.41				
	CO (G/Ml)	34	28	15			7.0	3.4			
	NO _x (G/Ml)	N. R.	N. R.	3.1	2.0			1.0			
ECONOMÍA DE COMBUSTIBLE (MPG)		N. R.			18	19	20	22	24	26	27.5

Fig. 35-1. Requisitos de control de emisiones y economía de combustible en Estados Unidos.

Razón aire-combustible

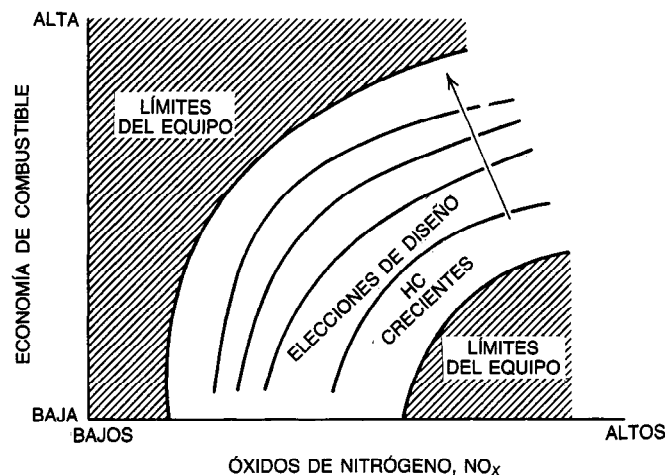
La **razón aire-combustible** se define como el cociente de masa de aire entre combustible que se induce en el motor; es decir, $A/F = (\text{gasto en masa de aire})/(\text{gasto en masa de combustible})$. El valor de A/F para el cual existe en teoría suficiente oxígeno para oxidar todo el combustible se conoce como razón estequiométrica. Para motores de ignición por chispa, esta razón es de aproximadamente 14.7/1.

En general, cuando A/F aumenta (empobrecimiento de la mezcla), la producción de CO disminuye debido a que la mayor cantidad de oxígeno tiende a garantizar una combustión más completa. También disminuyen los hidrocarburos no quemados cuando A/F aumenta hasta cerca de 18/1. A valores mayores se ven afectadas la homogeneidad de mezcla y las velocidades de propagación de llama (inflamación), de manera que nuevamente empiezan a aumentar las emisiones de HC.

Cuando la temperatura de combustión es mayor de 1 950 °C se forma NO_x. La producción de NO_x tiende a ser máxima a un valor de A/F ligeramente mayor que la razón estequiométrica. La economía de combustible suele aumentar cuando aumenta A/F .

Avance de la chispa

El inicio del pulso de la chispa por el sistema de ignición, dependiendo de la posición del punto muerto superior (PMS) de los cilindros, recibe el nombre de avance o adelanto de la chispa o del encendido (SA). Históricamente, el SA se ha modificado como función de la velocidad y de la carga (vacío del múltiple) en el distribuidor para conservar la eficiencia del motor. Por lo general es necesario adelantar la sincronización o "tiempo" de la chispa cuando aumenta la velocidad, a fin de compensar el menor tiempo previo al inicio de la combustión, y retardarla para incrementar la carga a fin de compensar la mayor velocidad de llama debida a la reducción en la cantidad de gas de escape residual en la cámara de combustión. La forma más simple de controlar las emisiones consiste en modificar la curva de calibración SA del distribuidor, de manera que la chispa dé inicio a la combustión en el ciclo más tarde de lo que se hace normalmente. A pesar de que la temperatura máxima de combustión se reduce debido al retardo de la chispa, que da por resultado una reducción de NO_x, la temperatura del gas de escape que sale del cilindro en realidad aumenta, lo que hace posible una oxidación extra de HC no quemados en el múltiple

Fig. 35-2. Solución intermedia fundamental de emisiones de gases de escape.
HC = hidrocarburos no quemados.

de escape. El retardo de la chispa puede causar una reducción importante en la eficiencia del ciclo del motor y la economía de combustible.

Recirculación de los gases de escape

La **recirculación de los gases de escape (EGR)** es la introducción en el múltiple de admisión de una parte de los gases de escape. La dilución de la mezcla combustible reduce la velocidad de la llama y la temperatura máxima de la combustión, lo que a su vez da por resultado menores cantidades de óxidos de nitrógeno. Sin embargo, en virtud de las temperaturas reducidas de los gases de escape, la EGR incrementa ligeramente las emisiones de HC. Una EGR pequeña mejora la eficiencia; no obstante, en mayores cantidades reduce la eficiencia, incrementa la variabilidad cíclica y finalmente provoca fallos del encendido.

35.1.2 Modelación de motores para el desarrollo de algoritmos de control

En el pasado, la coordinación de las variables de control del motor en todo el régimen operativo de éste se hacía a través de pruebas en el motor mismo. En su mayor parte, los medios de control son programas de ciclo abierto, como funciones de velocidad, carga y temperatura del motor. En fechas más recientes, la modelación matemática ha adquirido importancia en la calibración y en el diseño de sistemas de control.

Modelos estáticos

Los modelos estáticos, que a menudo se denominan mapas del motor, relacionaban las variables de entrada y salida de un motor en una condición de operación constante. Son útiles en el diseño de estrategias de control para cumplir normas de emisión al mismo tiempo que maximizan la economía de combustible, y también constituyen una base para estrategias transitorias de control que mejoren la manejabilidad.

Un método^{3,4} para obtener modelos estáticos consiste en coleccionar datos acerca de un motor conectado a un dinamómetro en un número limitado de condiciones de velocidad y carga fijas (momento de torsión). Estas condiciones se seleccionan de manera que sean representativas de las que se encuentran en el curso de un programa de conducción específico. Primero se realizan pruebas en un vehículo que traduce las demandas de un programa de conducción vehicular en una matriz de densidad de velocidad y momento de torsión del motor contra tiempo. Dado un paquete vehicular específico, esta matriz permanece casi invariante (dependiendo de los cambios en el programa de relaciones de la transmisión) sin importar las calibraciones de SA, A/F y EGR del motor. En cada uno de los puntos seleccionados, las variables de entrada se hacen variar lentamente y se realizan mediciones del consumo de combustible y de las emisiones. Cada una de las variables de control puede modificar la producción de momento de torsión (par) del motor, de manera que cuando se modifique la variable de entrada, también se deberá cambiar la posición de la mariposa del acelerador para mantener constante el momento de torsión.

Después se aplica el análisis de regresión lineal⁵ a fin de ajustar superficies de curvatura suave a datos experimentales para valores específicos con carga al freno de consumo de combustible (FC), NO_x, CO y HC en cada uno de los puntos de velocidad y carga. Las expresiones analíticas que se obtienen son funciones cuadráticas en SA, A/F y EGR. En términos generales, la ecuación de la respuesta de BSFC* es:

$$\begin{aligned} \text{BSFC} = & \alpha_0 + \alpha_1(\text{SA}) + \alpha_2(A/F) + \alpha_3(\text{EGR}) + \\ & + \alpha_{11}(\text{SA})^2 + \alpha_{22}(A/F)^2 + \alpha_{33}(\text{EGR})^2 + \alpha_{12}(\text{SA} \times \\ & \times A/F) + \alpha_{23}(A/F \times \text{EGR}) + \alpha_{31}(\text{EGR} \times \text{SA}) \end{aligned} \quad (35-1)$$

Modelos dinámicos lineales

Los modelos estáticos pueden ser adecuados para determinar programas iniciales de estado estable de EGR, SA y A/F, pero su utilidad es un tanto limitada para determinar el control adecuado durante una maniobra transitoria, o si se utiliza un sistema de control de ciclo cerrado en el que deba considerarse la dinámica de los sensores y actuadores del motor. En estas condiciones se deben producir modelos dinámicos. En esta sección se describe el desarrollo de modelos dinámicos lineales.

Primer método. Consiste en considerar el motor como una "caja negra" a través de la cual las salidas del motor se relacionan con sus entradas mediante gráficas de ganancia y de fase como función de la frecuencia. Este método se basa principalmente en mediciones experimentales y no toma en consideración los detalles del proceso físico. Esto facilita el proceso de modelación; sin embargo, las relaciones entre variables medidas no se determinan con facilidad, y algunas variables de interés no son fáciles de medir dinámicamente.

Segundo método. Se basa en una formulación en términos de variables de estado de la dinámica de los procesos de admisión, combustión y carga, la linealización de las ecuaciones y después el uso de pruebas estáticas y de respuesta de frecuencia para ajustar las constantes de las ecuaciones linealizadas. Este método es de particular utilidad si se emplean diversas variables en la ley de control por retroalimentación o si se va a utilizar uno o más esquemas de optimización.

A manera de ejemplo, se deduce un modelo de motor en la condición de marcha mínima con el ángulo α de la mariposa y el momento de torsión de carga T_L como únicas variables de entrada. En la marcha mínima, el flujo de aire alrededor de la mariposa del acelerador es esencialmente sónico; por tanto, el flujo de aire hacia el múltiple de admisión M_I depende sólo del ángulo de la mariposa, o sea:

*BSFC es el consumo específico de combustible con carga al freno. Es el combustible que se consume en gramos por hora dividido entre la salida de potencia al freno medida del motor. Por tanto, BSFC tiene unidades de gramos por kilowatt-hora.

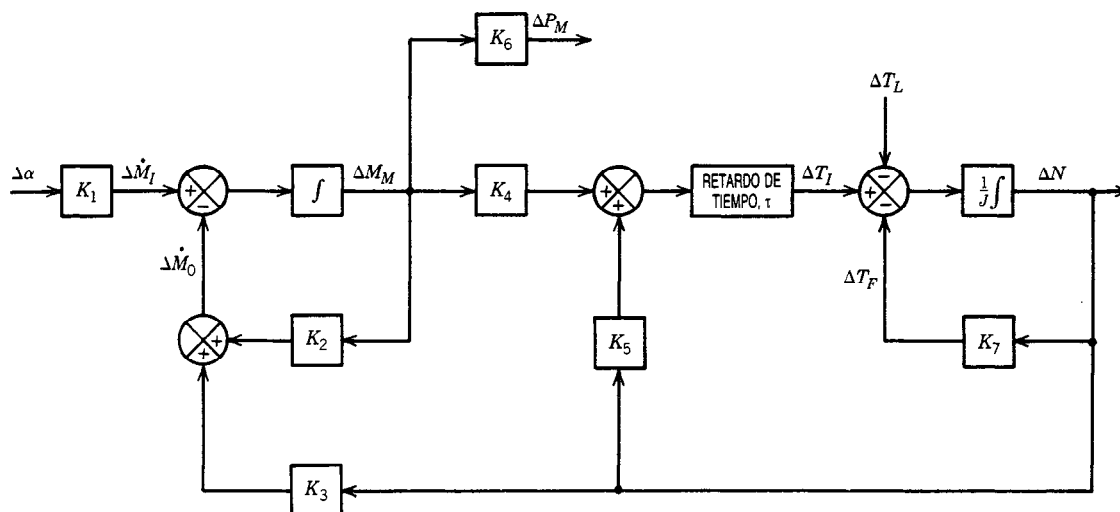


Fig. 35-3. Modelo de perturbaciones del motor.

$$\dot{M}_I = f_1(\alpha) \quad (35-2)$$

La masa de aire en el múltiple de admisión M_M es la integral de la diferencia entre el flujo de entrada y el flujo de salida M_O :

$$M_M = \int (\dot{M}_I - \dot{M}_O) dt \quad (35-3)$$

donde \dot{M}_O es función de la masa de aire en el múltiple y la velocidad del motor N ; es decir:

$$\dot{M}_O = f_2(M_M, N) \quad (35-4)$$

La presión en el múltiple P_M está en función principalmente de la masa de aire contenida en él; es decir:

$$P_M = f_3(M_M) \quad (35-5)$$

Para A/F y SA constantes, el momento de torsión (por motor) T_I es proporcional a la cantidad de aire que entra en los cilindros, pero retrasado un tiempo τ_D para permitir que el pistón pase por los tiempos (carerras) de admisión y de compresión. Por tanto:

$$T_I = f_4 \left[\frac{\dot{M}_O(t - \tau_D)}{N(t - \tau_D)} \right] \quad (35-6)$$

Por último, la velocidad del motor se relaciona con el momento de torsión de aceleración neto por medio de:

$$N = \frac{1}{J} \int (T_I - T_F - T_L) dt \quad (35-7)$$

donde J es la inercia del motor y la carga, T_L es una carga del motor aplicada y T_F es el momento de torsión de fricción dado por:

$$T_F = f_5(N) \quad (35-8)$$

La linealización de las ecuaciones 35-2 a 35-8 en una condición de operación específica para pequeñas perturbaciones de señal en α y T_L produce un conjunto de ecuaciones lineales representado por el diagrama de bloques de la figura 35-3.

Modelos dinámicos no lineales

Los modelos de perturbación lineal tienen la ventaja de la sencillez y son particularmente adecuados para realizar estudios de estabilidad, o para utilizar la vasta teoría relacionada con los diseños de control óptimos. Las no linealidades que se producen al pasar a una nueva condición de operación se pueden incluir en estos modelos mediante el desarrollo de varios modelos lineales para cubrir en forma adecuada el régimen de operación del motor, y a partir de ello el uso de funciones suaves para los términos K de la figura 35-3. Sin embargo, los modelos lineales son inadecuados para tratar no linealidades fuertes, como la bomba de aceleración, que sólo funciona cuando se abre la mariposa más allá de cierto punto, o las grandes perturbaciones de señal de las variables de entrada. Para esto se necesita un modelo de motor dinámico no lineal.

Un método para construir un modelo de motor dinámico no lineal consiste en considerar los procesos principales del motor en forma modular⁶. Un modelo de esta forma, que se muestra en el diagrama de bloques de la figura 35-4, permite hacer modificaciones en componentes del motor y en los nuevos modelos resultantes de estas componentes sin afectar drásticamente el resto del modelo.

Cada uno de los módulos se representa por medio de un modelo con un grado de complejidad suficiente para que el modelo caracterice las entradas y salidas del módulo en el intervalo de operación esperado de cada una de las variables, y para todas las frecuencias menores de 10 Hz. Como ejemplo, en la figura 35-5 se muestran los detalles generales del modelo de un carburador. Su entrada independiente es la posición o án-

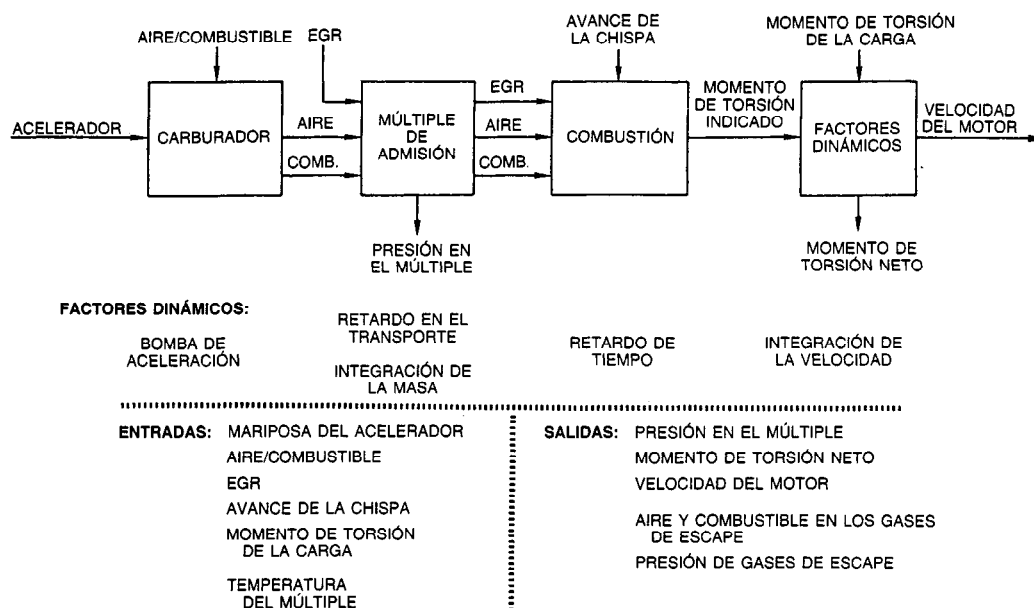


Fig. 35-4. Diagrama modular de bloques del motor. COMB. = combustible.

gulo de la mariposa (α), y sus salidas dependientes son los gastos de aire (\dot{M}_I) y combustible (\dot{M}_F) hacia el interior del múltiple de admisión. Nótese que, exceptuando la bomba del acelerador, no hay factor dinámico alguno asociado con el carburador.

Aunque parezca que se requieren muchas pruebas para obtener todos los parámetros, por lo general, en el diseño no se necesitan modelos precisos. Por ejemplo, la característica de la mariposa del acelerador de la figura 35-5 puede obtenerse probando un carburador. Una vez obtenida, se deberá aplicar a todos los carburadores ordinarios con gargantas de acelerador circulares.

35.1.3 Sistemas de control de ciclo cerrado en automóviles

En muchos automóviles producidos actualmente resulta habitual el empleo de tres sistemas de control de ciclo cerrado:

1. El control estequiométrico A/F trata el problema de las emisiones.
2. El control de velocidad de marcha mínima mejora la economía de combustible.
3. La limitación del golpeteo (detonaciones o cascabeleo) de ciclo cerrado mejora el funcionamiento general (maneabilidad).

Control estequiométrico de aire y combustible

Probablemente la contribución más significativa para el control de las emisiones del automóvil es el convertidor catalítico o catalizador, un dispositivo para el tratamiento de los gases de escape. Antes de 1981 sólo se necesitaba el convertidor de oxidación. En él se utili-

zaban pequeñas cantidades de platino para oxidar los HC y el CO en los gases de escape. Desde 1981, tras la reducción a la mitad de la norma de emisión de NO_x en 1980 (fig. 35-1), en muchos automóviles se exige la instalación del convertidor catalítico de tres vías o capas⁷. Este catalizador oxida los HC y el CO, como antes, y reduce los NO_x a N_2 y O_2 mediante el uso de pequeñas cantidades de rodio como catalítico.

En la figura 35-6 se ilustran las características de eficiencia del catalizador de tres vías como función de la razón aire-combustible (A/F). Cuando la mezcla de aire y combustible es pobre (exceso de oxígeno), el control de HC y CO que entran en el convertidor es óptimo, pero el control de NO_x es insatisfactorio. Cuando la mezcla es rica (deficiencia de oxígeno), el control de NO_x es bueno, pero el control de HC y CO es deficiente. En el valor estequiométrico existe una región estrecha donde el control de los tres contaminantes es bastante bueno.

El objetivo del control de aire y combustible de ciclo cerrado es mantener la razón A/F de los gases de escape en el valor estequiométrico, ya que ningún sistema de dosificación de combustible de ciclo abierto es capaz de lograr la regulación de A/F hasta el valor requerido de ± 0.1 de la razón. En la figura 35-7 se presenta un diagrama de bloques simplificado. Los componentes principales del sistema son el sensor o detector de gases de escape, un controlador electrónico y un medio de ajuste del combustible que va a un carburador o un sistema de inyección electrónica de combustible.

Sensor de gases de escape típico. Se coloca directamente en la corriente de gases de escape del motor y consta de un elemento de circonio recubierto de pla-

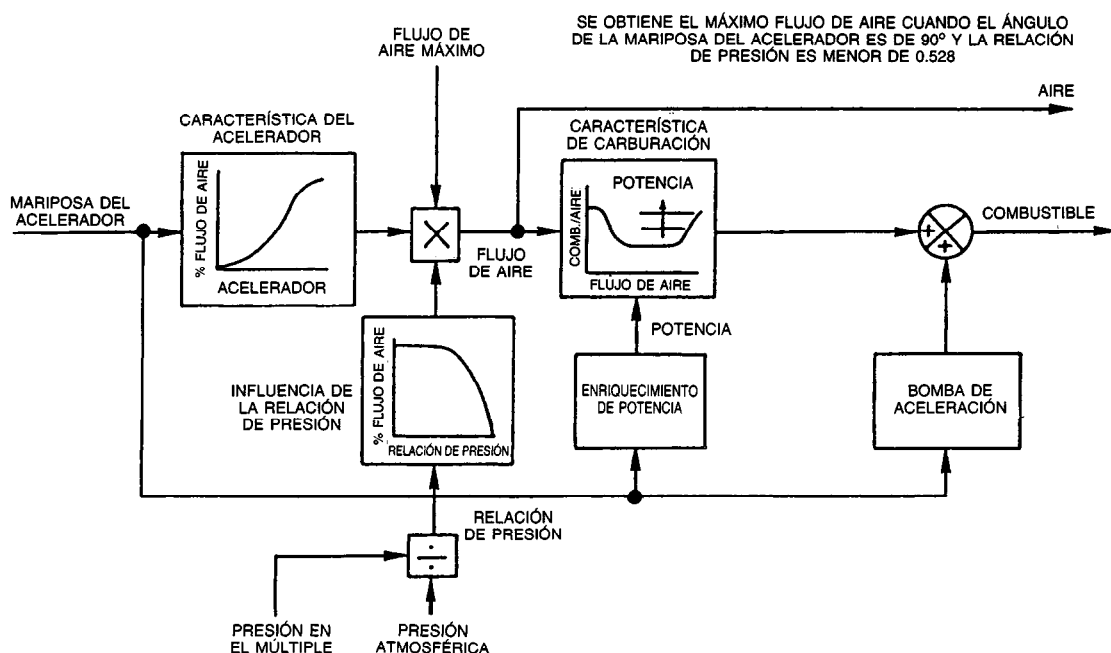


Fig. 35-5. Modelo de carburador. De "A Mathematical Engine Model for Development of Dynamic Engine Control", documento 800054, presentado en el SAE International Congress and Exhibition, Detroit, MI, por D. J. Dobner, © Society of Automotive Engineers, Inc., reproducido con permiso.

tino. El circonio y el platino actúan como una celda electroquímica cuando son calentados por los gases de escape. La impedancia interna, el voltaje de salida y el tiempo de respuesta del sensor son todas funciones de la temperatura. Como se muestra en la figura 35-8, se genera un voltaje muy pequeño cuando la mezcla de aire y combustible es más pobre que la mezcla estequiométrica. Cuando la mezcla se vuelve más rica y rebasa el valor estequiométrico, se genera un voltaje de hasta 900 mV.

Ajuste real del combustible. Suele realizarse variando la posición de los bastones (varillas dosificadoras) con un actuador electromecánico en el caso del carburador, o bien ajustando el ancho de los pulsos que se envían a los inyectores de combustible en el caso de la inyección electrónica. El motor recibe la mezcla modificada de aire y combustible a través del múltiple de admisión, quema la mezcla y la envía por el múltiple de escape, pasando por el sensor de gases y a través del convertidor catalítico. Una característica dominante del motor es el retardo de tiempo en el proceso de admisión, combustión y escape. Esto debe compensarse en la estrategia de control, de manera que la mezcla de aire y combustible se mantenga lo más cerca posible del valor estequiométrico en todas las condiciones.

Controlador electrónico. En él deberán aprovecharse las estrategias de ciclo abierto y de ciclo cerrado. Una estrategia común de ciclo cerrado es el uso de una forma de control proporcional más control integral. Cuando está indicada una mezcla rica o pobre, la señal

de control se desplaza formando una rampa en la dirección correctiva a un ritmo fijo, que puede ser función de la velocidad y la carga. Cuando el sensor de oxígeno en los gases de escape conmuta, la señal de control forma un escalón, en la dirección opuesta de la señal anterior, por una cantidad fija y comienza a desplazarse formando una rampa en la dirección correctiva. Esto da por resultado un ciclo límite, como lo indican los trazos de la figura 35-9. Por lo general es

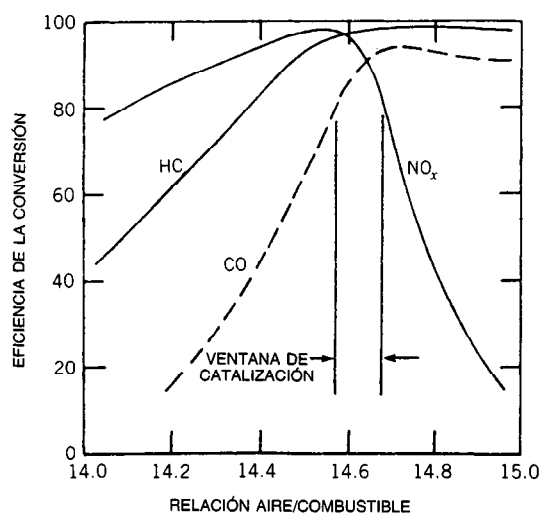


Fig. 35-6. Eficiencia del convertidor catalítico de tres vías.

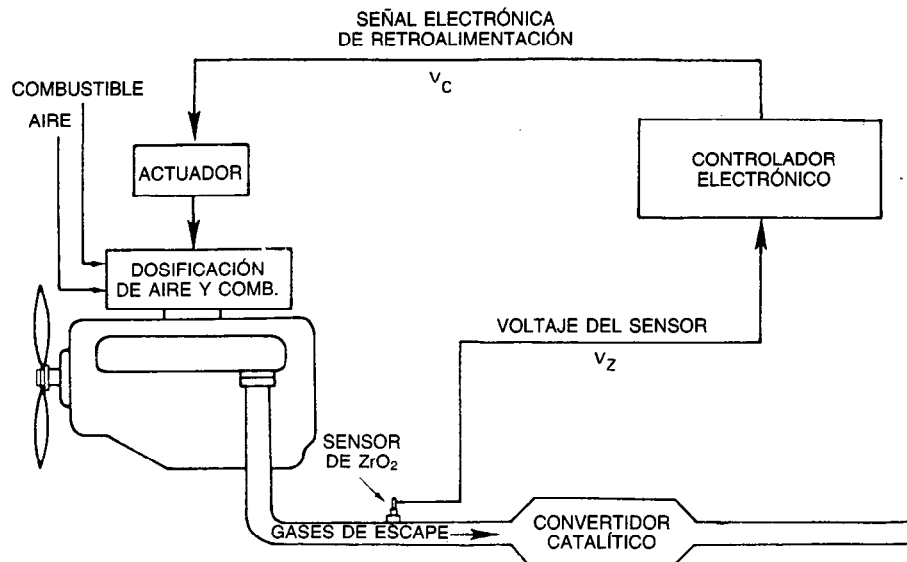


Fig. 35-7. Sistema de control estequiométrico de aire y combustible.

insuficiente un solo conjunto de calibraciones de rampa y escalón para todo el régimen de operación del motor, y se requiere programar la ganancia. Una de las razones de esto es que el retardo del motor cambia en forma significativa con respecto a los gastos a través del motor. La posibilidad de variaciones de ganancia en diferentes condiciones de velocidad y carga permite minimizar la amplitud del ciclo límite. Se requiere una estrategia de control de ciclo abierto cuando:

1. El sensor del oxígeno comienza a calentarse y todavía no envía una salida al controlador.

2. Se desea un enriquecimiento para aceleraciones con apertura total de la mariposa. Las señales de ciclo abierto suelen programarse como función de la carga, velocidad y temperatura del refrigerante.

Control de la velocidad de marcha en vacío

Cerca del 19% del programa de manejo del *Federal Test Procedure* de 1975 es con el motor en marcha en vacío. Mediante numerosas pruebas se ha demostrado que se puede lograr una mejora en la economía de combustible hasta de 0.25 km / l (0.6 millas/gal) cuando

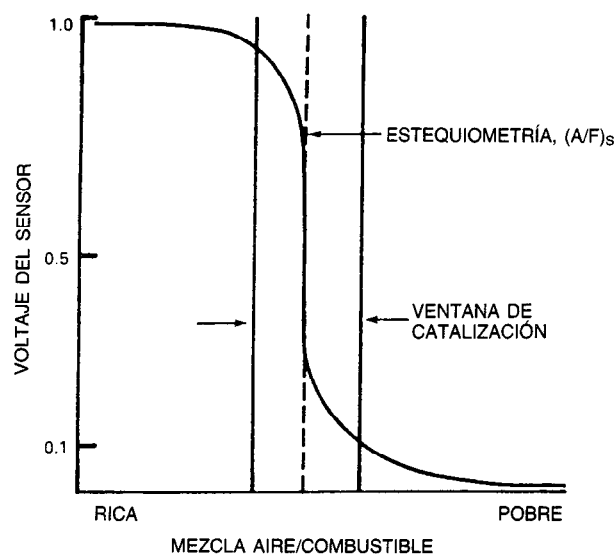


Fig. 35-8. Característica del sensor de óxido de circonio.

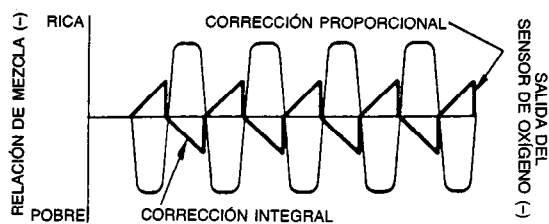


Fig. 35-9. Registro típico de las órdenes del sensor de oxígeno y de la relación aire/combustible. Tomado de G. W. Niepoth y S. P. Stonestreet, "Closed-Loop Engine Control", *IEEE Spectrum*, reproducido con permiso.

do la velocidad de marcha en vacío se reduce aproximadamente 100 r/min respecto a la graduación de las rpm superiores de marcha mínima en caliente. Sin embargo, al reducirse la velocidad de marcha en vacío en 100 r/min pueden resultar paros frecuentes del motor cuando se apliquen en forma repentina cargas de accesorios como el aire acondicionado o la dirección hidráulica contra uno de sus topes. Un método para evitar este problema es un sistema de control de la velocidad de marcha en vacío (ISC)⁷.

En la figura 35-10 se presenta un diagrama de bloques simplificado de un sistema ISC. Al aplicar al motor una carga T_L , la velocidad del motor N comienza a reducirse. Este cambio en la velocidad es captado por un circuito tacómetro que genera un voltaje proporcional a dicho cambio. Un controlador opera sobre la diferencia entre la velocidad de marcha en vacío deseada y la velocidad medida, y proporciona un voltaje a un actuador. El actuador puede ser del tipo que mueve la mariposa del acelerador en respuesta a instrucciones del controlador en los motores con carburador, o bien, como en algunos motores con inyección de combustible, puede controlar el tamaño del orificio de una trayectoria de derivación de aire en torno a la mariposa del acelerador. En un caso u otro la marcha mínima vuelve al valor deseado.

Un método de diseño del controlador consiste en utilizar el modelo del motor recién descrito y modelos de tacómetro y de actuador, y después aplicar técnicas de control analítico. Se pueden aplicar modelos linealizados, ya que el control de la velocidad de marcha en

vacío opera en un intervalo de velocidad limitado, y los efectos de las no linealidades que dependen de la velocidad son mínimos. El controlador más simple sería tan sólo un término proporcional, K_N . El problema es que K_N debe ser tan grande como para que tenga algún efecto en los paros por ahogo del motor, lo que hace probable la inestabilidad del ciclo. Además, quizá sea deseable reducir la sensibilidad del ciclo a variaciones de parámetros con ciclos de retroalimentación internos. Como la posición de la mariposa a y la presión del múltiple P_M son cantidades medibles, también se pueden emplear como variables de retroalimentación.

En la figura 35-11 se muestra un algoritmo de control que utiliza estas variables. Se incluye el integrador para eliminar errores de estado estable. El efecto de sumar la tasa de cambio de velocidad \dot{N} y la tasa de cambio de presión del múltiple \dot{P}_M a la ley de control se ilustra por trazos reales de la velocidad del motor para una aplicación de la carga de dirección hidráulica en la figura 35-12. Si sólo se incrementa la retroalimentación de velocidad casi se producen oscilaciones sostenidas, pero como \dot{N} y \dot{P}_M se suman a la ley de control, el ciclo se vuelve progresivamente más estable.

Limitación del golpeteo

Los motores de encendido por chispa con altas razones de compresión suelen tener mayor eficiencia (y por tanto mejor economía de combustible) que aquellos motores con razones de compresión más bajas. Sin embargo, antes no había habido incentivo para elevar dichas razones, ya que las mayores ganancias de eficiencia del vehículo son compensadas por las pérdidas de energía en la refinería al producir el combustible sin plomo de octanaje más elevado que requieren los motores con razones de compresión altas. El uso de la gasolina de octanaje inferior, como 91 *Research Octane Number* (número de octano de investigación, RON) en un motor con alta razón de compresión produce un fenómeno llamado detonación, golpeteo o cascabeleo.

El golpeteo se debe a la autoignición del gas final, que es la mezcla de aire y combustible alojada en la cámara de combustión y que no ha sido consumida del todo en la reacción normal del frente de llama. Si la autoignición es lo suficientemente rápida, se pueden

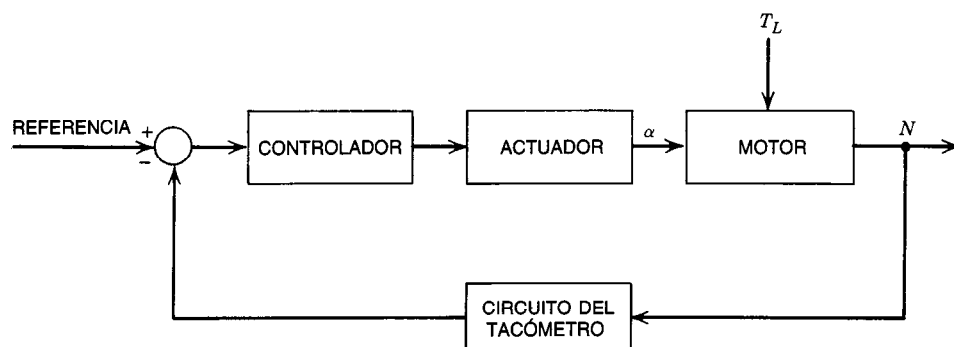


Fig. 35-10. Sistema de control de la marcha mínima (en vacío).

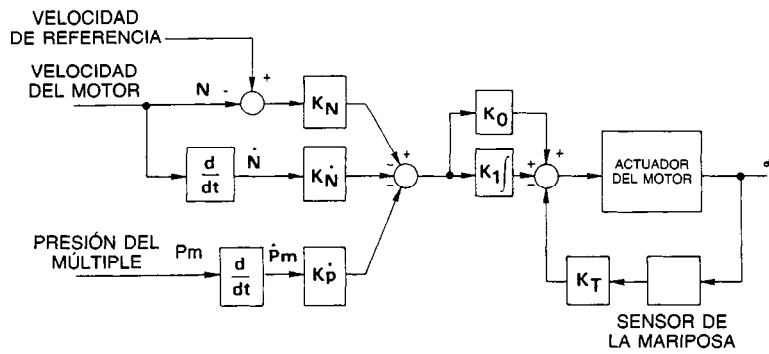


Fig. 35-11. Estrategia de control de la marcha mínima.

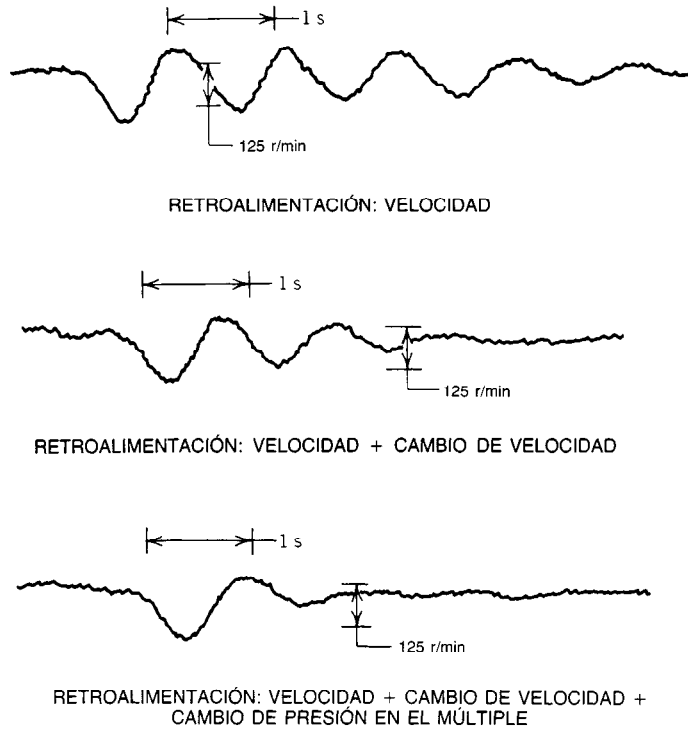


Fig. 35-12. Respuesta de la velocidad del motor a la aplicación de carga.

producir altas presiones locales que harán vibrar las paredes del cilindro. Además de un incremento en la graduación octánica de la gasolina, otros factores pueden reducir la probabilidad de golpeteo, como la disminución del avance de la chispa (retardo de la chispa), dilución de la carga de combustible con gas de escape enfriado, reducción de la contrapresión de los gases de escape, múltiple de admisión de una mezcla de agua y alcohol. De éstos, el retardo de la chispa es el más sencillo de implementar. El sistema de control del golpeteo⁸, que se ilustra en el diagrama de bloques de la figura 35-13, consta de un sensor de detonaciones, un controlador electrónico y un sistema de ig-

nición electrónica. El sensor de detonaciones, que suele ser un tipo de acelerómetro, genera una señal eléctrica que es proporcional a la intensidad de vibración del bloque de cilindros. El controlador electrónico debe distinguir entre la señal de detonación y el ruido de fondo, y enviar una orden que retarde la sincronización o "tiempo" de la chispa. La orden de retardo se utiliza para producir un pulso de ignición demorado o retardado al distribuidor. Una vez que la detonación se ha reducido a los niveles deseados, el controlador restituye el avance de la chispa a una velocidad programada hasta que se restablezcan los valores normales de la chispa.

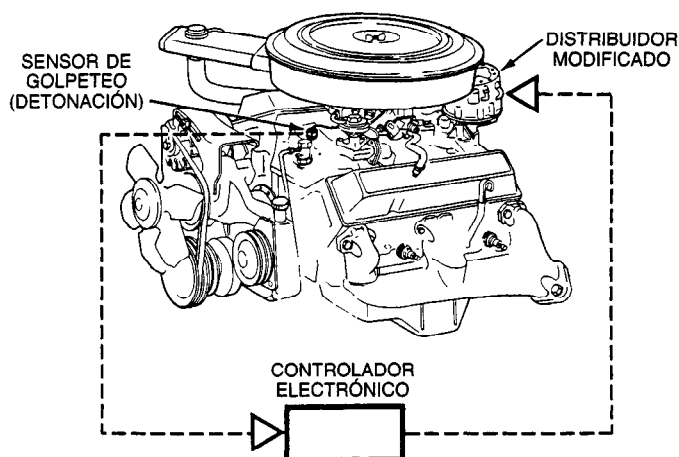


Fig. 35-13. Sistema de control de limitación del golpeo. Tomado de "Energy Conservation with Increased Compression Ratio and Electronic Knock Control", documento 790173, presentado en el SAE International Congress and Exposition, Detroit, MI, por J. H. Currie, D. S. Grossman y J. J. Gumbleton, © Society of Automotive Engineers, Inc., reproducido con permiso.

La parte más difícil del problema de control del golpeo es la detección de éste. En la figura 35-14 se ilustra un espectro de frecuencias típico de la salida del sensor de detonaciones. La línea continua muestra la salida sin detonaciones y la línea discontinua muestra la salida incrementada con detonaciones. La frecuencia de la vibración por detonaciones es única para una familia de motores dada y es independiente de la velocidad o carga. Sin embargo, la ubicación del sensor es muy importante para asegurar que se capte el golpeo producido en todos los cilindros. La salida del sensor se acondiciona mediante un filtro pasabanda con cortes abruptos en ambos lados de la frecuencia central y también se promedia continuamente para establecer el nivel de ruido de fondo. Esto reduce la probabilidad de un falso retardo de la chispa, que puede provocar pérdida de rendimiento del vehículo y de economía de combustible. La cantidad de retardo de la chispa es proporcional a la intensidad del golpeo detectado. Para mantener el buen funcionamiento del vehículo, la sincronización de la chispa se retarda rápidamente cuando se detecta detonancia y después se vuelve a hacer que avance lentamente. Cambios más rápidos inducen marcha irregular del motor que el conductor puede percibir.

35.1.4 Implementación del sistema de control

En la interrogante de cómo implementar un sistema de control en un automóvil intervienen muchos aspectos compensatorios relativos a costo, condiciones ambientales, confiabilidad y disponibilidad de equipo. En la tabla 35-1 se presentan condiciones ambientales comunes en las cuales debe operar el sistema de control.

El aspecto de la confiabilidad debe comprender no sólo la confiabilidad de los elementos componentes, sino también la seguridad y manejabilidad del vehículo

Tabla 35-1. Extremos ambientales para los sistemas de control de automóviles

Variable ambiental	Condiciones extremas de funcionamiento
Temperatura	-40 a +85 °C cuando el sistema está fuera del compartimiento del motor; -40 a +120 °C cuando está dentro de dicho compartimiento, pero no sobre el motor mismo
Humedad	0.1 a 200 g/kg o, lo que es lo mismo, temperatura de punto de rocío de -40 a +65 °C
Productos químicos corrosivos y contaminantes	Rocío marino, polvo fino, exceso de gravilla, aceites de motor y de transmisión, líquido de frenos, grasa de ejes, disolvente limpiador, gasolina, desengrasadores, jabón, vapor, ácido del acumulador
Vibración y choques	Vibración de hasta ± 10 g (rms), según sean el lugar y posición de montaje; se encuentran intensidades de choque más altas, hasta de ± 50 g (máximas), durante el embarque, manejo e instalación
Impulsos electromagnéticos	Picos de supresión de carga hasta de 125 V con duración de un segundo, decaimiento del campo del alternador de -100 V con duración de 200 ms, e impulsos de ignición de 3 V (máximos) con duración de 10 μ s

Fuente. Ronald K. Jurgon, "The Automobile for Better or Worse", IEEE. Spectrum.

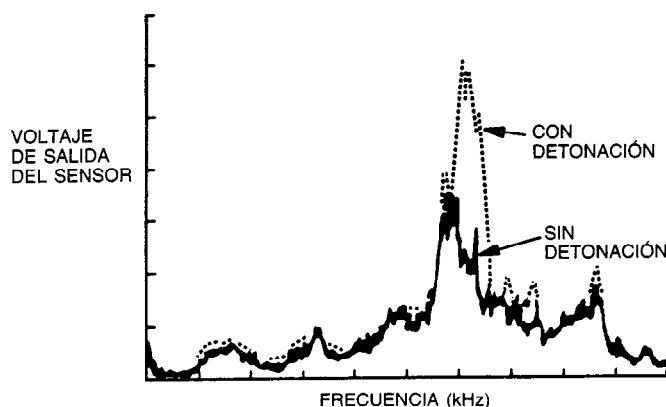


Fig. 35-14. Salida del sensor de golpeteo en función de la frecuencia. Tomado de "Energy Conservation with Increased Compression Ratio and Electronic Knock Control", documento 790173, presentado en el SAE International Congress and Exposition, Detroit, MI, por J. H. Currie, D. S. Grossman y J. J. Gumbleton, © Society of Automotive Engineers, Inc., reproducido con permiso.

si falla un componente. Por lo general, los sistemas de control de automóviles se diseñan con una característica de funcionamiento deficiente, lo cual significa que todavía se puede conducir el vehículo, pero con pérdida de rendimiento.

En lo que resta de esta sección se analizan los componentes que conforman un sistema de control del motor y factores que distinguen un sistema de este tipo de otras aplicaciones.

Componentes de un sistema de control del motor

Controlador electrónico. El controlador electrónico recibe información de los sensores, procesa la información y después envía instrucciones a los actuadores. Si la función de control es simple, el controlador puede constar sólo de componentes analógicos. Sin embargo, en años recientes la tendencia ha sido hacia sistemas basados en microprocesadores. Además del precio unitario decreciente del microprocesador, existen razones técnicas y prácticas de esta tendencia:

1. El controlador basado en un microprocesador es mucho más flexible. Por ejemplo, permite fácilmente que las ganancias de ciclos sean no lineales y también la función de las condiciones operativas del motor.
2. La estrategia de control requerida puede ser ligeramente distinta para cada combinación de motor y tren propulsor. El controlador basado en un microprocesador reduce la cantidad de piezas requeridas, ya que las diferencias se absorben en la memoria de la computadora.
3. Se pueden incorporar otras características en el sistema de control con bajo costo adicional. Por ejemplo, el autodiagnóstico del sistema de control del motor y de otros sistemas eléctricos resulta relativamente fácil de anexar sin hardware extra.

En una aplicación común, se utiliza memoria sólo de lectura (ROM) para almacenar tablas de búsqueda que permitan realizar ajustes a las ganancias o instrucciones de control como funciones de otras variables percibidas.

La unidad de procesamiento central (CPU) ejecuta el programa de control del motor almacenado en la ROM y, mediante el uso de una memoria "de apuntes" (RAM), proporciona instrucciones u órdenes al controlador de entrada y salida (I/O). El controlador de I/O procesa las órdenes que cumplen los requisitos de un actuador específico, por ejemplo, ajusta el ancho de pulso, el nivel de voltaje, la frecuencia, etc.

Sensores. Además de los sensores de oxígeno y de golpeteo ya descritos, un sistema de control del motor requiere muchos otros sensores, como se indica en la tabla 35-2. Casi todos los sensores de la tabla 35-2 proporcionan señales analógicas que deben ser procesadas por un convertidor de analógico a digital (A/D) antes de ser utilizadas por la computadora. La excepción es el sensor de la velocidad del motor y posición del cigüeñal. Un captador magnético, montado en el distribuidor o en la proximidad de una rueda dentada especialmente diseñada en el cigüeñal, envía un tren de pulsos al controlador electrónico. Para determinar la velocidad del motor a partir de un captador del distribuidor, por ejemplo, se envía un pulso al controlador cada 90° de rotación del cigüeñal (en el caso de un motor de ocho cilindros). Con la utilización de un reloj de referencia en el controlador, el número de pulsos del reloj que ocurren con cada pulso del distribuidor se relaciona inversamente con la velocidad del motor.

En términos generales, se requiere alguna forma de promediación en el cálculo de la velocidad para evitar desviaciones importantes en las instrucciones de control, que dependen en gran medida de la velocidad del motor.

Tabla 35-2. Sensores de control del motor

Variable por detectar	Intervalo	Tipos comunes
Ángulo de posición de la mariposa del acelerador	0 a 90°	Potenciómetro
Ángulo de posición del cigüeñal	0 a 360°	Captador magnético
Presión absoluta en el múltiple	30 a 100 kPa	Deformímetro de silicio
Presión barométrica	80 a 100 kPa	Deformímetro de silicio
Flujo de aire de admisión	5 a 180 g/s	Anemómetro de alambre caliente
Flujo (gasto) de combustible	0.3 a 12 g/s	Aspa
Temperatura del aire	-40 a +85 °C	Termistor
Temperatura del líquido enfriador	-40 a +120 °C	Termistor
Velocidad del motor	400 a 5 000 r/min	Captador magnético

Actuadores. Los actuadores reciben las instrucciones de control del controlador y ajustan la variable de entrada del motor. En la tabla 35-3 se resumen los actuadores que se utilizarían en sistemas típicos de control de motores.

Históricamente, el vacío del múltiple ha proporcionado la energía para accionar accesorios y medios de control de los automóviles, por ejemplo, el limpiaparabrisas de vacío, el avance por vacío de la sincronización de la chispa de encendido, los frenos de potencia, etc. Éste es asimismo el caso de muchos actuadores de control de motores. Sin embargo, en años recientes los automóviles se han vuelto más pequeños debido a su mejor economía de combustible. Los motores de menor tamaño operan en la proximidad de su capacidad máxima de momento de torsión, lo que da por resultado un menor vacío en el múltiple de admisión. Por tanto, se ha reducido significativamente el vacío como fuente de energía. Es ésta la razón de que la tendencia sea hacia los actuadores electromecánicos.

Requisitos de filtrado. El momento de torsión del motor lo produce un tren de pulsos inducido por el encendido de la mezcla de cada cilindro cada dos revoluciones del cigüeñal. El resultado es que la velocidad del motor no es una función uniforme, ni siquiera en la llamada condición de operación de estado estable. De la misma manera, la presión y la circulación de aire por múltiple constan de un valor promedio más un tren de pulsos debido al movimiento de los pistones.

La escala de frecuencia de estas pulsaciones indeseables es tan baja como 16.6 Hz para un motor de cuatro cilindros que opera a 500 rpm, o tan alta como 333.3 Hz para un motor de ocho cilindros que opera a 5 000 rpm. Por desgracia, son las frecuencias más bajas las que causan los problemas más graves debido a que:

- Están próximas al ancho de la banda de frecuencia de la mayor parte de los sistemas de control de motores (por lo general de 1 a 2 Hz).
- Las amplitudes de cresta a cresta de las variables medidas del motor se relacionan inversamente con la frecuencia de pulsaciones de una carga constante.

Tabla 35-3. Actuadores de control del motor

Actuador	Tipos en uso
Válvula de recirculación de gases de escape	<p>a. La contrapresión en el escape y la presión en el múltiple determinan la posición del vástago; no es electrónico</p> <p>b. Un controlador electroneumático determina la cantidad de vacío para el actuador; se requiere retroalimentación de la posición del vástago</p>
Carburador	La relación aire/combustible es determinada por la posición de los bastones; se controla por medio del ancho de los pulsos del solenoide o por el motor de pasos
Injectores de combustible	La cantidad de combustible es determinada por el ancho del pulso para el inyector electromagnético; los inyectores pueden estar montados encima de la mariposa del acelerador o frente a cada válvula de admisión
Pulso de chispa	La sincronización del pulso es determinada por el controlador; se requiere encendido electrónico
Actuador de la mariposa del acelerador	<p>a. La posición de la mariposa del acelerador es determinada por el paso de presión en el múltiple hacia el actuador controlado por resorte; no tiene componentes electrónicos</p> <p>b. Motor de CD con un actuador por engranajes</p>
Válvula de derivación de aire	La posición de la aguja es determinada por la modulación del ancho de los pulsos del solenoide o por el motor escalonador (de pasos)

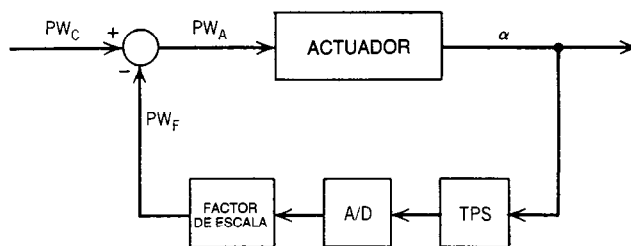


Fig. 35-15. Actuador con retroalimentación del sensor de posición de la mariposa del acelerador (TPS).

Cuando es posible, se utilizan filtros analógicos antes de que un controlador basado en un microprocesador realice alguna tarea de procesamiento digital a fin de prevenir que aparente estar a una frecuencia más baja. Por lo general se utilizan filtros de primer orden en virtud de su menor complejidad, con frecuencia de corte en la vecindad de los 10 Hz. De la misma manera, suelen usarse filtros digitales de primer orden para mantener en un mínimo el número requerido de palabras guardadas en la RAM.

Factores que afectan el rendimiento de ciclo cerrado

Como sucede en cualquier proceso de diseño de un sistema de control, muchos aspectos del hardware pueden contribuir a un desempeño dinámico o estático deficiente o incluso a la inestabilidad de ciclo si no se toma en cuenta en la forma debida. Para mencionar sólo algunos, están: el tiempo de ciclo (o de repetición) del algoritmo de control digital; la rapidez inherente de actualización de señales medidas; constantes de tiempo de sensores, actuadores o filtros; y la insuficiencia o desbordamiento de filtros digitales, todos los cuales pueden reducir el margen de estabilidad de un sistema de ciclo cerrado. Los errores de cuantización de los convertidores A/D, además de esto, pueden inducir errores de estado estable excesivos.

Supóngase, por ejemplo, que se desea utilizar retroalimentación de posición de la mariposa respecto a un actuador de velocidad de marcha en vacío a fin de reducir la sensibilidad del ISC a variaciones en los parámetros del actuador (fig. 35-15). El sensor de posición de la mariposa (TPS) es necesario para realizar el control A/F sobre toda la escala de movimiento de la mariposa (0 a 90°); pero para la velocidad de marcha en vacío se necesita control sobre 0 a 20°. El algoritmo de control de velocidad de marcha en vacío determina un ancho de pulso PW_C en base a la diferencia entre velocidad deseada y real del motor. El ancho de pulso es modificado por PW_F a partir de la trayectoria de retroalimentación TPS tal que $PW_A = PW_C - PW_F$ es el ancho de pulso real enviado al actuador cada 50 ms. La ganancia de retroalimentación deseada es $PW_F/\Delta\alpha = 34 \text{ ms} / ^\circ$. Como la combinación de convertidor D/A y TPS en el caso de un convertidor A/D de 8 bits tiene un factor de escala de 255 bits/90°, se requiere un factor de escala interno de 12 ms/bit. Por tanto, PW_F sólo puede tener valores que sean múltiplos de 12 ms (hasta 50 ms).

Se puede lograr una mejor solución amplificando la salida de la señal del TPS y después utilizando un canal A/D extra, aunque el hardware adicional es más costoso. Supóngase que se elige que la ganancia del amplificador sea 3. Entonces, la combinación de convertidor D/A, amplificador y TPS tiene un factor de escala de 255 bits/30°, y para obtener una ganancia de retroalimentación de 34 ms/° ahora se requiere un factor de escala interno de 4 ms/bit. Como PW_F ahora puede tener valores que sean múltiplos de 4 ms, la mejora en la resolución reduce la probabilidad de un ciclo límite.

35.1.5 Conceptos avanzados

Método de Lagrange para calibraciones óptimas de motores

En el pasado, las calibraciones de SA, A/F y EGR de motores se realizaban por el método de tanteos sobre el vehículo, que consume mucho tiempo. Además, una serie de calibraciones para una determinada combinación de motor y vehículo no necesariamente era válida para otra combinación, incluso si sólo difería ligeramente en cilindrada, momento de torsión, etc. Este uso ineficiente de potencial humano y capital ha motivado la aplicación de técnicas avanzadas para la determinación de calibraciones "óptimas".

El problema de control óptimo del motor⁹⁻¹² consiste en determinar el conjunto de dispositivos de control que minimice el combustible total consumido en un programa de manejo como el FTP, sujeto a restricciones de emisión. Un método¹² para abordar este problema consiste en utilizar modelos del motor que relacionen la producción de emisiones y el consumo de combustible como función de las variables de entrada en puntos de operación seleccionados que representen el programa de manejo FTP (sección 35.2.1). Sean M el número de puntos de tiempo en el programa de manejo, x_i los puntos de operación del motor definidos por la velocidad y carga en el tiempo t_i , u_i los medios de control del motor en el tiempo t_i , $FC(x_i, u_i)$ el consumo de combustible y $HC(x_i, u_i)$, $NO_x(x_i, u_i)$ y $CO(x_i, u_i)$ el ritmo de producción de las variables de emisión respectivas. Por tanto, el problema de control óptimo consiste en determinar un u_i que minimice $\sum_{i=1}^M FC(x_i, u_i)$ sujeto a las restricciones de emisión:

$$\sum_{i=1}^M HC(x_i, u_i) \leq HC_{\text{máx}}$$

$$\sum_{i=1}^M NO_X(\mathbf{x}_i, \mathbf{u}_i) \leq NO_{X \text{ máx}}$$

$$\sum_{i=1}^M CO(\mathbf{x}_i, \mathbf{u}_i) \leq CO_{\text{máx}} \quad (35-9)$$

Otras limitaciones que se deben cumplir son las ecuaciones que relacionan las variables del motor \mathbf{x} con las variables de control \mathbf{u} :

$$h(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = 0 \quad \mathbf{u} = (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_M)$$

$$\mathbf{x} = (\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_M) \quad (35-10)$$

y las cotas superior e inferior de las variables de control:

$$\mathbf{u}_L \leq \mathbf{u}_i \leq \mathbf{u}_U \quad (35-11)$$

El lagrangiano se forma anexando las restricciones de los gases de escape a la función objetivo; es decir:

$$L = \sum_{i=1}^M FC(\mathbf{x}_i, \mathbf{u}_i) + \lambda_1 \left[\sum_{i=1}^M HC(\mathbf{x}_i, \mathbf{u}_i) - HC_{\text{máx}} \right] +$$

$$+ \lambda_2 \left[\sum_{i=1}^M NO_X(\mathbf{x}_i, \mathbf{u}_i) - NO_{X \text{ máx}} \right] +$$

$$+ \lambda_3 \left[\sum_{i=1}^M CO(\mathbf{x}_i, \mathbf{u}_i) - CO_{\text{máx}} \right] \quad (35-12)$$

Por tanto, el problema lagrangiano consiste en determinar una \mathbf{u} que minimice L sujeta a las restricciones impuestas sobre las relaciones del motor y las cotas de control. La solución al problema lagrangiano es asimismo la solución al problema de calibración del motor y, de hecho, se descompone en M problemas de menor tamaño; esto es, los medios de control que minimizan L también resuelven el problema de minimización en cada punto de tiempo t_i . En el capítulo 34 se pueden encontrar detalles de los métodos de solución.

El conjunto óptimo de medios de control sólo es válido en los M puntos de operación seleccionados (que se caracterizan por velocidad y carga). Aunque estos puntos son representativos del programa de conducción FTP, se requieren aproximaciones polinomiales a las leyes de control óptimo a fin de establecer una estrategia de control para condiciones de operación no consideradas y para obtener una transición suave de los medios de control, que en caso contrario provocarían un comportamiento errático del motor.

Método de optimización cuadrática lineal

En el método de Lagrange para realizar calibraciones óptimas de motores no se considera la dinámica inherente de motor, actuadores o sensores. Los fenómenos transitorios del programa de conducción FTP son relativamente lentos (comparados con la dinámica de los componentes); por tanto, esta técnica parece ser adecuada para las calibraciones de emisiones. El pro-

blema es que, en la práctica, el logro de estas calibraciones puede ser complicado por deficiencias en el funcionamiento. Esto es, debido a efectos dinámicos de sensor y actuador, pueden ocurrir fallos, pérdida de potencia o vacilación del motor. Estos son fenómenos indeseables que se relacionan con la respuesta del vehículo al movimiento del pedal del acelerador.

Numerosos investigadores¹³⁻¹⁶ han intentado pensar la dinámica de componentes. Una técnica que ha recibido mucha atención en la industria aeroespacial en la última década y que algún día puede hallar aplicación en la industria de los automóviles es la optimización cuadrática lineal (LQ). En este concepto de "conducción por alambres" (en comparación con el "vuelo por alambres" de la industria aeroespacial) se hace uso de un sistema de microcomputación para controlar las entradas del motor (inclusive las de la mariposa del acelerador) en respuesta a las órdenes del conductor en el pedal del acelerador. Éste es fundamentalmente diferente del control ordinario en que aquí el conductor no tiene vínculo directo con la posición de la mariposa del acelerador. Para permitir una operación libre de fallos en la práctica, el control LQ probablemente agregaría o restaría perturbaciones de control en torno a conexiones mecánicas nominalmente controladas (cuando menos en el caso del control del acelerador).

El motivo más poderoso del empleo de la optimización LQ es la estructura, nada complicada, del controlador. El diseño del controlador requiere la creación de modelos de motores linealizados en forma de variables de estado. Para limitar el número de modelos en la práctica, se generan modelos en los puntos representativos de la operación del motor y después se emplean funciones suaves para hacer posibles modificaciones en los parámetros del modelo. El controlador envía órdenes relativas a la posición de la mariposa del acelerador, EGR, A/F y SA.

El problema LQ se formula como un problema de regulador de tiempo infinito, donde $\delta \mathbf{u}(t)$ se elige de modo que se minimice la funcional cuadrática:

$$J = \int [\delta \mathbf{x}^T \mathbf{S} \delta \mathbf{x} + \delta \mathbf{u}^T \mathbf{Q} \delta \mathbf{u} + \delta \dot{\mathbf{u}}^T \mathbf{R} \delta \dot{\mathbf{u}}] dt \quad (35-13)$$

sujeta a la ecuación dinámica linealizada:

$$\delta \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A} \delta \mathbf{x} + \mathbf{B} \delta \mathbf{u} \quad (35-14)$$

El vector de estado $\delta \mathbf{x}$ incluye toda la dinámica de motor, actuador y sensor; sin embargo, como sólo interesa el aspecto de la manejabilidad, únicamente se necesita que la matriz de penalización \mathbf{S} penalice los estados que representen el momento de torsión (par) y velocidad del motor. La solución a este problema de optimización es la bien conocida ley de control de estado por retroalimentación:

$$\delta \dot{\mathbf{u}} = -\mathbf{K}_1 \delta \mathbf{x} - \mathbf{K}_2 \delta \mathbf{u} \quad (35-15)$$

donde:

$$\mathbf{K}_1 = \mathbf{R}^{-1} \mathbf{P}_2 \quad \text{y} \quad \mathbf{K}_2 = \mathbf{R}^{-1} \mathbf{P}_3 \quad (35-16)$$

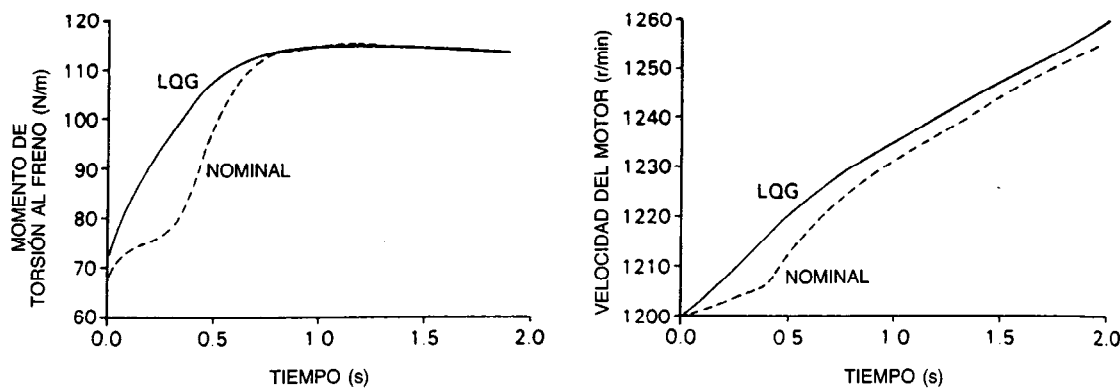


Fig. 35-16. Problema gaussiano cuadrático lineal (LQG) simulado y respuesta nominal a la entrada escalonada mariposa del acelerador.

Las matrices P_2 y P_3 se determinan a partir de la solución a la ecuación matricial algebraica de Riccati:

$$P_1 A + A^T P_1 + S - P_1^T R^{-1} P_1 = 0$$

$$B^T P_1 + P_2 A - P_3 R^{-1} P_2 = 0 \quad (35-17)$$

$$P_2 B + B^T P_2^T + Q - P_3 R^{-1} P_3 = 0$$

Para la mayor parte de las aplicaciones prácticas, el estado completo δx no está disponible para el controlador, debido ya sea a que algunos de los estados no son medibles o bien porque el diseñador del medio de control decide no medir ciertos estados debido a los costos de los sensores. En cualquier caso se debe utilizar un reconstructor de estados, como el filtro de Kalman¹⁷. Este filtro estima el estado de error cuadrático medio mínimo para un sistema lineal degradado por ruido gaussiano blanco de la planta y ruido propio de la medición. Se emplean los estados medidos y las entradas conocidas del sistema y se produce la estimación de estado óptimo $\delta \hat{x}$. Por tanto, en la ley de control de la ecuación 35-15, δx se sustituye por $\delta \hat{x}$. Debido a la caracterización estadística supuesta del ruido, el problema LQ se ha convertido ahora en un problema LQG (gaussiano cuadrático lineal).

Para ilustrar la ventaja del control LQ sobre el control ordinario en una maniobra transitoria considérese un incremento brusco del 20% en el mando del acelerador, que corresponde a una maniobra de aceleración de 48 a 56 km/h. El controlador LQ incrementa SA a la vez que coordina el mando EGR y la abertura real de la mariposa del acelerador. Al impedirse una abertura abrupta del acelerador al mismo tiempo que se incrementa en forma pronunciada el consumo inicial de combustible, se reduce la desviación en A/F en los cilindros.

En la figura 35-16 se comparan la respuesta del momento de torsión y la velocidad con el control ordinario. Para éste, la apertura rápida del acelerador hace que el flujo de aire cambie rápidamente. Debido a que el flujo de combustible cambia más lentamente, existe un "empobrecimiento" de la mezcla de aire y combus-

tible en los cilindros. Esto produce una ligera pérdida de potencia, que el conductor puede encontrar inaceptable.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

1. "EPA Dynamometer Driving Schedule", *Title 40 United States Code of Federal Regulations*, parte 86, apéndice 1.
2. "Test Procedures", *Title 40 United States Code of Federal Regulations*, parte 86, 177-5 a 177-15.
3. L. S. Vora, "Computerized Five Parameter Engine Mapping", documento 770079 SAE International Congress and Exposition, Society of Automotive Engineers, Detroit, MI.
4. J. A. Tennant, R. A. Giacomazzi, J. D. Powell y H. S. Rao, "Development of Engine Models via Automated Dynamometer Tests", documento 790179, SAE International Congress and Exposition, Society of Automotive Engineers, Detroit, MI.
5. D. M. Young y R. T. Gregory, *A Survey of Numerical Mathematics*, Vol. I, Addison-Wesley, Reading, MA.
6. D. J. Dobner, "A Mathematical Engine Model for Development of Dynamic Engine Control", documento 800054, SAE International Congress and Exposition, Society of Automotive Engineers, Detroit, MI.
7. F. E. Coats Jr. y R. D. Fruechte, "Dynamic Engine Models for Control Development, Part II: Application to Idle Speed Control", *Int. J. Vehicle Design*, Technological Advances in Vehicle Design Series SP3, *Application of Control Theory in the Automotive Industry*, pp. 75-88. Editor en jefe: M. A. Dorgham; editor invitado: R. D. Fruechte, Interscience Enterprises, Ltd. Ginebra, Suiza.
8. J. H. Currie, D. S. Grossman y J. J. Gumbleton, "Energy Conservation with Increased Compression Ratio and Electronic Knock Control", documento 790173, SAE International Congress and Exposition, Society of Automotive Engineers, Detroit, MI.

9. J. E. Aiuler, J. D. Zbrozek y P. N. Blumberg, "Optimization of Automotive Engine Calibration for Better Fuel Economy - Methods and Applications", documento 770076, SAE International Congress and Exposition, Society of Automotive Engineers, Detroit, MI.
10. J. F. Cassidy, "A Computerized On-Line Approach to Calculating Optimum Engine Calibrations", documento 770078, SAE International Congress and Exposition, Society of Automotive Engineers, Detroit, MI.
11. A. R. Dohner, "Transient System Optimization of an Experimental Engine Control System Over the Federal Emissions Driving Schedule", documento 780286, SAE International Congress and Exposition, Society of Automotive Engineers, Detroit, MI.
12. H. S. Rao, A. I. Cohen, J. A. Tennant y K. L. Van Voorhies, "Engine Control Optimization Via Nonlinear Programming", documento 790177, SAE International Congress and Exposition, Society of Automotive Engineers, Detroit, MI.
13. J. F. Cassidy Jr., M. Athans y W. H. Lee, "On the Design of Electronic Automotive Engine Controls Using Linear Quadratic Control Theory", *IEEE Trans. Auto. Contr.* **AC-25(5)**:901-912.
14. J. B. Lewis, "Automotive Engine Control: A Linear Quadratic Approach", tesis manuscrita, Massachusetts Institute of Technology, Cambridge, MA.
15. D. L. Stivender, "Engine Air Control - Basis of a Vehicular Systems Control Hierarchy", documento 780346, SAE International Congress and Exposition, Society of Automotive Engineers, Detroit, MI.
16. R. L. Woods, "An Air Modulated Fluidic Fuel Injection System", *Trans. ASME J. Dynamic Sys. Measure. Contr.* **101**:71-76.
17. R. E. Kalman, "A New Approach to Linear Filtering and Prediction Problems", *Trans. ASME J. Basic Eng.* **82**:34-35.

35.2 SISTEMAS DE CONTROL DE PROCESOS INDUSTRIALES

Thomas E. Marlin

35.2.1 Importancia del control de procesos

En esta sección se presentan los conceptos básicos y un ejemplo de implementación del control automático según se aplica en las industrias de procesos. Las industrias de procesos se caracterizan por plantas grandes y complejas que requieren un control automático (control de procesos) excelente para lograr una operación segura y rentable. En la mayor parte de las plantas se procesan fluidos, pastas aguadas o sólidos a través de un conjunto integrado de operaciones unitarias como hornos, reactores químicos, unidades de separación física y cambiadores de calor. Se procesan grandes cantidades de materias, hasta cientos de toneladas por hora, a presiones extremas, de más de 100 bar, y temperaturas que van desde -200 hasta por encima de 1 000 °C. Además de los desafíos del control se tienen las estrictas especificaciones de productos, que pueden requerir composiciones con menos de 10 partes por millón de impurezas. Las áreas de negocios principales que se consideran típicas de las industrias de procesos son: refinación de petróleo, plantas químicas, molinos de papel, plantas farmacéuticas, procesamiento de alimentos, acerías y centrales eléctricas.

Un objetivo básico común a estas industrias consiste en el logro de índices de producción de material deseados cumpliendo con las demandas de calidad especificadas de forma segura y ambientalmente aceptable. Con fines de control de procesos, esta meta se puede ampliar para incluir los objetivos de control que se enuncian en la tabla 35-4. Esta tabla resulta una valiosa lista para la comprobación, con lo que se puede consultar cuando se genere el diseño preliminar de un sistema de control para regular temperaturas, presiones, gastos, etc.

La relación entre el objetivo general y el diseño de control específico a menudo no es evidente. Por tanto, el diseñador del control de procesos deberá compren-

Tabla 35-4. Objetivos del control de procesos

-
- Operar el proceso en forma segura y estable
 - Diseñar sistemas de control que el operador pueda vigilar, comprender y, cuando sea necesario, manipular en forma selectiva
 - Evitar desviaciones importantes respecto a las especificaciones de productos durante las perturbaciones
 - Permitir que el operador cambie un valor deseado o punto de colocación (valor de referencia) sin perturbar indebidamente otras variables controladas
 - Evitar cambios considerables y rápidos en variables manipuladas que podrían incumplir restricciones de operación, o perturbar unidades integradas o situadas corriente abajo
 - Operar el proceso en forma congruente con los objetivos de calidad del producto, por ejemplo, las desviaciones en la calidad de un producto podrían ser mucho más costosas que las de otro producto
 - Controlar las cualidades del producto en valores que maximicen la utilidad de la operación cuando se consideren índices y valores de productos y el consumo de energía
-

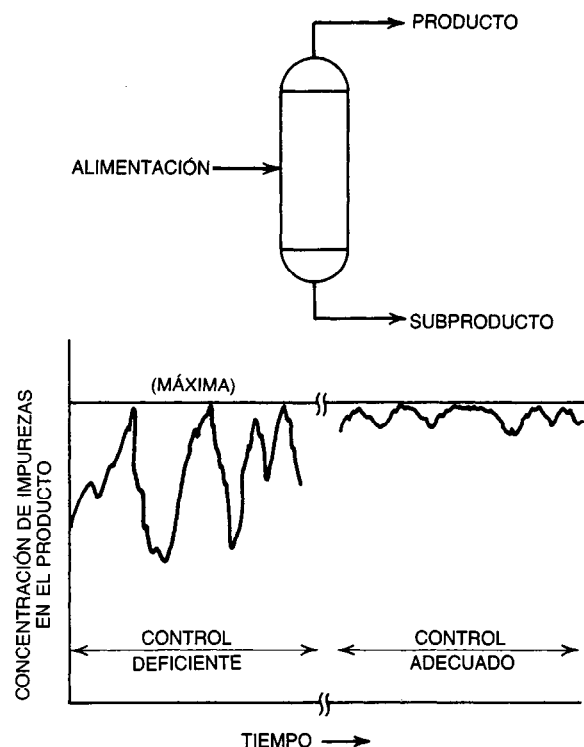


Fig. 35-17. Columna de destilación que separa un insumo en un producto valioso con máximo contenido de impurezas y un subproducto de calidad inferior.

der bien las fuerzas económicas de la planta, la operación de estado estable y dinámica, y la teoría del control automático.

Es obvio que un objetivo importante del control consiste en incrementar la rentabilidad de la planta, por ejemplo, incrementando la producción de bienes de más alto valor y reduciendo el consumo de combustible. A menudo es posible incrementar la rentabilidad a través del control que hace que la operación de la planta se aproxime a las condiciones óptimas. En la figura 35-17 se ilustra una columna de destilación que separa un insumo en un valioso producto con un límite de máximo nivel de impurezas y un subproducto con valor inferior. Una mejora en el control a través de los métodos que se analizan en esta sección incrementa el porcentaje del insumo, que se convierte en el producto de valor más alto mediante una máxima limitación de impurezas.

La experiencia ha demostrado que mediante el control de procesos mejorado pueden lograrse grandes beneficios económicos en una amplia diversidad de plantas, como refinerías¹, plantas químicas^{2,3}, plantas eléctricas⁴, fábricas de papel⁵ y acerías⁶.

Para obtener estos beneficios, el control de procesos se aplica típicamente a todas las unidades de proceso de toda una planta. La mayor parte de las variables medidas se transmiten desde sensores situados por toda la planta hasta el alojamiento del control centra-

lizado. Las mediciones se visualizan sobre paneles en una sala de control especialmente diseñada para uno o más operadores de planta, que son responsables de su operación. Se realizan cálculos analógicos o digitales hasta para varios cientos de controladores de ciclo cerrado por medio de equipo de cómputo situado en la sala de control. Las señales resultantes se transmiten a los elementos de control finales, en su mayor parte válvulas, para efectuar modificaciones en las variables del proceso. Naturalmente, el operador de planta tiene la opción de intervenir en cualquier sistema de ciclo cerrado y ajustar directamente la variable manipulada (en lo que suele denominarse operación manual o de ciclo abierto). También existen sistemas de seguridad y alarma automáticos que evitan lesiones al personal o daños al equipo.

El diseño de un sistema de control para toda la planta es obviamente una tarea compleja que escapa al alcance de esta exposición. Sin embargo, aquí se explican los conceptos básicos que se requieren para analizar secciones de planta menores y diseñar sistemas de control; estos conceptos, aunados a una experiencia considerable, son suficientes para implementar el control de procesos en forma óptima en la mayor parte de las plantas industriales de procesos.

En la sección que sigue se presenta la forma de caracterizar la respuesta dinámica típica (función de transferencia) de un ciclo de control. En las secciones

posteriores se presenta el uso de esta caracterización en el diseño de sistemas de control de procesos de una sola variable y de variables múltiples y en la determinación de parámetros ajustables (lo que se denomina ajuste). Después se presentan otras extensiones del tema para mejorar el control regulatorio y de optimización. Por último, se resumen y demuestran con ejemplos algunas consideraciones generales sobre el diseño del control de procesos.

35.2.2 Dinámica de procesos

Para diseñar el sistema de control de un proceso es necesario el entendimiento integral de la respuesta dinámica sin control, que se llama respuesta de ciclo abierto. En la mayor parte de los procesos industriales, la respuesta dinámica es el resultado de complejos procesos fisicoquímicos que requerirían hasta miles de ecuaciones diferenciales para ser modelados en detalle⁷. Por fortuna, el diseñador de control suele estar interesado en las relaciones que existen entre las variables manipuladas y las controladas en un intervalo de operación limitado, y estas relaciones se pueden caracterizar a menudo por ecuaciones lineales con sólo unos cuantos coeficientes. Estas ecuaciones se utilizan directamente en el diseño y ajuste de los sistemas de control que se describirán de aquí en adelante.

Autorregulación

Estabilidad y autorregulación son factores clave en la respuesta dinámica de un proceso de ciclo abierto. Casi todos los procesos industriales son de ciclo abierto asintóticamente estables (que se definen en el capítulo

34), salvo los procesos no autorregulatorios que se describirán; por tanto, en esta sección no se considera ningún otro proceso inestable de ciclo abierto.

La autorregulación es una propiedad inherente en la mayor parte de los procesos, la cual los hace cambiar a un nuevo estado estable después de que se ha hecho una modificación en una variable manipulada. Esta propiedad se explica mejor recurriendo a los procesos simples de nivel de la figura 35-18. Para el proceso autorregulatorio, el nivel se eleva como resultado de un incremento en el flujo de entrada al tanque. La carga hidrostática incrementada provoca un aumento en el flujo de salida. Con el tiempo se restablece el equilibrio entre el flujo de entrada y el de salida, y el nivel cambia a un nuevo estado estable alterado. Para el proceso no autorregulatorio, el flujo de entrada y el de salida no están acoplados por medio del nivel, y éste cambia (hasta que desborda el tanque) a velocidad constante, proporcional a la diferencia entre los flujos de entrada y salida. Como resultado, los procesos de nivel se denominan a menudo integradores puros. El cambio de nivel es el proceso industrial no autorregulatorio más frecuente, y su control se dirige con un método de ajuste individual. Por tanto, lo que resta de esta sección se concentra en los procesos autorregulatorios.

Modelos de procesos

El proceso autorregulatorio más frecuente es el sobreamortiguamiento (que se define en el capítulo 34); es decir, la respuesta dinámica es no oscilatoria y nunca excede su nuevo estado estable cuando responde a un cambio brusco de escalón. Para una región

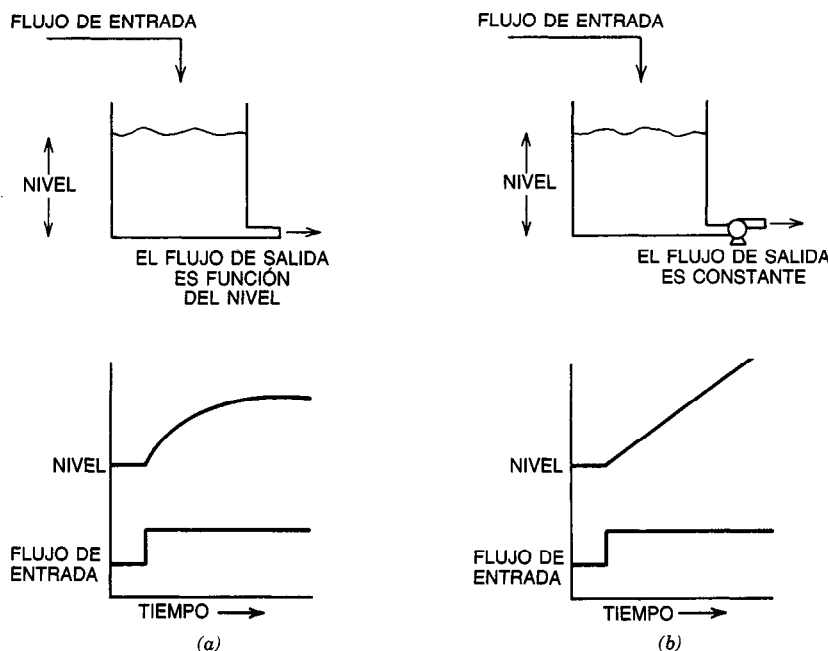


Fig. 35-18. Ejemplos de niveles: a) autorregulatorio y b) no autorregulatorio de un tanque.

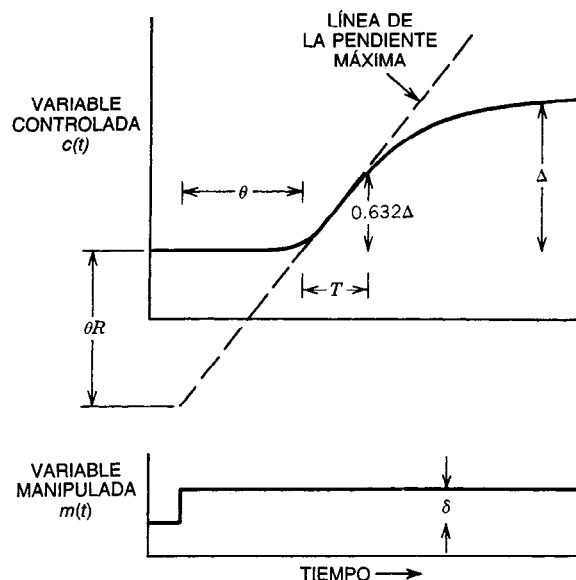


Fig. 35-19. Curva de reacción de proceso y parámetros de tiempo muerto de primer orden. Tiempo muerto = θ , constante de tiempo = t o bien Kp/R , ganancia del proceso = Δ/δ .

limitada en torno a una condición de operación normal, este proceso puede representarse por medio de modelos simples de funciones de transferencia tales como los siguientes:

Retraso y tiempo muerto de primer orden

$$\frac{C(s)}{M(s)} = \frac{Kpe^{-\theta s}}{(1 + \tau s)}$$

Retraso y tiempo muerto de segundo orden

$$\frac{C(s)}{M(s)} = \frac{Kpe^{-\theta s}}{(1 + \tau_1 s)(1 + \tau_2 s)}$$

donde $C(s)$ = cambio en la variable controlada
 Kp = ganancia del proceso de estado estable
 $M(s)$ = cambio en la variable manipulada
 θ = tiempo muerto
 τ, τ_1, τ_2 = constantes de tiempo
 s = variable de Laplace

Tiempo muerto es el que transcurre entre el momento en que se modifica la variable manipulada y aquel en que la variable controlada comienza a responder. Para el diseño y ajuste de controladores, un proceso de retraso y tiempo muerto de primer orden constituye una aproximación adecuada.

Curva de reacción del proceso

Los parámetros de un modelo de tiempo muerto de primer orden (ganancia, constante de tiempo y tiempo muerto) se pueden determinar a partir de la respuesta empírica de la variable controlada a un cambio brusco (en forma de escalón) en la variable manipulada. Esta

respuesta, que se denomina curva de reacción del proceso, se ilustra en la figura 35-19 con el método de cálculo de los parámetros del modelo⁸. La curva de reacción del proceso puede obtenerse ajustando manualmente la variable manipulada; se deben obtener varias curvas de reacción del proceso con cambios de la variable manipulada de diferentes tamaños y direcciones para garantizar que los datos sean válidos y el proceso sea casi lineal. Es obvio que el cambio en la variable manipulada debe ser lo suficientemente grande como para producir un cambio en la variable controlada sustancialmente mayor que el ruido de la señal, pero no tan grande que constituya una perturbación importante del proceso.

Método de la curva de reacción del proceso. Es el más simple y más aplicado para estimar parámetros de modelos. Sin embargo, requiere que la perturbación introducida intencionalmente dure hasta que el proceso haya cambiado a un nuevo estado estable. En los pocos casos en los cuales no es aceptable una perturbación larga de este tipo, los parámetros se pueden estimar a partir de la respuesta del proceso a un pulso modificado (onda cuadrada); el procedimiento de estimación requiere un programa de computadora para evaluar la transformada integral de Fourier⁹. También existen otros métodos¹⁰ de procesos oscilatorios y de orden superior no dirigidos por el método de la figura 35-19.

Métodos de respuesta brusca (escalón) y de pulso. Requieren que el proceso se opere en ciclo abierto. Se han propuesto métodos estadísticos que perturban en forma periódica el sistema de control de ciclo cerrado y estiman los parámetros del modelo. Estos métodos no

se han empleado mucho debido a las perturbaciones periódicas requeridas del proceso y a la dificultad de estimar parámetros con ruido correlacionado en el sistema de ciclo cerrado¹¹.

Si no se pueden realizar pruebas de planta o si ésta se encuentra en fase de diseño, no es factible la aplicación de métodos empíricos para determinar coeficientes del modelo. Para algunos procesos, se pueden obtener sin dificultad estimaciones aproximadas de los parámetros. Por ejemplo, una constante de tiempo se podría relacionar con la retención en un cuerpo de caldera (volumen/flujo), o bien el tiempo muerto podría ser el retraso en el transporte por una tubería (longitud/velocidad). No obstante, la dinámica de muchos procesos industriales está constituida por los resultados de interacciones complejas entre reacciones químicas, equilibrios de fase y retenciones múltiples. Por tanto, para procesos complejos como los de los reactores químicos y columnas de destilación que requieren análisis detallado, el recurso usual consiste en realizar una simulación detallada de la dinámica del proceso.

Finalmente, no se debe considerar que el hincapié que aquí se hace en los modelos lineales con coeficientes constantes implica que estos modelos de procesos sean muy exactos, especialmente sobre una gama amplia de condiciones de operación. Más bien, el éxito de estos modelos en el control de procesos consiste en indicar que los métodos de control que se explican en las secciones que siguen no son excesivamente sensibles a errores en los modelos. Sin embargo, los errores grandes debidos a no linealidades del proceso, perturbaciones de carga no registradas y ruido en la medición pueden degradar en forma importante el rendimiento del control.

35.2.3 Control por retroalimentación de una sola variable

Una planta de procesos típica tiene varios cientos de variables controladas, y muchas de ellas se pueden regular por medio de controladores de retroalimentación de una sola entrada y una sola salida. Además, casi todos los diseños de control avanzados de las industrias

de procesos (secs. 35.2.5 y 35.2.6) conservan los controladores de una sola variable al nivel más bajo de una jerarquía de control. Por fortuna, décadas de experiencia en las plantas han demostrado que se puede lograr un óptimo rendimiento del control por retroalimentación lineal, la derivada integral proporcional, o PID.

El desempeño de este controlador puede modificarse para que se acomode a muchas necesidades de aplicación mediante el ajuste de algunos parámetros. Debido a su gran éxito, el algoritmo que se presenta en esta sección es utilizable en casi toda la instrumentación analógica y digital y sistemas de control por computadora comerciales; por tanto, las explicaciones y guías de ajuste que se presentan son aplicables con cambios o sin ellos en estos sistemas. En esta sección se presentan los conceptos básicos del controlador PID y se explican las guías de ajuste. Después se explican la modificación moderada del algoritmo y métodos de ajuste alternativos que comúnmente se aplican en respuesta a circunstancias especiales del proceso. Por último, se analizan el filtrado y verificación de validez de la señal de entrada medida.

Controlador PID

La relación del controlador PID con otros componentes del sistema de retroalimentación se ilustra en la figura 35-20. El controlador opera en una señal de error que es la diferencia entre la variable medida y el valor deseado o punto de ajuste (referencia). El objetivo general del controlador es mantener el error dentro de límites razonables y por lo común lograr un error con valor cero. El controlador cumple este objetivo calculando la variable manipulada; este cálculo se entiende más fácilmente como la suma de tres modos. El primer modo es el control proporcional, que se determina según la ecuación:

$$m_p(t) = K_c e(t) + \text{constante} \quad (35-18)$$

donde K_c = ganancia proporcional y $100/K_c$ = banda proporcional. El modo proporcional ofrece una corrección instantánea en la variable manipulada para

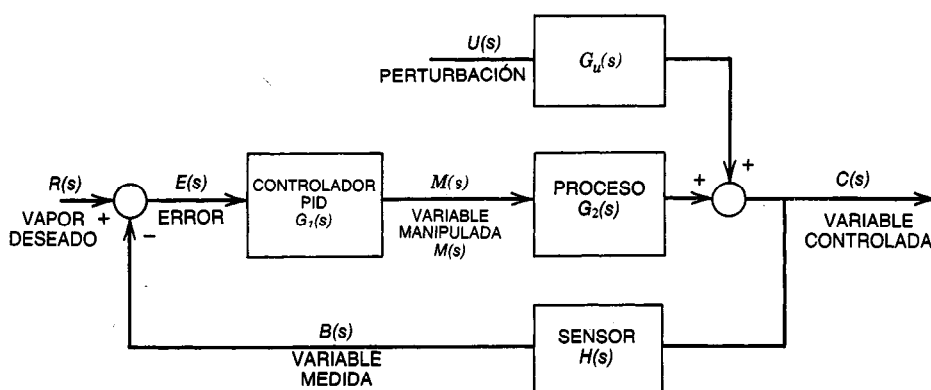


Fig. 35-20. Diagrama de bloques de un sistema de control de una sola variable en que se utiliza un controlador derivado integral proporcional (PID).

una señal de error. Sin embargo, un controlador puramente proporcional no puede reducir el error a cero; este error sostenido se llama desviación (o derivación) proporcional. Si se intenta reducir el error a un valor pequeño incrementando la ganancia, se llega a una inestabilidad de ciclo cerrado en todos los procesos excepto los simples de primer orden sin tiempo muerto.

La desviación proporcional puede eliminarse por medio del modo integral (también llamado de recolocación) que se calcula conforme a:

$$m_I(t) = \frac{K_c}{K_I} \int e(t) dt + \text{constante} \quad (35-19)$$

donde K_I = tiempo integral. El modo integral modifica continuamente la variable manipulada hasta que el error es cero, pero no responde en forma rápida a la primera aparición de un error distinto de cero. Se puede lograr una mejora extra con el modo derivado o de tasa de cambio, que se calcula como sigue:

$$m_d(t) = K_c K_D \frac{d}{dt} b(t) + \text{constante} \quad (35-20)$$

donde K_D = tiempo derivado. En el modo derivado se reconoce la tasa de cambio de la variable medida y se corrige la variable manipulada en la forma correspondiente.

El controlador PID combina los tres modos en un algoritmo, que se presenta aquí en las formas continua y discreta:

$$m(t) = K_c \left(e(t) + \frac{1}{K_I} \int e(t) dt + K_D \frac{db(t)}{dt} \right) + \text{cons.} \quad (35-21)$$

$$m_n = K_c \left(e_n + \frac{\Delta t}{K_I} \sum_i e_i + \frac{K_D}{\Delta t} (b_n - b_{n-1}) \right) + \text{cons.} \quad (35-22)$$

donde n = número de ejecución y Δt = periodo de ejecución.

Este controlador se emplea más comúnmente como una PID o como una PI, que requiere que K_D sea igual a cero. Naturalmente, la retroalimentación negativa requiere ganancias proporcionales de signos diferentes para procesos diversos. El signo suele introducirse en forma independiente a través de un conmutador que indica el "sentido" del controlador, y la ganancia de éste siempre es positiva.

Cuando el controlador se coloca inicialmente en automático a partir del estado de posición manual, debe iniciar el cálculo del control de $m(t)$ al valor actual de la variable manipulada para evitar una perturbación del proceso. Este inicio suele denominarse transferencia sin perturbaciones. Durante él es cuando se evalúa el término "constante". En algunos sistemas digitales se dispone de otras opciones de inicio, tales como ajustar el punto de colocación igual a la variable medida actual, pero su uso es muy específico del sistema digital y de la aplicación.

Ajuste del controlador

La capacidad del controlador para cumplir sus objetivos de control durante el funcionamiento automático depende altamente de los valores de los parámetros de ajuste K_c , K_I , y K_D . En la mayor parte de los procesos el objetivo consiste en mantener el valor controlado próximo al valor deseado, o punto de colocación, cuando ocurren perturbaciones y cambios de dicho punto, al mismo tiempo que se limita la variación de la variable manipulada. En la figura 35-21 se ilustra una respuesta de un sistema de una sola variable a un cambio del punto de colocación. La averiguación de los parámetros de ajuste corrector de cada proceso es un procedimiento gradual en que interviene:

1. La determinación de los parámetros de control iniciales.
2. Su implementación y observación del rendimiento del sistema.
3. El ajuste de los parámetros para obtener el rendimiento deseado.

Por fortuna, el rendimiento del controlador no es muy sensible al ajuste de éste; por tanto, variaciones menores en el proceso (p. ej., no linealidades) y los errores de ajuste no degradan el rendimiento en forma importante.

Los parámetros iniciales del controlador para procesos sobreamortiguados se pueden determinar directamente a partir de la curva de reacción de procesos de ciclo abierto que se describe en la figura 35-19. Se pueden obtener parámetros iniciales razonables mediante el uso de las bien conocidas ecuaciones de Ziegler-Nichols que siguen¹².

Proporcional

$$K_c = \frac{\delta}{\theta R} \quad (35-23)$$

PI

$$K_c = \frac{0.90\delta}{\theta R} \quad (35-24)$$

$$K_I = 3.3\theta$$

PID

$$K_c = \frac{1.20\delta}{\theta R} \quad (35-25)$$

$$K_I = 2.0\theta$$

$$K_D = 0.5\theta$$

Se debe tener cierto cuidado al utilizar estas ecuaciones:

1. La tasa de decaimiento de 4:1 que resulta de estas constantes es demasiado oscilatoria para algunas aplicaciones. Para estos procesos sería aconsejable incrementar el tiempo integral de la estimación inicial alrededor de un 25%.

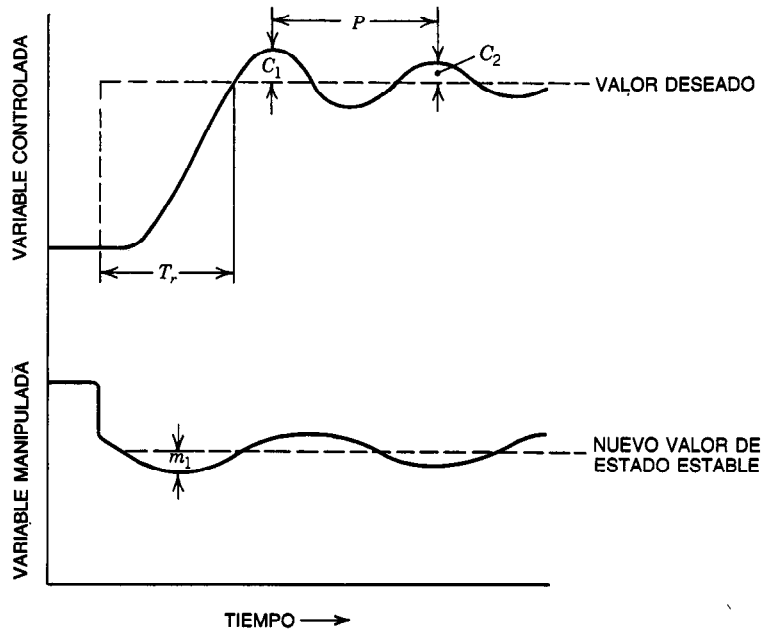


Fig. 35-21. Respuesta de ciclo cerrado a un cambio de valor deseado o punto de colocación. C_1 = sobrecorrección de la variable controlada; C_1/C_2 = relación de decaimiento; m_1 = sobrecorrección de la variable manipulada; p = periodo; T_r = tiempo de ascenso.

2. El tiempo derivado es más bien grande, en especial debido a que la mayor parte de las mediciones industriales tienen ruido significativo; por tanto, el tiempo derivado inicial debe reducirse en un 50%.
3. Las ecuaciones de Ziegler-Nichols producen ganancias muy grandes para procesos con tiempos muertos pequeños.

A pesar de que en teoría los parámetros de ajuste resultantes producen una respuesta adecuada de la variable controlada, las variaciones grandes en la variable manipulada, que tienden al control de todo o nada, suelen no ser aceptables. Cuando se aplica esta limitación, el producto de la ganancia inicial del controlador K_c y la ganancia del proceso K_p no debe ser mayor de 1.2 aproximadamente, y el tiempo integral no debe ser menor del 75% de la suma del tiempo muerto y el retraso de primer orden. Se han creado otras reglas de ajuste inicial, como el error cuadrado integral mínimo¹³, pero ninguna considera el cambio de la variable manipulada y, por tanto, no ofrecen una ventaja importante sobre las ecuaciones de Ziegler-Nichols.

El algoritmo de control digital tiene un parámetro extra en el periodo de ejecución. Si el tiempo entre las ejecuciones es demasiado grande, el rendimiento del controlador se degrada. Una regla empírica razonable consiste en mantener el periodo por debajo del 15% (más o menos) de la suma de la constante de tiempo más tiempo muerto; se dispone de correlaciones detalladas que muestran la interacción de las constantes de ajuste con el periodo de ejecución^{13, 14}.

El procedimiento de ajuste se completa implementando los parámetros iniciales y observando la respuesta de ciclo cerrado a un cambio del valor deseado o punto de colocación. En base a la respuesta, los parámetros se pueden someter a ajuste fino. Una ganancia demasiado alta provoca una sobrecorrección muy grande; un tiempo integral demasiado pequeño produce oscilaciones. Este procedimiento de ajuste fino se basa en variaciones del punto de colocación, y muchos estudios han demostrado que los parámetros óptimos del controlador son diferentes en el caso de perturbaciones y en el de variaciones de los puntos de colocación^{14,15}. Básicamente, la ganancia del controlador se debe incrementar en un 10 o 20% si la respuesta a las perturbaciones es lo más importante¹⁴ y el valor deseado o punto de colocación rara vez cambia.

En algunas aplicaciones se necesita mantener la variable controlada dentro de límites específicos a la vez que se minimiza el cambio en la variable manipulada. El ejemplo más importante de este objetivo es el control "de promediación" de nivel que atenúa las variaciones del gasto a las unidades corriente abajo mediante el uso de la capacidad de contención del recipiente. Un controlador PI lineal puede aplicarse a este proceso, pero se debe ajustar a un control proporcional casi puro para evitar oscilaciones de ciclo cerrado. Se puede lograr un mejor control de promediación de nivel a partir de un controlador PI con ganancia no lineal, de manera que la ganancia aumente con la magnitud del error¹⁶. Este controlador no lineal ofrece un mínimo ajuste en la variable manipulada hasta que el error aumenta a un valor grande.

Conclusión de la recolocación. Todos los controladores con el modo integral pueden sufrir una grave degradación del rendimiento cuando la variable manipulada se restringe. Algunas restricciones típicas son las válvulas que se abren o cierran por completo y la limitación de la velocidad en la válvula u otro elemento de control final. Cuando la variable manipulada está en un límite superior o inferior, la señal de error sigue siendo distinta de cero en un periodo extendido, y la integral del error se vuelve muy grande. Este valor integral grande hace que la variable manipulada permanezca en su restricción hasta que el término de control integral haya sido reducido por una sobrecorrección grande en la variable controlada. Este problema se denomina conclusión de la recolocación y se dispone de diversos métodos para reducir su efecto en los sistemas digitales y analógicos. Básicamente, estos métodos aseguran que la salida calculada del controlador y el valor manipulado real no se desvíen en forma considerable de cierta cantidad^{17,18}.

Ajuste autoadaptativo. En todo lo antes expuesto se supuso un proceso lineal; es decir, que los parámetros de la curva de reacción del proceso son constantes. Naturalmente, todos los procesos físicos son no lineales, y algunos procesos industriales importantes son no lineales a tal grado que las constantes de ajuste del controlador se deben ajustar frecuentemente para compensar variaciones en las condiciones de operación. Cuando este ajuste se realiza en forma automática en el sistema de ciclo cerrado, se denomina ajuste autoadaptativo. (El control autoadaptativo se analiza más a fondo en los capítulos 33 y 34.)

Un método de ajuste autoadaptativo implica la elección de un elemento de control final no lineal, usualmente una válvula, para compensar una no linealidad predecible del proceso. Un ejemplo común es el uso de una válvula equiporcentual en un ciclo de control del flujo para compensar el cambio de la caída piezométrica de la bomba con el flujo¹⁹. Un método de ajuste autoadaptativo similar es la modificación de los parámetros del controlador según reglas deterministas cuando cambian las condiciones del proceso. Este método, que se conoce como programación de la ganancia, se puede aplicar cuando la ganancia del proceso cambia con el rendimiento del proceso o la pureza del producto²⁰. El método más complejo y potencialmente más poderoso para el ajuste adaptativo implica la estimación en línea de los parámetros del modelo del proceso y el recálculo de los parámetros de ajuste. Este método no se ha aplicado ampliamente debido a la necesidad de forzar (perturbar) frecuentemente el proceso y debido a las dificultades de estimar estadísticamente parámetros en un sistema de ciclo cerrado, aunque se han informado aplicaciones industriales exitosas, como el control de temperatura de un horno de procesos²¹.

Procesamiento de la entrada. La señal medida que se envía al controlador es degradada por ruido de la medición y la transmisión y por cambios de alta frecuencia del proceso. Si es demasiado intenso, este ruido pro-

duce una variación indeseable en la variable manipulada, en especial cuando la ganancia del controlador o el tiempo derivado es grande. Por tanto, es común filtrar la señal de entrada para atenuar el ruido. El filtro más simple y más ampliamente usado es el exponencial, que es simplemente un retraso de primer orden:

$$b'(s) = \frac{b(s)}{1 + \tau_f s} \quad (35-26)$$

donde τ_f = constante de tiempo del filtro. Esta constante se ajusta para reducir el ruido. Un valor demasiado grande introduce un retraso significativo en el sistema de control por retroalimentación. El ajuste más simple y el mejor rechazo del ruido se han atribuido a la adición de una ganancia no lineal ya sea al filtro²² o bien al controlador¹⁴. La característica no lineal hace posible un mayor amortiguamiento del ruido de pequeña amplitud y una respuesta rápida a variaciones grandes de la señal de entrada.

Otro método importante de acondicionamiento de la señal de entrada es la verificación de la validez. Un objetivo común de esta verificación consiste en garantizar que el sensor esté enviando una señal mediante la comparación de la medición con su intervalo esperado, que tiene un cero activo (normalmente de 4 a 20 mA). Otras verificaciones implican la identificación de mediciones cuestionables que, por ejemplo, no cambian o bien lo hacen con demasiada velocidad. Es claro que el ingeniero de control debe comprender bien la dinámica y las características de ruido del proceso a fin de diseñar y ajustar estas verificaciones para las cuales aún existen algoritmos estándar.

35.2.4 Control por retroalimentación de variables múltiples

Cada operación unitaria de un proceso, como la de un horno, columna de destilación o reactor químico, tiene varias variables manipuladas y controladas. En el sentido más general, el sistema de control regula todas las variables controladas ajustando todas las variables manipuladas. Dado que un cambio en una variable manipulada puede influir (como a menudo lo hace) en más de una variable controlada, el diseño de esquemas de control por retroalimentación de variables múltiples es considerablemente más complejo que el del control de una sola variable. El diseño de retroalimentación de variables múltiples más simple, una combinación de controladores de una sola variable, funciona bien en muchos procesos si las variables controladas y manipuladas se parean correctamente. En algunos casos las interacciones de los procesos son tan fuertes que se debe incluir una compensación en el sistema de control.

Análisis de la interacción

Cuando no se dispone de la suficiente experiencia empírica con procesos similares, se necesita un método de análisis de las interacciones de los procesos para el diseño de un sistema de control de variables múltiples. El método debe indicar cómo se parean las variables

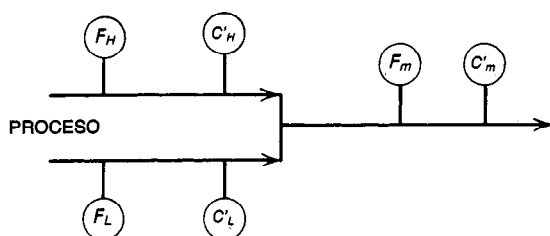


Fig. 35-22. Ganancia relativa del proceso de mezcla. F_H = flujo de la corriente H ; C'_H = propiedad de la corriente H ; F_L = flujo de la corriente L ; C'_L = propiedad de la corriente L ; F_m = flujo de la corriente mezclada; C'_m = propiedad de la corriente mezclada.

Modelo

$$F_m = F_H + F_L$$

$$C_m = \frac{F_H C_H}{F_H + F_L} \quad \text{con} \quad \begin{aligned} C_H &= C'_H - C'_L \\ C_m &= C'_m - C'_L \end{aligned}$$

Ganancia relativa

	F_H	F_L
F_m	C_m/C_H	$1 - C_m/C_H$
C_m	$1 - C_m/C_H$	C_m/C_H

Valores de muestra

C_H	F_H	F_L
C_m	F_H	F_L
	F	
	C_m	

$C_H = 1\ 000 \quad F_H = 100$
 $C_m = 100 \quad F_H = 1\ 000$
 $F = 0.10 \quad 0.90$
 $C_m = 0.90 \quad 0.10$

controladas y las manipuladas y si se espera que el rendimiento de control de un solo ciclo sufra fuertes interacciones entre los procesos. Un método llamado análisis de ganancia relativa²³⁻²⁵ es el que se aplica más comúnmente en las industrias de procesos para el control de variables múltiples. El análisis de ganancia relativa de estado estable se explica haciendo referencia al proceso de mezcla simple de la figura 35-22.

El proceso mezcla dos corrientes de diferentes composiciones para obtener una corriente combinada con la composición y el gasto deseados. La ganancia relativa que relaciona la variable manipulada j y la variable controlada i se define como:

$$\lambda_{ij} = \frac{\left(\frac{\partial c_i}{\partial m_j} \right)_{mK \neq j}}{\left(\frac{\partial c_i}{\partial m_j} \right)_{cK \neq i}} \quad (35-27)$$

Los valores de ganancia relativa se pueden determinar a partir de modelos, como se hace en la figura 35-22, o cambiando las entradas, una cada vez, de la planta o un simulador complejo. Se forma una matriz

M a partir de las relaciones resultantes, que son $\Delta c_i / \Delta m_j$, donde todos los otros términos m_K son constantes. Entonces se calcula la transpuesta de la inversa de M y se denomina C . La ganancia relativa es el producto de cada elemento de M con su elemento correspondiente (mismo renglón y columna) de C ²⁴.

Un valor de ganancia relativa de cero indica que la variable manipulada no influye en la variable controlada; un valor de uno indica que la variable manipulada influye en la variable controlada y en ninguna otra. Para facilitar el análisis, los valores de ganancia relativa suelen presentarse en un arreglo, como se ilustra en la figura 35-22. El ejemplo indica que ocurrirá una interacción relativamente débil y deberá obtenerse un control adecuado si dos controladores de un solo ciclo seorean de la manera siguiente: C_m a F_H y F_m a F_L . El otro posible pareamiento indica una muy fuerte interacción y bajo rendimiento. En general, las ganancias relativas por debajo de 0.70 o arriba de 1.5 indican rendimiento de un solo ciclo cuestionable, que quizá hace necesario el desacoplamiento (que se analiza en esta sección).

Obsérvese que en la ganancia relativa no se toma en cuenta la respuesta de diversos pareamientos a perturbaciones, y este factor importante podría ser dominante en la selección del pareamiento²⁶. En la bibliografía se pueden encontrar otros detalles acerca de este método y su aplicación a diversos procesos, como la destilación²⁷, además de ampliaciones para considerar la dinámica lineal²⁸.

Una variable de alta prioridad. En muchos casos, los objetivos de control indican que una de las variables controladas interactuantes es mucho más importante que las demás. En estos casos es adecuado el control de una sola variable incluso si el arreglo de ganancia relativa indica una fuerte interacción. Se debe elegir el pareamiento de manera que proporcione alta ganancia relativa y respuesta rápida para la variable controlada principal, y su controlador se debe ajustar estrechamente según se describe en la sección 35.2.3. Las interacciones de procesos se atenúan mediante el ajuste laxo de los controladores menos importantes, con bajas ganancias de los controladores y tiempos integrales grandes.

Desacoplamiento

El método de emplear varios controladores de una sola variable no es adecuado para procesos con fuerte interacción que requieren un buen control de varias variables. El método estándar para el diseño de un sistema de control de procesos consiste en retener el algoritmo PID básico pero modificando las salidas de los algoritmos de manera que se compensen las interacciones del proceso. El método se explica para un sistema de dos variables; las extensiones a sistemas de orden superior se deducen sin dificultad⁹. Como se ilustra en la figura 35-23, el cálculo del error de cada controlador es el mismo que en el caso del control de una sola variable. Las salidas de los controladores (m_j), pese a ello, no se implementan como las variables manipuladas del proceso. Son entradas para los cálculos

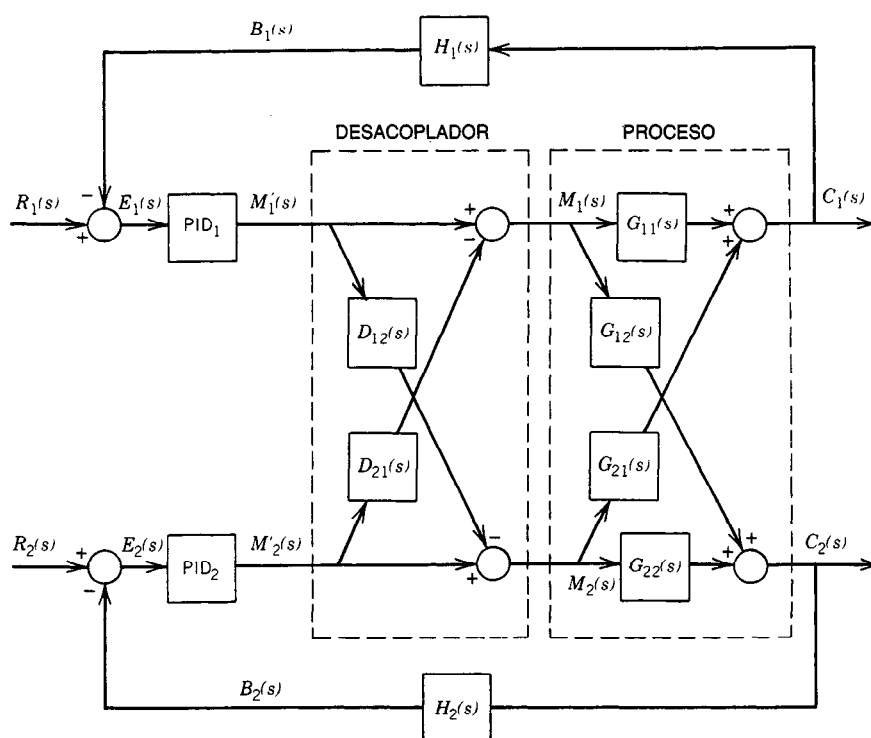


Fig. 35-23. Diagrama de bloques del sistema de control de variables múltiples con desacoplador.
PID = algoritmo derivado integral proporcional.

los de desacoplamiento que compensan los términos de interacción del proceso $G_{12}(s)$ y $G_{21}(s)$. Los términos de desacoplamiento que se dan en la ecuación 35-28 hacen posible que la salida de cada controlador influya solamente en una variable controlada²⁹:

$$D_{12}(s) = \frac{G_{12}(s)}{G_{22}(s)} \quad (35-28)$$

$$D_{21}(s) = \frac{G_{21}(s)}{G_{11}(s)}$$

Todas las funciones de transferencia pueden determinarse en forma empírica a partir de curvas de reacción de procesos. Estudios realizados han demostrado que si el numerador y el denominador de los términos de desacoplamiento tienen una dinámica semejante, suele obtenerse un desacoplamiento adecuado mediante el uso de la razón de ganancia del proceso. Los controladores pueden ajustarse por los procedimientos que se estudiaron en la sección 35.2.3. Sin embargo, se deben obtener las curvas de reacción del proceso (mediante el uso de m_i') y se debe realizar el ajuste fino para un ciclo con el desacoplamiento en operación, ya que éste figura en la función de transferencia de ciclo cerrado.

Un problema potencial con el desacoplamiento surge cuando una de las variables manipuladas llega a una

restricción (p.ej., la válvula totalmente abierta) o bien no se puede manipular (p. ej., cuando la válvula está siendo reparada). Naturalmente, no se puede controlar una variable. Lo que es más grave, la función de transferencia de ciclo cerrado cambia, lo cual afecta el rendimiento del control y, algunas veces, la estabilidad del sistema. A menudo es necesario volver a ajustar los otros controladores cuando una variable manipulada llega a una restricción.

El desacoplamiento puede mejorar en forma espectacular el rendimiento de un sistema de control de variables múltiples. En la figura 35-24 se ilustra una comparación del control con y sin desacoplamiento para el caso de una columna de destilación simulada²⁹.

Métodos de control modernos

Se están desarrollando nuevos métodos de diseño de controladores de variables múltiples que no conservan los controladores PID. Algunos están basados en los de respuesta de frecuencia, como el arreglo de Nyquist invertido³⁰. Éstos aún no han tenido un desempeño consistentemente mejor que los desacopladores estándares, quizá porque los métodos de diseño de controladores no son completos³¹. Los métodos basados en modelos más promisorios son similares a las técnicas de control óptimo en que determinan las variables manipuladas para lograr una trayectoria de control deseada³². Se han informado aplicaciones industriales exitosas en desintegradores catalíticos³³ y calderas³⁴.

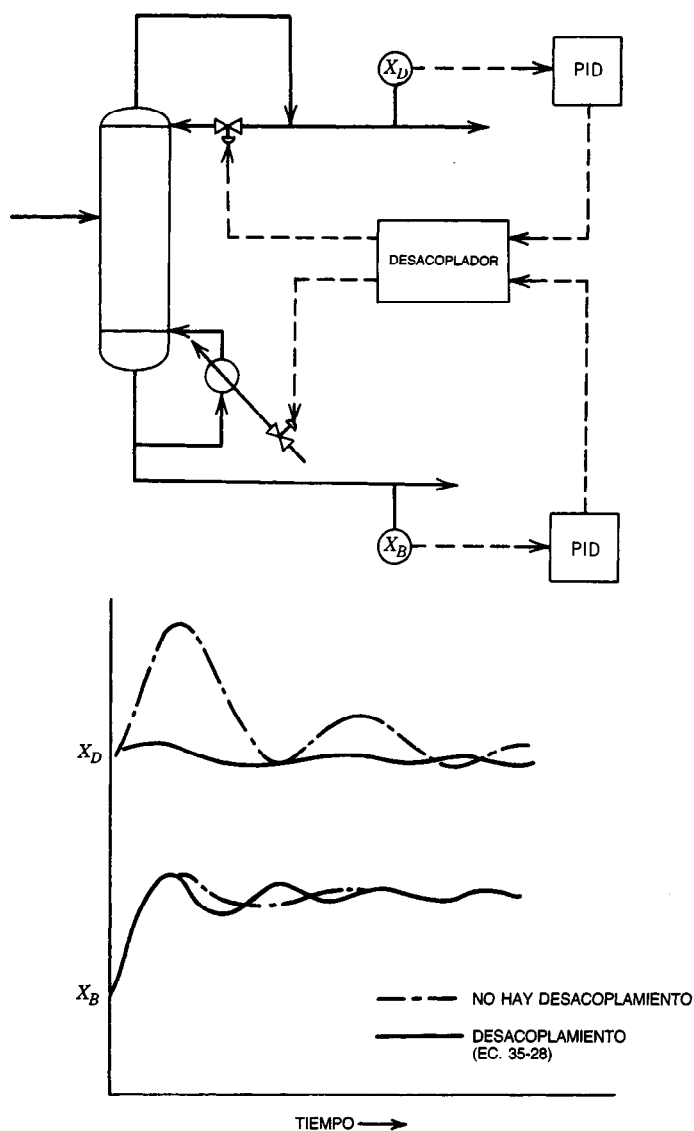


Fig. 35-24. Respuesta del control de destilación con y sin desacoplamiento para un cambio del valor deseado o punto de colocación en X_B . PID = algoritmo derivado integral proporcional. Tomado de W. Luyber, *AIChE Journal* 16:198-203.

Variables de control calculadas

Un método más de control de procesos interactivos de variables múltiples conserva los controladores PID de una sola variable sin desacoplamiento. Sin embargo, las señales de retroalimentación se calculan a partir de muchas variables medidas, para reducir las interacciones. Como no se dispone de ningún método de diseño general, el diseñador debe entender las fuentes de interacción de los procesos y el acoplamiento correcto entre controladores de variables calculadas y variables manipuladas. Hay informes de la aplicación con éxito de este método en control de destilación^{35,36}.

35.2.5 Mejoras a los métodos de control por retroalimentación

Los métodos de control de una sola variable y de variables múltiples que se presentaron en las secciones anteriores ofrecen un control óptimo de muchos procesos, pero en casos encontrados frecuentemente su desempeño se puede mejorar en forma significativa por medio de las mejoras directas que se describen en esta sección. Las tres primeras mejoras, constituidas por los controles en cascada, por corrección anticipante y de relaciones, mejoran la respuesta de sistemas de

control a perturbaciones midiendo o infiriendo éstas y compensando la variable manipulada. Naturalmente, estas mejoras se deben emplear cuando se espere que las perturbaciones degraden seriamente el rendimiento del sistema de control. La última mejora hace más eficiente el control de procesos con tiempos muertos considerables. Todas estas mejoras conservan el algoritmo de control PID básico, y se explicarán en relación con sistemas de una sola variable, aunque se pueden aplicar a sistemas de variables múltiples.

Control en cascada

Los sistemas de control en cascada tienen el potencial para identificar y corregir perturbaciones en la variable manipulada antes de que afecten en forma significativa la variable por controlar. En la figura 35-25a se ilustra un sistema estándar de una sola variable, con el proceso físico dividido en dos componentes. Las perturbaciones que ocurren en el proceso $G_2(s)$ o en el $G_2(s)$ no son captadas ni se corrigen hasta que afectan la variable controlada. El sistema de control en cascada de la figura 35-25b detecta que la perturbación $U'(s)$ ha ocurrido midiendo la salida del proceso secundario, $G_2'(s)$.

El controlador puede emprender una acción rápidamente para corregir la perturbación. La variable controlada principal, llamada variable primaria, es regulada por el controlador primario, que ajusta el valor deseado o punto de colocación del controlador secundario. Es claro que el proceso debe tener una variable secundaria medible que responda al ajuste de la variable manipulada para que el control de cascada sea factible. La ventaja del sistema en cascada sólo se aprecia cuando el proceso secundario responde con mayor rapidez que el primario. Una regla empírica general es que el proceso secundario debe tener una respuesta dinámica (tiempo muerto más constante de tiempo) no mayor que un tercio de la del proceso primario³⁷.

Los dos controladores en cascada utilizan los algoritmos de control que se describieron en la sección 35.2.3. Naturalmente, el controlador secundario debe ser capaz de recibir un valor deseado o un punto de colocación del operador o en forma remota del controlador primario; por lo general se proporciona un interruptor en cascada para la fuente del punto de colocación. En un sistema de control en cascada, primero se debe ajustar el controlador secundario, con su punto

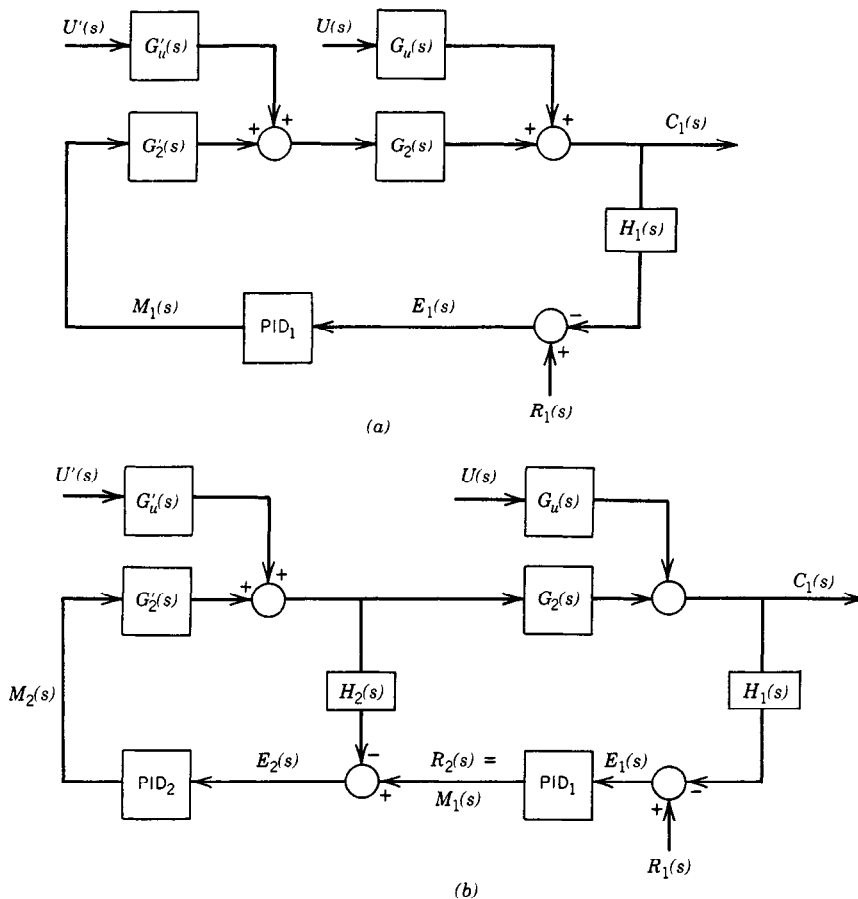


Fig. 35-25. Comparación de sistemas de control: a) de una sola variable y b) en cascada.

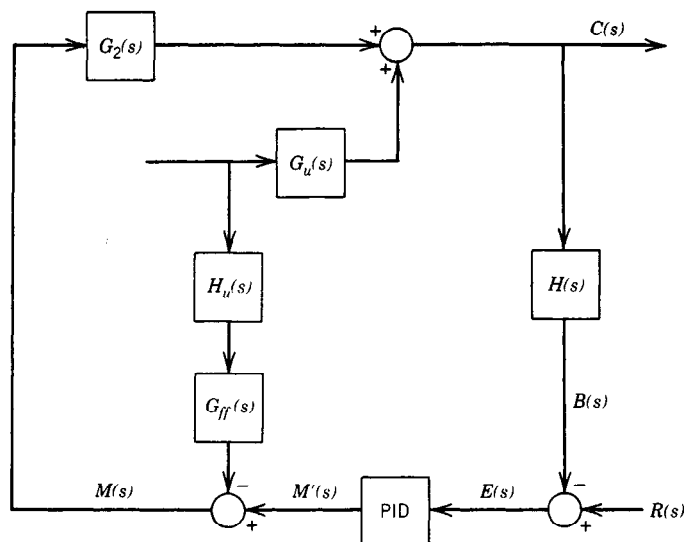


Fig. 35-26. Control por corrección anticipante y por retroalimentación.

$$G_{ff}(s) = \frac{G_u(s)}{G_2(s)} = \frac{K_u(1 + t_2s)}{K_2(1 + t_us)} e^{+(\theta_2 - \theta_u)s}$$

de colocación ajustado por el operador (cascada abierta). Una vez que se ha ajustado satisfactoriamente el secundario, el sistema en cascada se puede colocar en operación y ajustarse el ciclo primario. Como el modo integral del controlador primario reducirá su señal de error a cero, el control secundario sólo necesita control proporcional; no obstante, éste suele tener un modo integral, y se ajusta en forma ordinaria para su operación cuando se abre la cascada. Un sistema en cascada tiene más salidas del controlador, y por consiguiente es muy susceptible a la conclusión de la recolocación.

Control por corrección anticipante

Se pueden aplicar métodos de corrección anticipante para compensar los efectos de perturbaciones medidas que no pueden ser corregidos por una cascada rápida de ciclo interno. Algunas perturbaciones comunes se refieren a gasto de alimentación, composición, temperaturas de insumos y presiones, que son entradas al proceso y no pueden ser influidas por las variables manipuladas del proceso. Un sistema de control por corrección anticipada, como el que se ilustra en la figura 35-26, tiene el objetivo de ajustar la variable manipulada de tal manera que la variable controlada no sea influida por la perturbación. Las señales de corrección anticipada y de retroalimentación pueden sumarse de manera que ambas puedan ajustar la variable manipulada. El diseño del controlador de corrección anticipada se da en la figura 35-26; puede determinarse a partir de algoritmos de ganancia y adelanto/retraso en sistemas de control analógicos y digitales, requiriéndose sistemas digitales para realizar los cálculos de tiempos muertos. La función de transferencia/corrección anticipada $G_{ff}(s)$ podría tener un tiempo muerto negativo no materializable; en ese caso es posible in-

crementar un poco la constante de tiempo de adelanto. Cuando el numerador y el denominador de $G_{ff}(s)$ tienen aproximadamente los mismos tiempos muertos y constantes de tiempo, suele obtenerse una compensación adecuada por medio de la compensación de corrección anticipada de estado estable que se calcula exclusivamente a partir de las ganancias del proceso.

Control de relaciones

Se emplea una estrategia simple similar al control por corrección anticipada cuando los objetivos de control requieren que dos variables se mantengan en una relación deseada. Un algoritmo de control de relaciones mide las dos variables y controla su relación ajustando una variable manipulada que influye solamente en la variable dependiente. Como se muestra en la figura 35-27, la variable dependiente se mantiene en la relación deseada con la variable independiente o "libre". Se dispone de algoritmos de control de relaciones en sistemas de control comerciales tanto analógicos como digitales. La relación suele calcularse a partir de la variable independiente. Por tanto, quizá sea necesario filtrar la variable independiente de manera que el ruido de medición no se propague a la entrada del controlador. El control de relaciones se emplea a menudo en control de calidad de procesos de mezclado y en conservación de los flujos de productos e insumos (p. ej., vapor) proporcionales al gasto de alimentación de muchos procesos.

Compensación del tiempo muerto

Las mejoras anteriores se refirieron a la respuesta a perturbaciones medidas; el rendimiento del control también puede degradarse por ciertas característi-

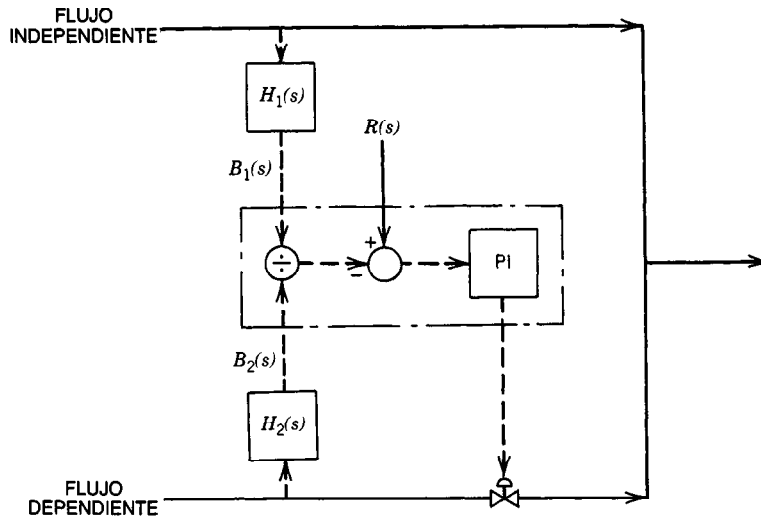
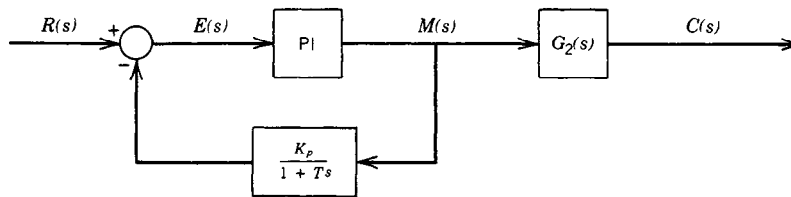


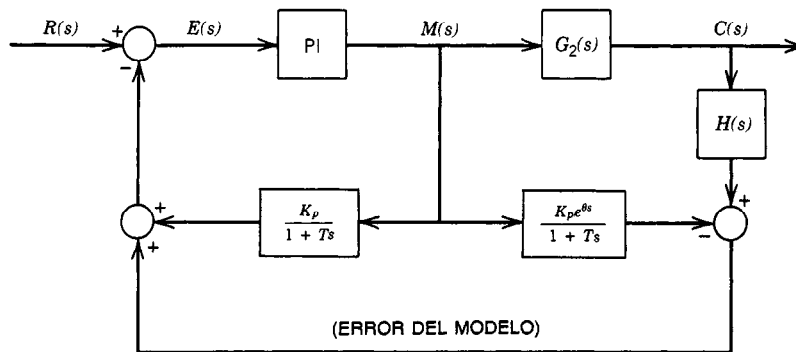
Fig. 35-27. Proceso de mezcla con controlador de relaciones (en el rectángulo).

cas dinámicas del proceso en particular. De especial importancia es la existencia frecuentemente encontrada de largos tiempos muertos de procesos, provocados por demoras de transporte o una combinación de muchos procesos de primer orden. Cuando existe un tiempo muerto largo en un sistema de ciclo cerrado, el controlador se debe ajustar con una ganancia pequeña y un tiempo integral largo

para asegurar la estabilidad; este ajuste produce una respuesta lenta a perturbaciones y cambios del punto de colocación^{8,14}. Un diseño de retroalimentación conocido como compensación de tiempo muerto puede dar mayor velocidad a la respuesta de sistemas de ciclo cerrado³⁸. En este esquema interviene un cálculo (basado en un modelo) de la señal de entrada del controlador y una señal de retroa-



(a)



(b)

Fig. 35-28. Compensación de tiempo muerto: a) parte basada en el modelo; b) completa.

alimentación para corregir el modelo. Como se ilustra en la figura 35-28a, en el compensador de tiempo muerto típico se utiliza un modelo de primer orden del proceso, y el modelo se controla con un algoritmo PI estándar. La respuesta de este sistema es rápida, debido a que no contiene tiempo muerto. Como el modelo no es perfecto, se debe corregir basándose en la respuesta de planta. El error del modelo se calcula como la diferencia entre el modelo dinámico (el modelo de primer orden anterior con un tiempo muerto incluido) y la salida de planta. La corrección se suma al cálculo del modelo, según se muestra en la figura 35-28b. Los parámetros del modelo se pueden determinar a partir de una curva de reacción del proceso de ciclo abierto que debe incluir la dinámica de la planta, G_2 , y del sensor, H . Como el controlador requiere un cálculo exacto de tiempo muerto, siempre se implementa a través de operaciones digitales.

Un compensador de tiempo muerto se justifica cuando el tiempo muerto del proceso es largo. Falta consenso acerca de la duración del tiempo muerto que se requiere para justificar el uso de tal dispositivo, pero la relación del tiempo muerto entre la constante de tiempo debe ser cercana a 1 o mayor para que se justifique el empleo de este algoritmo avanzado. También es de gran importancia la mayor sensibilidad del compensador de tiempo muerto a la inexactitud del modelo. Mediante estudios de simulación se ha determinado que un compensador de tiempo muerto funciona tan bien o mejor que el control PI cuando el error en los parámetros del modelo no excede del 25%; para una incertidumbre mayor, se recomienda el PI³⁹.

35.2.6 Optimización del control

Los métodos de control que se describieron en las secciones anteriores mejoran la operación de la planta manteniendo las variables cerca de sus valores deseados o puntos de colocación. Estos puntos se deter-

minan por medio de análisis económicos periódicos fuera de línea en los que intervienen estudios de casos de simulación o métodos de optimización basados en modelos, como la programación lineal. Comúnmente, estos análisis se efectúan con poca frecuencia, a intervalos de varios días o semanas, debido a que consumen mucho tiempo. Cuando factores importantes de rentabilidad de la planta, tales como la calidad de los insumos, restricciones del equipo o eficiencia en el uso de la energía, cambian en forma frecuente, muchos puntos de colocación pueden estar alejados de sus valores óptimos reales. Por tanto, existe la oportunidad de capitalizar la flexibilidad del proceso existente reoptimizando con frecuencia variables seleccionadas en línea. En esta sección se describen dos de los métodos más simples y más utilizados para la optimización en línea. Métodos más complejos (y de uso menos frecuente), en los que se aplican técnicas matemáticas muy avanzadas, escapan al objetivo de esta sección⁴⁰.

Control de restricciones

Con frecuencia se logra el máximo provecho en una amplia variedad de condiciones económicas y de planta al operar en una restricción específica o cerca de ella. Un controlador de restricciones mantiene una variable de planta cerca de su valor de restricción ajustando una variable manipulada. Las restricciones representan limitaciones del equipo, como el área del cambiador de calor, capacidad hidráulica del equipo y capacidad de bombas o compresores. Se miden o infieren por medio de variables, como posiciones de válvulas, gastos y caídas de presión. Las variables controladas (restricciones) y manipuladas se deben relacionar en forma aproximadamente lineal para garantizar un control óptimo de restricciones.

En la figura 35-29 se ilustra un ejemplo de control de restricciones que maximiza el gasto de alimentación de un proceso. La restricción se mide en el proceso y se retroalimenta al controlador, que ajusta el gasto a su valor deseado. Otras aplicaciones comunes del control de restricciones minimizan la presión (y reducen el

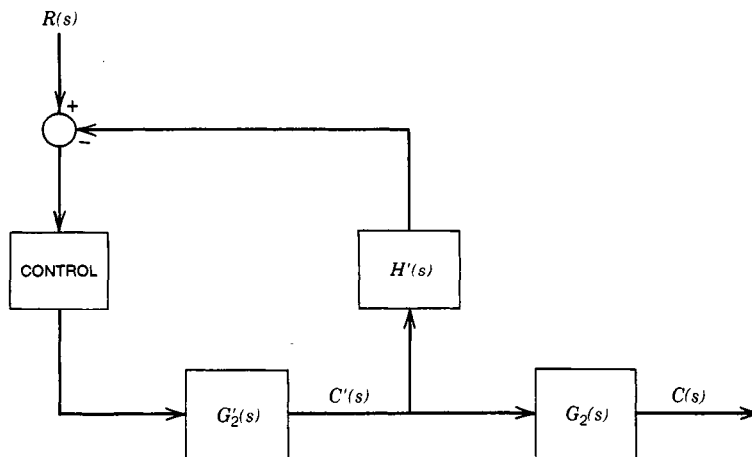


Fig. 35-29. Control de restricciones por maximización de la alimentación.

consumo de energía) en la destilación⁴¹⁻⁴³, maximizan la recuperación de productos valiosos, y recuperan calor de corrientes de procesos a la más alta temperatura posible. El algoritmo de control de restricciones a menudo ajusta su variable manipulada a una tasa constante, donde la dirección es determinada por el signo de la señal de error.

Optimización por búsqueda directa

En contraste con lo que ocurre en el caso de aplicaciones de restricciones, en algunos procesos el máximo beneficio no se obtiene cuando las variables del proceso se encuentran en sus restricciones. Si la operación de la planta en la cual se da el máximo beneficio cambia en forma importante a medida que varían factores incontrolables, existe la oportunidad de optimizar el control. El objetivo consiste en maximizar el beneficio de la operación ajustando una o más variables. El beneficio de la operación se determina como sigue:

$$\text{Beneficio} = \text{valores de productos} - (\text{costos de insumos} + \text{costos de energía}) \quad (35-29)$$

En estas aplicaciones, los algoritmos más ampliamente utilizados incluyen uno de varios algoritmos de búsqueda directa que utilizan datos de la planta sin un modelo para mejorar el beneficio de la operación. El método de búsqueda directa a menudo se conoce como operación evolutiva o EVOP.

En la figura 35-30 se ilustra un ejemplo de optimización por búsqueda directa que se aplica a la asignación de carga a una caldera. La eficiencia de una caldera varía con su tasa de producción de vapor, y las relaciones de eficiencia pueden ser diferentes para dos calderas⁴⁴. Por tanto, la correcta asignación de la demanda total de vapor entre las dos calderas puede dar como resultado un menor consumo de combustible. El optimizador de búsqueda directa minimizaría el costo unitario del vapor ajustando el porcentaje de vapor generado por la caldera 1. El algoritmo típico de búsqueda directa cambia la asignación en un porcentaje mínimo y vuelve a calcular el costo del vapor en dólares por tonelada. Si el costo disminuye respecto al valor antes del cambio, la dirección del cambio se considera correcta y el siguiente cambio en la asignación se efectúa en la misma dirección. Si aumenta el costo, se invierte la dirección. La técnica prosigue la búsqueda, encuentra lo que busca y después se mantiene oscilando en torno al nivel óptimo, de manera que pueda seguirlo cuando cambia. Naturalmente, debe existir la demora suficiente entre el ajuste de la variable manipulada y la medición de la operación de la planta para garantizar que la respuesta transitoria se haya aproximado al nuevo valor de estado estable; se recomienda una demora de un tiempo muerto y tres constantes de tiempo. Asimismo, como las mediciones del proceso son degradadas por ruido, los algoritmos de búsqueda directa tienen algún método de filtrado para incluir los resultados de los últimos puntos buscados y también del punto actual. Suele incluirse una memoria ajustando una curva a través de varios pun-

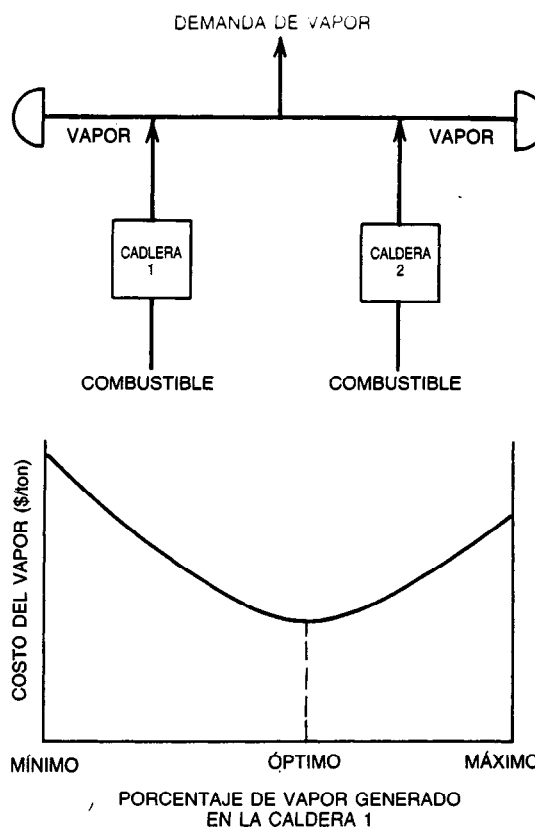


Fig. 35-30. Optimización por búsqueda directa aplicada a la asignación de cargas a calderas.

tos; este procedimiento se puede implementar en algoritmos de lote⁴⁵ o recursivos⁴⁶. Otro método de inclusión de la memoria consiste en utilizar el bien conocido optimizador COMPLEX⁴⁷. La optimización de búsqueda directa se ha estudiado en muchos procesos como la destilación⁴⁷ y los reactores químicos⁴⁶.

35.2.7 Aplicaciones del control de procesos

En las secciones anteriores se han presentado conceptos y métodos básicos de dinámica y control de procesos. En esta sección se analizan las aplicaciones de estos conceptos a los diseños de sistemas de control. Primero, se ofrece una guía general sobre la manera de analizar un diseño de proceso a fin de determinar el sistema de control apropiado. Después se demuestran unos cuantos diseños de control de uso común mediante su aplicación en operaciones unitarias de procesos importantes. Todos los controladores de retroalimentación que se ilustran en esta sección se valen del algoritmo PI estándar.

Consideraciones en el diseño del control de procesos

Como se ha mencionado en varias ocasiones en este capítulo, la tarea más importante en el diseño del control de procesos es el establecimiento de objetivos de

control. El conjunto general de objetivos que se enuncia en la tabla 35-4 puede emplearse como lista de verificación para establecer necesidades del proceso. Para determinar si los objetivos de control son posibles en el estado estable, se debe realizar un análisis de los grados de libertad. Este análisis revela el número de variables que se pueden determinar independientemente restando el número de relaciones físicas restrictivas (balances de materias, balances de energía, equilibrios de fases, etc.) al número total de variables del sistema⁴⁸. Aun cuando existan los grados de libertad teóricos, quizá se necesiten simulaciones de estado estable para asegurar que el proceso es capaz de lograr todos los objetivos de control; esto es, que las variables manipuladas se puedan ajustar en un intervalo lo suficientemente amplio para que sea posible realizar todas las operaciones de proceso deseadas. Si una variable llega a encontrarse con una restricción, como es el caso de un flujo que alcanza su valor máximo, el sistema pierde un grado de libertad adicional. Naturalmente, si el proceso carece de grados de libertad o capacidad debe modificarse el diseño del proceso o suprimirse uno o más objetivos de control.

Cada objetivo de control se debe relacionar con variables del proceso. Si no es posible medir una variable importante, a menudo se puede formular una variable inferencial que se calcula a partir de variables medibles. La variable inferencial debe guardar una buena correlación con la variable importante no medida del proceso, y no debe ser demasiado sensible a perturbaciones comunes del proceso. Suele ser posible determinar la correlación por medio de unos cuantos casos de simulación de estado estable, como sucede con el control de la temperatura de los platos en el control inferencial de calidad de los productos de destilación⁴⁹. Las variables medidas e inferenciales son las entradas de los controladores de retroalimentación, y las señales que se envían a los elementos de control finales, en mayor parte válvulas, son las salidas.

Aplicando el principio de parsimonia (sobriedad) en el desarrollo de un sistema de control simple, comprensible y con buen rendimiento, el diseñador debe esforzarse por parear las variables a través de un sistema de controladores de una sola variable. Sólo cuando las interacciones son lo suficientemente serias para degradar el rendimiento del control se debe emplear el desacoplamiento.

Es necesario aplicar conceptos avanzados, como el control por corrección anticipada, para reducir la influencia de perturbaciones, y se puede aplicar el control de relaciones para comodidad del operador de la planta.

Por último, en plantas integradas con muchos procesos los ciclos de flujo, nivel y presión suelen disponerse en forma tal que el rendimiento de la planta se pueda controlar por medio de un controlador de flujo. En ocasiones no se sigue esta regla cuando un proceso intermedio es altamente sensible a variaciones en el gasto. En estos casos se instala un tanque antes del proceso sensible, y el flujo de alimentación se ajusta con poca frecuencia y a baja velocidad para regular el aforo del tanque.

Cambiador de calor con derivación

En la figura 35-31 se ilustra un cambiador de calor simple con derivación. Salvo por las mínimas pérdidas hacia los alrededores, toda la pérdida de calor de la corriente caliente se transfiere a la corriente fría; por tanto, sólo existe un grado de libertad para el control de temperatura. En el ejemplo, la temperatura de salida de la corriente caliente se controla ajustando la derivación de la corriente caliente en torno al cambiador. El controlador envía la misma señal a ambas válvulas, y una de ellas se abre con una señal creciente mientras la otra se cierra con una señal también creciente. Por tanto, la derivación se puede ajustar de cero al gasto total de la corriente caliente. Esta última se deriva de modo que el sistema de control de temperatura pueda reaccionar con rapidez a perturbaciones. Si la derivación se realizara en la corriente fría, la respuesta de la temperatura de salida caliente sería más lenta debido a que la respuesta dinámica del cambiador de calor se incluiría en el sistema de ciclo cerrado.

Horno con cascada alimentada por combustible

En la figura 35-32 se ilustra un diseño de control que logra una buena regulación de la temperatura de salida de la corriente del horno cuando cambia la composición del gas combustible. Una variación en la composición del gas combustible se refleja en la energía que se libera en la combustión y, por consiguiente, en la temperatura controlada. Un analizador "calorimétrico" puede determinar la potencia del combustible por unidad de flujo. Por tanto, el control del producto del calor liberado por unidad de gasto y el gasto total proporciona una rápida corrección de perturbaciones en la composición del gas combustible. El controlador de la temperatura ajusta el punto de colocación del controlador secundario para regular la temperatura de la toma de salida.

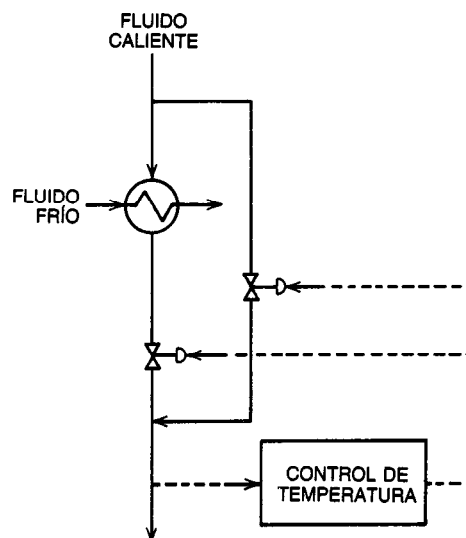


Fig. 35-31. Cambiador de calor con derivación.

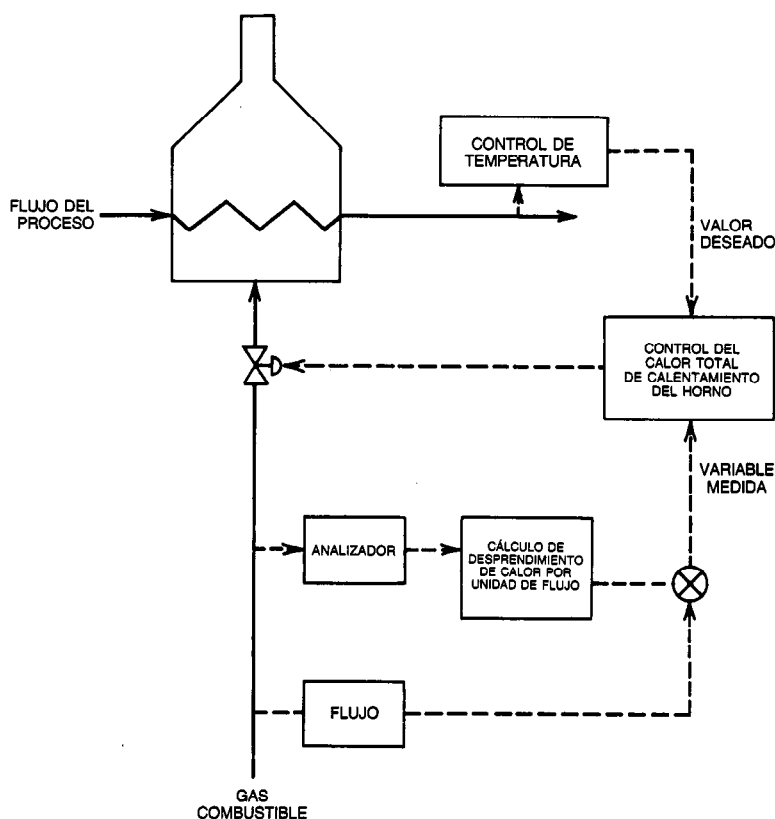


Fig. 35-32. Horno con control de calentamiento total en cascada.

Control de presión con escala dividida

Los sistemas de vapor se utilizan en todas las industrias de procesos para accionar grandes máquinas (en su mayor parte compresores y bombas) y para permitir la transferencia de calor. El vapor se genera en calderas y se distribuye en varios niveles de presión. Los controladores de cada nivel de presión (llamados cabezales) captan la presión y manipulan las circulaciones de entrada y salida de ese nivel.

Los sistemas de vapor acostumbran a ser muy complejos; la sección simplificada de un sistema de vapor de la figura 35-33 muestra el control con escala dividida de dos variables manipuladas. En este caso, los objetivos de control son regular la presión en los cabezales y minimizar el flujo en descenso a través de la válvula V2, con lo cual se maximizan el flujo por la turbina y la entrega de energía al proceso. Con la salida del controlador expresada como 0 a 100%, la válvula V1 se abre en proporción a la señal de salida desde 0 al 50% y se mantiene totalmente abierta del 50 al 100%. La válvula V2 permanece cerrada desde 0 al 50% y se abre en proporción a la salida del 50 al 100%; al 100%, V2 está abierta por completo. El control resultante logra los objetivos propuestos. Por ejemplo, si la presión en un cabezal está por encima de su punto de colocación, disminuye la señal del controlador, lo que provoca que:

1. V2 se cierre ligeramente si la salida está en el intervalo del 50 al 100% (V1 está totalmente abierta).
2. V1 se cierra ligeramente si la salida está en el intervalo de 0 a 50% (V2 está completamente cerrada).

Obsérvese que las dos válvulas deben tener más o menos los mismos gastos máximos, de manera que las ganancias del proceso de ambos sistemas de ciclo cerrado sean casi iguales y el ajuste constante del controlador sea satisfactorio. Los objetivos del control con escala dividida podrían lograrse por medio de dos controladores de retroalimentación con diferentes puntos de colocación, pero este método es más costoso e implica el riesgo de interacción de controladores.

Control de nivel con selector de señales

El sistema de control de nivel de la figura 35-34 muestra el método de selección de señales de uso frecuente para un sistema de control simple con una variable manipulada. Los objetivos de control consisten en:

1. Controlar el nivel ajustando el flujo de salida (con F1 cero, si es posible).
2. Nunca reducir el flujo por debajo del valor mínimo de salida (a otro proceso sensible).

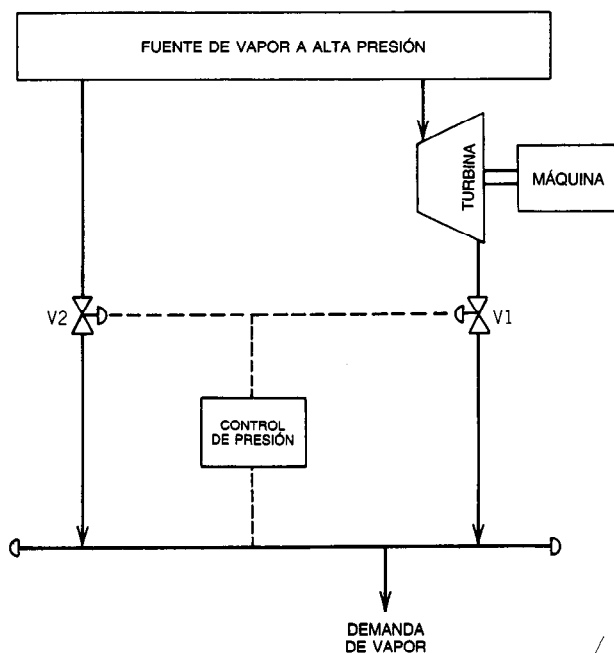


Fig. 35-33. Control de presión de vapor del cabezal con salida de escala dividida.

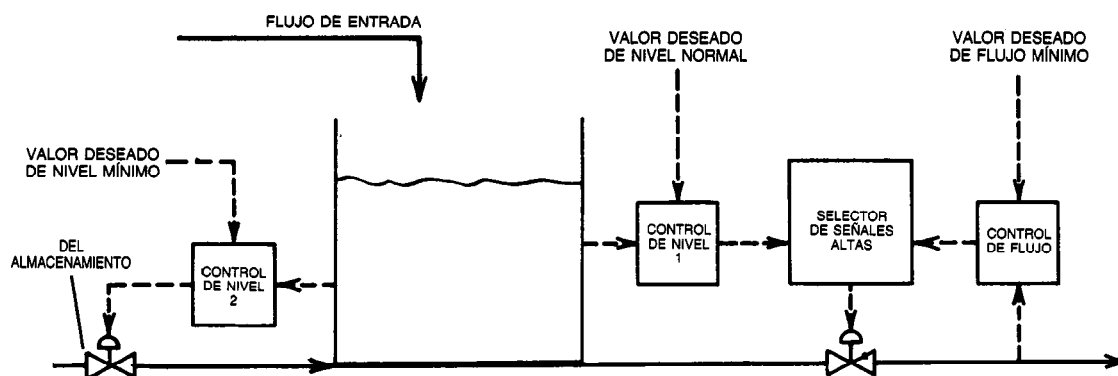


Fig. 35-34. Proceso de control de nivel con control de flujo por selector de señales.

3. Nunca permitir que el nivel caiga debajo de su valor mínimo.

El controlador de nivel 1 y el controlador de flujo envían señales a un selector de señal alta, y sólo llega a la válvula la más alta de las dos salidas de los controladores. (Naturalmente, los selectores de señal baja se utilizan asimismo en otras aplicaciones.) Si el flujo de entrada disminuye, el controlador de flujo evita que el controlador de nivel reduzca el flujo por debajo de su valor mínimo. El nivel decrece hasta que el controlador de nivel 2 comienza a manipular $F1$ a fin de evitar que el nivel caiga por debajo de su valor mínimo. Como uno de los dos controladores que envían su salida al

selector de señales siempre está impedido para ajustar la variable manipulada, los sistemas de control con selectores de señales son propensos a sufrir cancelación, y el sistema se debe diseñar con un dispositivo que evite la conclusión de la recolocación.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

1. R. Rinne y colaboradores, *Hydrocar. Proc.* **61**:141-148.
2. R. Saporita y R. McCue, *Oil Gas J.* **76**:69-71.
3. J. Bayer y R. Clay, documento cc-79-102, presentado en Nat. Petro. Refiners Assoc. Computer Conference.

4. J. D. Robnett, documento 81-IPC-PWR-2, presentado en Industrial Power Conference (ASME).
5. H. Tari, en H. R. Van Navta Lemke y H. B. Verbruggen, eds., *Digital Computer Applications to Process Control*, IFAC y North-Holland, La Haya, pp. 65-77.
6. H. Broekhuis y colaboradores, en H. R. Van Navta Lemke y H. B. Verbruggen, eds., *Digital Computer Applications to Process Control*, IFAC y North-Holland, La Haya, pp. 43-58.
7. D. M. Himmelblau y K. B. Bischoff, *Process Analysis and Simulation: Deterministic Systems*, Wiley, Nueva York.
8. A. Lopez y colaboradores, *Instru. Technol.* **14**:57-62.
9. W. L. Luyben, *Process Modeling, Simulation, and Control for Chemical Engineers*, McGraw-Hill, Nueva York.
10. D. Graup, *Identification of Systems*, Van Nostrand Reinhold, Nueva York.
11. K. Astrom y colaboradores, *Automatica* **13**:457-476.
12. J. Ziegler y N. Nichols, *Trans. ASME* **64**:759.
13. A. Lopez y colaboradores, *Instru. Contr. Sys.* **42**:89-95.
14. H. Fertik, documento 74-503, presentado en ISA Conference.
15. P. Harriott, *Process Control*, McGraw-Hill, Nueva York.
16. J. Shunta y W. Fehervari, *Instr. Technol.* **23**:43-48.
17. H. Fertik y C. Ross, documento 10-1-ACOS-67, presentado en 22nd ISA Conference, Chicago.
18. G. Shinsky, *Instr. Contr. Sys.* **44**:9.
19. D. Wolter, *Instr. Technol.* **24**:55-63.
20. G. Shinsky, *Controlling Multivariable Processes*, Instrument Society of America, Research Triangle Park, NC.
21. P. Tompkins y A. Corripio, *Instr. Chem. Petr. Ind.* **15**:51-59.
22. R. Weber, *AIChE J.* **26**:132-134.
23. E. Bristol, *IEEE Trans. Auto. Contr.* **AC-11**:133-134.
24. F. G. Shinsky, *Process Control Systems*, McGraw-Hill, Nueva York.
25. T. McAvoy, *Interaction Analysis*, Instrument Society of America, Research Triangle Park, NC.
26. T. F. Cheung y T. Marlin, *Proceedings of Summer Simulation Conference*, Denver, Society of Computer Simulation, pp. 462-472.
27. F. G. Shinsky, *Distillation Control*, McGraw-Hill, Nueva York.
28. L. Tung y T. Edgar, *AIChE J.* **27**:690-693.
29. W. Luyben, *AIChE J.* **16**:198-203.
30. H. Rosenbrock, en T. J. Williams y E. J. Kompass, eds., *Multivariable Control Systems*, Dun-Donnelley, Nueva York, pp. 1-24.
31. C. Schwanke y colaboradores, *ISA Trans.* **16**:69-81.
32. C. Garcia y colaboradores, *IEC PPD* **21**:308-323.
33. D. Pretti, documento 51b, presentado en AIChE 86th National Meeting.
34. R. Mehra y colaboradores, en T. F. Edgan y T. E. Seborg, eds., *Process Control 2*, United Engineering Trustees, pp. 287-310.
35. R. Weber y colaboradores, *Proceedings of American Control Conference*, Washington, D. C., Vol. I, pp. 87-90.
36. A. Waltz, *InTech* **27**:41-44.
37. R. Perry y C. Chilton, *Chemical Engineer's Handbook*, Wiley, Nueva York.
38. O. Smith, *ISA J.* **6**:28.
39. C. Hang y colaboradores, documento CI79-611, presentado en ISA National Conference.
40. F. Larman y colaboradores, en H. R. Van Navta Lemke y H. B. Verbruggen eds., *Digital Computer Applications to Process Control*, IFAC y North-Holland, La Haya.
41. A. Maarlevel y colaboradores, *Automatica* **6**:51-58.
42. F. G. Shinsky, *Distillation Control*, McGraw-Hill, Nueva York.
43. H. Kister y colaboradores, *Trans. Inst. Chem. Engr.* **57**:43-48.
44. C. Cho, *Instrumentat. Technol.* **25**:55-58.
45. A. Morshedi y colaboradores, *IEC PDD* **16**:473-478.
46. C. Garcia, *AIChE J.* **27**:960-968.
47. Y. Sawaragi y colaboradores, *Automatica* **7**:509-516.
48. E. Gilliland y colaboradores, *Ind. Engr. Chem.* **34**:551-557.
49. T. Tolliver y colaboradores, *InTech* **27**:75-80.